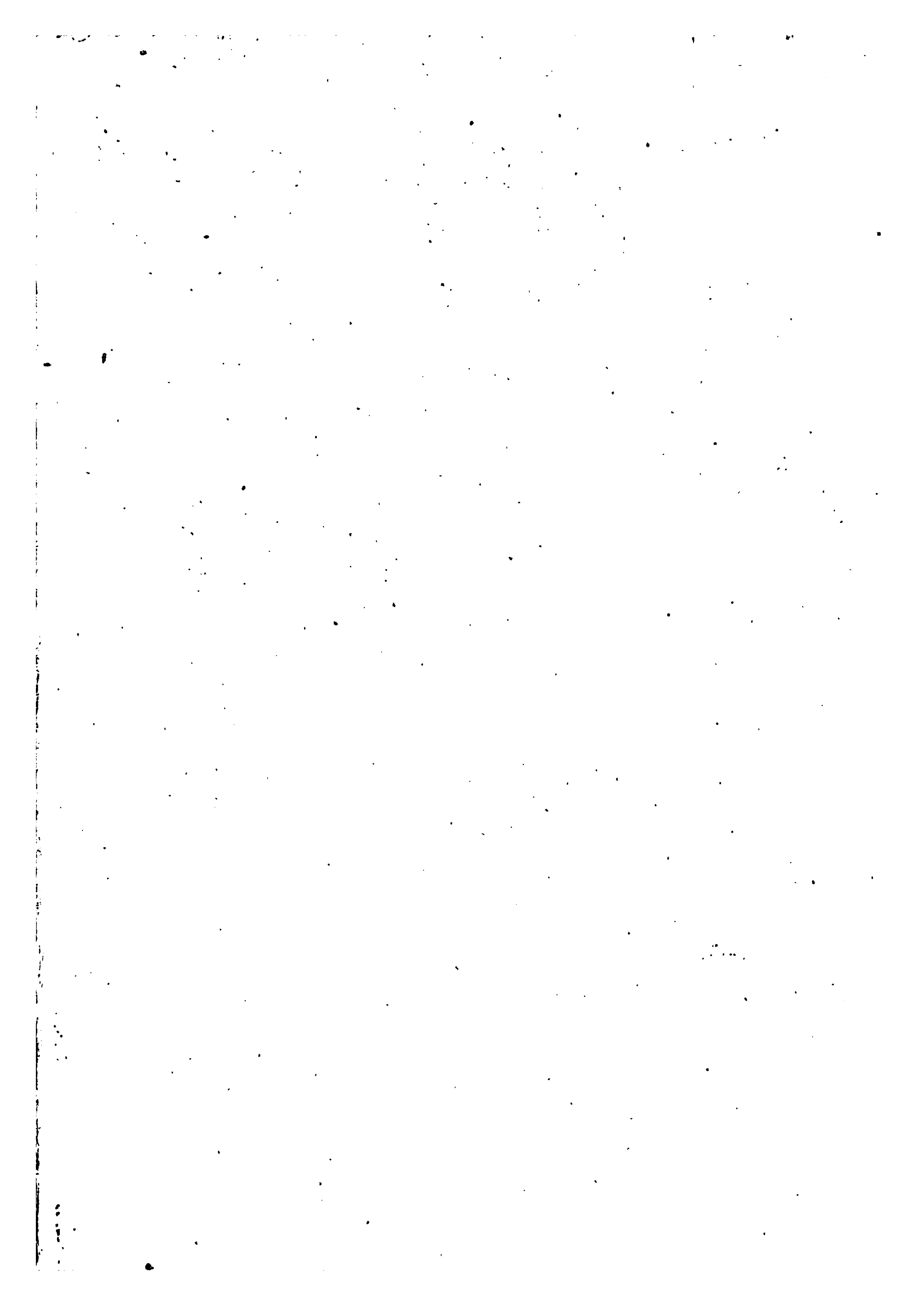


HANDBUCH

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

DR W. JORDAN

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

ERSTER BAND

AUSGLEICHUNGS-RECHNUNG

NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

DRITTE VERBESSERTE UND ERWEITERTE AUFLAGE

STUTTGART

VERLAG DER J. B. METZLERSCHEN BUCHHANDLUNG

1888

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei in Stuttgart.

VORWORT.

Nachdem im Jahre 1873 das „Taschenbuch der praktischen Geometrie“ erschienen, und im Jahre 1877 das „Handbuch der Vermessungskunde“ als zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage jenes Taschenbuchs herausgegeben ist, bringen wir hiemit die dritte, abermals umgearbeitete Auflage dieses nunmehr auf drei Bände berechneten Werkes in die Öffentlichkeit, und zwar hier zunächst den ersten Band, welcher die Ausgleichungs-Rechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt.

Vieles was von Ausgleichungen und Fehlerberechnungen in den früheren Auflagen an verschiedenen Orten zerstreut war, ist jetzt in diesem ersten Bande gesammelt. Der ganze Inhalt hat dabei gründliche Neubearbeitung und vielseitige Vermehrung erfahren; dabei sind die Fortschritte der amtlichen Ausgleichungen unserer Landesaufnahme zur Darstellung gebracht.

Dieser Band bildet für sich ein abgeschlossenes Ganzes, und wird von der Verlagshandlung auch einzeln abgegeben.

Hannover im Mai 1888.

Jordan.

INHALTS-ÜBERSICHT.

Kapitel II. Trigonometrische Punkt-Einschaltung.

Kapitel III. Ausgleichung der Triangulierungsnetze.

Kapitel IV. Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit.

Kapitel V. Theorie der Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung.

Anhang.

§ 1. Einleitung. Überblick über die Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Methode der kleinsten Quadrate ist ein Zweig der mathematischen Wissenschaften, welcher, noch verhältnismässig jung, doch seit seiner Entdeckung am Ende des vorigen Jahrhunderts, die auf Beobachtungen und Messungen gegründeten Wissenschaften völlig umgewandelt hat. Diese Theorie kommt zur Anwendung in allen Fällen, bei denen es sich darum handelt, eine Wahrheit auf dem Wege der sinnlichen Wahrnehmung zu erforschen; sie befasst sich mit den hiebei unvermeidlichen Mängeln und Unvollkommenheiten, d. h. mit den *Fehlern* der Beobachtungen.

Für manche Fälle genügt ein einfaches Ausgleichungsverfahren, welches seit undenklichen Zeiten zur Anwendung kam, nämlich das Prinzip des *arithmetischen Mittels,* das bekanntlich dazu dient, um abweichende Messungsresultate einer und derselben Grösse zu einem Resultate zu vereinigen. Allein die meisten Fälle der Beobachtungspraxis sind nicht so einfach, dass das arithmetische Mittel zur Ausgleichung ausreichen würde. Die bei einer Ausgleichung zu lösende Aufgabe besteht im allgemeinen darin, aus einer Anzahl von Gleichungen, welche grösser ist, als die Anzahl der darin vorkommenden Unbekannten, diejenigen Werte der letzteren zu finden, welche sämtliche Gleichungen möglichst befriedigen.

Es sollen z. B. folgende 3 Gleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + l_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + l_2 &= 0 \\ a_3 x + b_3 y + l_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

wo die Grössen $l_1\ l_2\ l_3$ durch Beobachtungen erhalten wurden. x und y sind Unbekannte, welche durch die Gleichungen (1) mit den Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3$ in Beziehung stehen, wobei alle Coëfficienten a und b gegeben sind.

Da es im allgemeinen nicht möglich ist, zwei Unbekannte $x\ y$ zu finden, welche allen *dreien* Gleichungen (1) völlig Genüge leisten, betrachtet man ein neues System:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + l_2 &= v_2 \\ a_3 x + b_3 y + l_3 &= v_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

und sucht die Widersprüche v in ihrer Gesamtheit möglichst klein zu machen.

Die Methode der kleinsten Quadrate erklärt nun dasjenige System der Unbekannten x und y für das beste, welches in den Gleichungen solche Widersprüche v erzeugt, deren *Quadratsumme* ein Minimum ist. Daher der Name „Methode der kleinsten Quadrate“, abgekürzt statt „Methode der kleinsten Quadratsumme“. In dieser allgemeinen Aufgabe ist auch der vorher erwähnte Fall des arithmetischen Mittels mit inbegriffen, indem die Anzahl der Unbekannten sich auf *eine* reduciert.

Die erste theoretische Untersuchung der Beobachtungsfehler ist im Jahr 1770 von *Lagrange* angestellt worden (vergl. *Encke* Berl. astr. Jahrb. für 1853 S. 310—351), doch ist diese Theorie, welche die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Beobachtungsfehler anwendet, wieder in Vergessenheit geraten. Der Auffindung unserer heutigen Methode der kleinsten Quadrate ging voraus ein Versuch einer Ausgleichungstheorie von *Laplace*, welcher zum Zweck der Bestimmung der Erddimensionen aus mehr als zwei Gradmessungen, aus mehreren Gleichungen von der soeben genannten Art (1) oder (2) die unbekannten Elemente bestimmte mittelst der zwei Bedingungen, 1) dass die algebraische Summe der übrig bleibenden Fehler gleich Null werde, und 2) dass die absolute Summe der Fehler ein Minimum werde. Diese Theorie ist entwickelt in „Traité de mécanique céleste, tome second, an VII, (1802) première partie, livre III art. 40. S. 143.

Die heute allgemein anerkannte Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate wurde zuerst öffentlich behandelt von *Legendre* im Jahr 1805 in dem Werke „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes", appendice S. 72—80 »*sur la méthode des moindres carrés*«. (Eine zweite Veröffentlichung hievon gab *Legendre* in den Mémoires de la classe des Sciences mathém. et phys. de l'institut de France, année 1810, seconde partie S. 149 u. ff.) *Legendre* begründete seine Methode nur durch die Allgemeinheit und Leichtigkeit der Anwendung (Nouvelles méthodes etc. S. 72: „De toutes les principes, qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exacte, ni d'une application plus facile que celui" etc.) Als Beispiel der Anwendung giebt *Legendre* die Bestimmung der Erddimensionen aus 5 in Frankreich gemessenen Polhöhen und den dazwischen liegenden 4 Meridianbögen.

Unabhängig von *Legendre* fand *Gauss* die Methode der kleinsten Quadrate im Jahre 1795 als Studierender der Mathematik auf der Universität Göttingen, veröffentlichte sie aber erst im Jahr 1809 in dem Werke: „theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium."

Wenn demnach *Legendre* auch die Priorität der Veröffentlichung gehört, so ist doch *Gauss* als der Vater der Methode der kleinsten Quadrate zu betrachten, denn die Priorität der Entdeckung und namentlich der Anwendung (auf den Planeten Ceres) gebührt ihm unzweifelhaft, und er allein hat weitaus den grössten Teil dessen geschaffen, was heute Methode der kleinsten Quadrate heisst. *Gauss* selbst sagt hierüber in Art. 186. der theoria motus: „Ceterum principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. *Legendere* in opere „nouvelles méthodes etc." prolatum est" (vergl. auch Gesamtausgabe von *Gauss*' Werken, Band VI. S. 56 und 59).

Sartorius v. Waltershausen berichtet in seiner Biographie von *Gauss* (*Gauss* zum Gedächtnis 1856, S. 21) über diesen Gegenstand: „Ein so ausserordentlicher Ideenreichtum quoll damals Tag und Nacht aus der Seele dieses jugendlichen Genies hervor, dass eine Entdeckung gleichsam die andere überstürzte, dass sich kaum Zeit und Musse fand, auch nur die äusseren Umrisse derselben zu Papier zu bringen. So haben denn die grössten Entdeckungen meist über ein Jahrzehnt, selbst über ein halbes Jahrhundert gelegen, ohne dass sie zu einer weiteren Kenntnis des wissenschaftlichen Publikums gelangt sind." Und S. 23: „Wie tief auch die Entdeckungen von *Gauss* damals auf dem Felde der reinen Mathematik gewesen sind, blieben sie doch, wie dies die Natur der Sache mit sich bringt, für längere Zeit, selbst bis auf den heutigen

Tag, auf einen sehr engen Kreis von Denkern beschränkt, und es musste noch eine andere Entdeckung aus der Astronomie hinzukommen, die *Gauss*' Namen auch im grossen Publikum zu einem der gefeiertsten in Europa gemacht hat.“

Mit dieser Entdeckung hatte es folgende Bewandtnis: Am 1. Januar 1801 entdeckte *Joseph Piazzi* in Palermo den Planeten Ceres (ersten kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter), beobachtete ihn während 41 Tagen, und teilte seine Entdeckung mehreren Astronomen mit. Da jedoch dieselben die Nachricht *Piazzi*'s erst mehrere Monate nach der ersten Entdeckung erhielten, zu einer Zeit, in welcher die Beobachtung des Planeten wegen seiner ungünstigen Stellung zur Sonne nicht mehr möglich war, so blieben die 41tägigen Beobachtungen *Piazzi*'s das einzige Material, um die Bahnelemente zu berechnen und den Planeten im nächsten Jahr wieder zu finden. Mit dieser Aufgabe beschäftigten sich sofort die Astronomen.

Gauss war es vorbehalten, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine Ephemeride des neuen Planeten zu berechnen, welche den sämtlichen Einzelbeobachtungen, die sich nur auf 9° der ganzen Bahn erstreckten, möglichst gerecht werdend, von der Wahrheit so wenig abwich, dass der erste Wiederentdecker des Planeten, *Zach*, sich dahin äusserste, die Ellipse des Dr. *Gauss* stimme „zur Bewunderung genau“ mit der Stellung des Planeten überein.

Obgleich durch die Berechnung der Bahnelemente der Ceres die Ausgleichungsmethode von *Gauss* einen vollständigen Triumph errungen hatte, so fühlte *Gauss* sich doch noch nicht veranlasst, dieselbe der Öffentlichkeit zu übergeben. Zur Erklärung dieser Verzögerung dient folgende Stelle der Vorrede der „theoria motus“ (praefatio pag. IX): „Es wünschten mehrere Astronomen, unmittelbar nach der Wiederauffindung der Ceres, ich möchte die dabei angewendeten Rechnungsmethoden veröffentlichen; indessen verhinderten mich mehrere Ursachen, den Bitten der Freunde zu willfahren, erstens andere Arbeiten (Disquisitiones arithmeticae), ferner der Wunsch, die Sache später ausführlicher zu behandeln, hauptsächlich aber die Hoffnung, dass fortgesetzte Beschäftigung mit diesem Gegenstand verschiedenen Teilen der Auflösung in Beziehung auf Allgemeinheit, Einfachheit und Eleganz zum Vorteil gereichen werde. Und da mich diese Hoffnung nicht getäuscht hat, so glaube ich, die Verzögerung nicht bedauern zu müssen.“

Die *Gauss*'schen Werke über die Methode der kleinsten Quadrate sind folgende:

1809 Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Auctore Carolo Friderico Gauss. Hamburgi 1809, Liber II. sectio III.

1810 Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. Auctore Carolo Friderico Gauss, societati regiae tradita Nov. 25. 1810. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores Vol. I. 1808—1811.)

1816 „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.“ Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger. Tübingen 1816. Bd. I. S. 185—196.

1821 Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, societati regiae exhibita Febr. 15. 1821. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores, Vol. V. ad a. 1819—1822. S. 33—62).

1823 Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior, societati regiae exhibita Febr. 2. 1823. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores Vol. V. S. 63—90.)

1826 Supplementum theoriae combinationis erroribus minimis obnoxiae, societati regiae exhibita Sept. 16. 1826. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores. Vol. VI. 1823—27 S. 57—98.)

In der Gesamtausgabe von *Gauss*' Werken (Carl Friedrich *Gauss*' Werke, herausgegeben von der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen) bildet die theoria motus den VII. Band. Die Disquisitio de elementis ellipticis Palladis bildet den Anfang von Bd. VI., die übrigen Schriften über die M. d. kl. Q. finden sich in Bd. IV.

Folgendes ist der Hauptinhalt der Gauss'schen Schriften über die Methode der kleinsten Quadrate:

In der „theoria motus" wird die Methode der kleinsten Quadrate durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet, es findet sich dabei für das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz die Exponentialfunktion:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$$

Hiemit wird die Ausgleichung und Gewichtsbestimmung für vermittelnde Beobachtungen vollständig behandelt.

In der „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis" wird unter Einführung der Bezeichnungen [*bb*. 1] u. s. w. das Minimum der Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler bestimmt.

Die Abhandlung „Über die Genauigkeit der Beobachtungen" bestimmt den wahrscheinlichen Fehler einer Unbekannten nicht nur aus der Quadratsumme, sondern zur Vergleichung auch aus anderen Potenzsummen wahrer Beobachtungsfehler.

Die „theoria combinationis" geht nach einigen allgemeinen Betrachtungen über Fehlergesetze zu der selbständigen Definition des mittleren Fehlers über und stellt die Bedingung auf, dass die zu bestimmenden Unbekannten oder Funktionen derselben mit möglichst kleinen mittleren Fehlern behaftet seien.

Endlich wendet das „Supplementum theoriae combinationis" diese Bedingung auf bedingte Beobachtungen und insbesondere auf die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit Winkelbeobachtungen oder vollständigen Richtungsbeobachtungen an.

Diese *Gauss*'schen Theorieen nebst einigen *Bessel*'schen Zusätzen wurden von *Encke* in einer Abhandlung „Über die Methode der kleinsten Quadrate" verarbeitet, welche als Anhang der drei Jahrgänge 1834, 1835, 1836 des Berliner astronomischen Jahrbuchs erschienen ist. Dieselbe kann in vielen Fällen das Studium der Originalwerke ersparen und wird deshalb häufig statt derselben citiert. In der Sammelausgabe: „*J. E. Encke*'s astronomische Abhandlungen, zusammengestellt aus den Jahrgängen 1830—1862 des Berl. astr. Jahrb." bildet obige Abhandlung über die M. d. kl. Q. die Nummern XII. XIII. XIV. des ersten Bandes (1866).

Dieses bezieht sich alles auf die *theoretischen* Arbeiten von *Gauss* über Methode der kleinsten Quadrate. Über *Gauss*' praktische Anwendungen dieser Theorie auf Triangulierungs-Ausgleichung ist erst in jüngster Zeit Licht verbreitet worden durch Mitteilungen von Oberst *Schreiber* in der „Zeitschrift für Vermessungswesen" 1879 S. 141, und von Hauptmann *Gäde*, Beiträge zur Kenntnis von *Gauss*' praktisch-geodätischen Arbeiten, Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 113—225; vgl. auch *Jordan-Steppes* Deutsches Vermessungswesen, Stuttgart 1882, S. 5—18.

Bessel hat in einer Abhandlung „Untersuchungen über die Bahn des *Olbers*'schen Kometen" (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, mathematische

Klasse 1812—1813 S 119) und in dem Werk „Fundamenta astronomiae“ 1818, S. 18—21 die Fehlerverteilung in längeren Beobachtungsreihen untersucht.

Oberbaurat *Hagen* hat in seinen „Grundzügen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ Berlin 1837 (2. Auflage 1867) eine interessante Fehlertheorie aufgestellt, welche von der Anschauung ausgeht, dass sich jeder Beobachtungsfehler aus einer sehr grossen Zahl sehr kleiner, teils positiver, teils negativer, absolut genommen gleicher *Elementarfehler* zusammensetzt. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die verschiedenen Fälle der möglichen Kombinationen dieser Elementarfehler führt auf das *Gauss*'sche Exponential-Fehlergesetz.

In ähnlicher Weise hat *Bessel* in den „Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler“ diese Sache behandelt. („Astr. Nachrichten“ 15. Band Nr. 358 und 359 vom Oktober 1838, S. 369 u. ff.)

In der „Gradmessung in Ostpreussen“ hat *Bessel* eine von *Gauss* unberücksichtigt gelassene Aufgabe, nämlich die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, gelöst und auf die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit unvollständigen Richtungsbeobachtungen angewendet. Auf Gewichts- und Fehlerberechnungen wurde hiebei nicht eingegangen.

Die zwei ersten Lehrbücher der Methode der kleinsten Quadrate sind: „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von *G. Hagen*, Königlich Preussischem Geheimem Oberbaurat, Berlin 1837 (s. o.), und „Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate in ihren Anwendungen für geodätische Aufgaben“ von *Christian Ludwig Gerling*, Hamburg und Gotha, 1843.

Gerling, ein unmittelbarer Schüler von *Gauss*, hat durch dieses Buch, mit seiner populären Darstellungsweise, die neue Wissenschaft den praktischen Feldmessern zugänglich gemacht.

Seit jener Zeit haben namentlich *Hansen*, *Andrae*, *Helmert*, *Schreiber* die Methode der kleinsten Quadrate und deren geodätische Anwendungen gefördert.

Kapitel I.

Allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme.

§ 2. Erklärungen.

Wer sich mit Messungen irgend welcher Art beschäftigt, macht dabei die Erfahrung, dass diese Messungen Fehlern ausgesetzt sind. Man hat hauptsächlich zwei Mittel, die Richtigkeit von Messungen zu prüfen: entweder wiederholt man eine Messung unmittelbar und sieht zu, ob man das erste Resultat wieder erhält, oder man misst verschiedene Grössen, welche unter sich in einer bekannten Beziehung stehen, je einmal, und untersucht, ob die Messungsresultate die erwähnte Beziehung zeigen; z. B. man misst die drei Winkel eines ebenen Dreiecks und vergleicht deren Summe mit der theoretischen Summe 180°. Wenn man bei jeder Messung sich eine derartige Probe verschafft, und dieselbe in aller Strenge verfolgt, so wird man zu dem Schluss geführt, dass keine Messung vollkommen fehlerfrei ist. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass

es nicht möglich sei, eine Messung so auszuführen, dass der noch zu fürchtende Fehler so klein ist, dass er für gewisse Zwecke unschädlich bleibt.

Trotz der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen können doch die Fehler gewisse Grenzen nicht übersteigen, sofern der Beobachter die nötige Sorgfalt anwendet. Ist letzteres nicht der Fall, so treten »*grobe Fehler*« auf (z. B. falsches Zählen der ganzen Lattenlagen bei Längenmessungen u. A.). Solche grobe Fehler sollen von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen sein.

Gewisse Messungsfehler wirken immer in demselben Sinn, z. B. das Ausweichen der Messlatten aus der zu messenden Geraden führt immer auf ein zu grosses Messungsresultat. Obgleich die Theorie der Beobachtungsfehler sich auch mit solchen *regelmässigen* oder *einseitig wirkenden* Beobachtungsfehlern zu befassen hat, werden wir doch im Folgenden, sofern nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist, die Annahme machen, dass solche Fehler nicht zu befürchten sind, sondern nur unvermeidliche, unregelmässige Beobachtungsfehler, welche gleichwahrscheinlich positiv oder negativ sind.

Sobald man erkannt hat, dass die *wahren* Werte der beobachteten Grössen in aller Strenge zu bestimmen unmöglich ist, hat man sich ein weniger hohes Ziel zu stecken, nämlich nur die Erreichung der unter gegebenen Umständen *wahrscheinlichsten* Werte der Unbekannten. Je nach der Art der Beobachtung und der Anzahl der angewendeten Probemessungen wird man den wahren Werten der Unbekannten mehr oder weniger nahe kommen, man kann deswegen nach Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte noch die Frage aufwerfen, welche Genauigkeit erzielt worden ist.

Es ist hiernach die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus Beobachtungen, welche in einer das unmittelbare Bedürfnis überschreitenden Anzahl vorhanden sind, und deswegen infolge der unvermeidlichen ihnen anhaftenden Beobachtungsfehler auf Widersprüche führen, diejenigen Resultate zu ziehen, welche die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben (oder die geringsten Fehler fürchten lassen); ferner diejenigen Beträge anzugeben, um welche mutmasslich die gefundenen Resultate von der Wahrheit noch abweichen.

Oder mit anderen Worten:

Die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt sich mit der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern und mit der Bestimmung von mittleren zu fürchtenden Fehlern.

§ 3. Der durchschnittliche Fehler.

Wenn die Fehler mehrerer gleichartiger Beobachtungen bekannt sind, so kann man aus diesen Fehlern (absolut genommen, d. h. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) einen Durchschnittswert bilden, welcher »*durchschnittlicher Fehler*« heisst. Allerdings kennt man die wahren Beobachtungsfehler im allgemeinen ebensowenig als die wahren Werte der beobachteten Grössen, doch hindert dieses nicht, den strengen Begriff des durchschnittlichen Fehlers zu bilden, d. h. wenn $\varDelta_1\ \varDelta_2\ \varDelta_3 \ldots \varDelta_n$ eine Anzahl wahrer Beobachtungsfehler von gleicher Art sind, so ist der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm \varDelta]}{n}, \tag{1}$$

wobei das Zeichen $[\pm \varDelta]$ (wie künftig immer, wenn besondere Andeutung nötig ist) die *absolute* Summe der $\varDelta$ im Gegensatz zu der algebraischen Summe $[\varDelta]$ andeuten soll.

Als Beispiel für die Berechnung des Durchschnittswertes wahrer Fehler nehmen wir folgendes:

Bei der „Gradmessung in Ostpreussen" wurden in 22 Dreiecken alle Winkel gemessen und die Winkelsummen mit den theoretischen Summen 180° + sphär. Excess verglichen. Dabei ergaben sich folgende 22 Widersprüche $\varDelta = \alpha + \beta + \gamma - (180° + \varepsilon)$:

1.	+ 0,36″	9.	+ 0,56″	17.	+ 1,62″
2.	+ 0,93	10.	0,00	18.	+ 1,62
3.	— 0,51	11.	— 0,59	19.	+ 1,67
4.	— 1,46	12.	0,00	20.	— 0,72
5.	— 0,95	13.	— 1,36	21.	— 1,35
6.	— 1,40	14.	+ 1,86	22.	— 0,98
7.	+ 1,76	15.	— 0,42		7,96
8.	+ 0,92	16.	+ 1,68		6,47
	8,29		6,47		8,29
				Summe	22,72″

$$\text{Durchschnitt} = \frac{22{,}72''}{22} = 1{,}03''.$$

Betrachtet man nun die Winkelsumme eines Dreiecks als Messungsgrösse, so hat man den durchschnittlichen Fehler derselben hiemit bestimmt $= \pm\, 1{,}03''$, und dieser Wert als durchschnittlicher Dreiecksfehler hat immer ein gewisses Interesse, dagegen wurde der durchschnittliche Fehler eines einzelnen Dreieckswinkels hiebei nicht gefunden.

Ebenso wie diese Dreiecksschlussfehler haben auch die Wiederholungsdifferenzen, welche man z. B. beim Hin- und Her-Nivellieren gleichlanger Strecken und in anderen Fällen erhält, den Charakter wahrer Beobachtungsfehler, und können zur Berechnung durchschnittlicher Fehler benützt werden.

Zur genäherten Bestimmung eines durchschnittlichen Fehlers kann das arithmetische Mittel dienen.

Wenn man nämlich eine grosse Anzahl gleichartiger Messungen hat, so kann man deren arithmetisches Mittel als verhältnismässig sehr genau betrachten, und die Differenzen zwischen diesem Mittel und den einzelnen Beobachtungswerten zur Berechnung des durchschnittlichen Fehlers benützen.

Dieses giebt folgende Formeln:

Beobachtungen: $l_1\; l_2\; l_3 \;.\;.\;.\; l_n$

Arithmetisches Mittel: $x = \dfrac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n}$

oder mit Annahme der eckigen Klammer als Zeichen für algebraische Summierung (wie immer im folgenden):

$$x = \frac{[l]}{n}$$

Man bildet die Differenzen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \;.\;.\;.\; v_n = x - l_n$$

Gelegentlich bemerkt man, dass die algebraische Summe dieser Differenzen = 0 ist, was als Rechenprobe dienen kann, d. h.

$$[v] = 0$$

Diese Differenzen v behandelt man näherungsweise wie wahre Beobachtungsfehler $\varDelta$, d. h. man berechnet nach Anleitung der Gleichung (1) den durchschnittlichen Fehler:

$$t = \frac{[\pm v]}{n}$$

Beispiel. Ein Winkel ist 5mal unabhängig gemessen worden:

	Beobachtungen l	Differenzen v	Probe
	35° 26′ 16″	+ 2,8″	
	20″	— 1,2	
	18″	+ 0,8	$[+v] = +7,4$
	25″	— 6,2	$[-v] = -7,4$
	15″	+ 3,8	$[v] = 0$
	Summen: 94″	14,8″	
Mittel	$x = 35° 26' 18,8''$	$t = 2,96''$.	

Nun wäre es weiter von Wichtigkeit, zu wissen, wie sich die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zur Genauigkeit des arithmetischen Mittels verhält, allein diese und andere hier sich anschliessende Fragen lassen sich auf Grundlage des durchschnittlichen Fehlers, welcher sich zuerst als Genauigkeitsmass dargeboten hat, nicht lösen. Wir müssen deswegen den durchschnittlichen Fehler nun verlassen, werden aber später zu demselben wieder zurückkehren.

§ 4. Der mittlere Fehler.

Nachdem der durchschnittliche Fehler sich als ungeeignet zur Behandlung von Aufgaben der Ausgleichungsrechnung erwiesen hat, machen wir einen Versuch mit einem anderen Mittelwert der Fehler. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \ldots \Delta_n$ vorliegt, so bilden wir daraus einen Mittelwert m nach der Gleichung:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots \Delta_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \tag{1}$$

Wir nennen diesen Mittelwert nach *Gauss* den „mittleren Fehler“ oder „mittleren zu fürchtenden Fehler“ (error medius metuendus).

Der mittlere Fehler bietet gegenüber dem durchschnittlichen Fehler den Vorteil, dass bei der Summierung $[\Delta\Delta]$, da alle Quadrate positiv sind, keine Unterscheidung der Vorzeichen nötig ist, sowie dass das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt $\pm$ aus der Rechnung hervorgeht. Abgesehen von diesen äusserlichen Unterschieden ist der mittlere Fehler ein besseres Genauigkeitsmass als der durchschnittliche Fehler, weil dabei die grossen Fehler viel mehr ins Gewicht fallen.

Der mittlere Fehler ist im allgemeinen grösser als der durchschnittliche Fehler, und nur, wenn alle Einzelfehler Δ gleich sind, so werden auch der durchschnittliche und der mittlere Fehler einander gleich; dieses lässt sich leicht so einsehen:

$$t = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \qquad m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2}}$$

Es fragt sich, ob

$$t \lesseqgtr m \qquad \text{oder} \qquad t^2 \lesseqgtr m^2$$

$$t^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + 2\Delta_1\Delta_2}{4} \qquad m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{2} = \frac{2\Delta_1^2 + 2\Delta_2^2}{4}$$

$$m^2 - t^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1\Delta_2}{4} = \frac{[\Delta_1 - \Delta_2]^2}{4} \quad \text{d. h. stets positiv.} \tag{2}$$

Bei 2 Elementen Δ_1 und Δ_2 ist also m grösser als t, und dieser Beweis lässt sich auch leicht auf beliebig viele Elemente ausdehnen.

Man kann hier auch noch die Frage stellen, welches Verhältnis zwischen dem mittleren Fehler m und dem durchschnittlichen Fehler t *im Mittel* bestehen wird?

Diese Frage wird später nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit behandelt werden, man kann aber auch schon aus den blossen Definitionen einige Schlüsse auf jenes Verhältnis ziehen:

Bei 2 Fehlern $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ hat man 2 extreme Fälle:

$$1)\quad \varDelta_1 = \varDelta_2 = \varDelta \qquad \text{giebt} \quad t = \varDelta \quad m = \varDelta \quad , \quad \frac{m}{t} = 1$$

$$2)\quad \varDelta_1 = \varDelta \quad , \quad \varDelta_2 = 0 \quad \text{giebt} \quad t = \frac{\varDelta}{2} \quad m = \frac{\varDelta}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{m}{t} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

Im Mittel aus 1) und 2) wird daher:

$$m : t = 1{,}207 : 1$$

Da 2) mit $\varDelta_2 = 0$ jedenfalls ein sehr extremer Fall ist, wird wohl der Mittelwert 1,207 zu klein sein, und in der That wird die spätere Untersuchung ergeben:

$$m : t = 1{,}2533$$

Zur weiteren Vergleichung zwischen dem durchschnittlichen und dem mittleren Fehler betrachten wir folgende zwei Fehler-Reihen:

												Summe	Quadratsumme
I.	5	6	2	7	3	8	10	9	0	3	5	58	402
II.	14	3	0	0	6	20	2	0	2	1	10	58	750

Der durchschnittliche Fehler wird in beiden Fällen gleich, nämlich = 5,8, der mittlere Fehler dagegen wird:

für I. $\sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6{,}34$ für II. $\sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8{,}66$

Der mittlere Fehler lässt die erste Reihe besser erscheinen als die zweite Reihe, und in der That ist eine ziemlich gleiche Fehlerverteilung bis zur Grenze 10 günstiger als das zweimalige Überschreiten dieser Grenze mit 14 und sogar 20, bei II, was durch das dreimalige Vorkommen von 0 nicht aufgewogen wird.

Obgleich man auf diese oder ähnliche Art die Einführung des „mittleren Fehlers“ wohl als zweckmässig darstellen kann, gelingt es doch nicht, diese Wahl eines Genauigkeitsmasses als notwendig nachzuweisen. *Gauss* selbst spricht sich hierüber im 6. Artikel der „theoria combinationis“ (*Gauss*' Werke IV. Band S. 6—7) so aus: (Quodsi quis hanc rationem .... prodit) „Sollte jemand den Einwurf machen, es sei dieser Grundsatz willkürlich, ohne zwingende Notwendigkeit gewählt, so werden wir gerne beistimmen, da diese Frage ihrer Natur nach etwas unbestimmtes enthält, das nur durch ein einigermassen willkürliches Prinzip eingeschränkt werden kann. Die Bestimmung irgend einer Grösse durch eine mit einem mehr oder wenig grossen Fehler behaftete Beobachtung kann nicht unpassend mit einem Spiele verglichen werden, bei dem nur Verluste und keine Gewinne erzielt werden, denn jeder zu fürchtende Fehler ist einem Verlust entsprechend. Der Schaden eines solchen Spieles lässt sich nach dem wahrscheinlichen Verlust berechnen, nämlich aus der Summe der Produkte der einzelnen möglichen Verluste in ihre Wahrscheinlichkeiten. Welchem Verlust aber jeder Beobachtungsfehler gleich zu achten ist, ist durchaus nicht von selbst klar, vielmehr hängt diese Bestimmung einigermassen von unserer Willkür ab. Offenbar ist es nicht erlaubt, einen dem Fehler selbst *gleichen* Verlust anzunehmen, denn wenn positive Fehler als Verluste erschienen, so müssten dann negative Fehler Gewinne darstellen. Die Grösse des Verlustes muss vielmehr durch eine solche Funktion des Fehlers ausgedrückt werden, welche ihrer Natur nach immer positiv ist. Da die Verschiedenheit solcher Funktionen unbegrenzt ist, so scheint es uns am geeignetsten, die *einfachste* Funktion von dieser Eigenschaft zu nehmen, was offenbar das *Quadrat* ist, und hieraus geht das obige Prinzip hervor“ (vgl. hiezu den späteren § 12.).

Indem wir hiernach die Definition des mittleren Fehlers nach der Gleichung (1) festhalten, wenden wir diese Gleichung auf das frühere kleine Beispiel § 3, S. 8 an, mit der Annahme, dass die dort berechneten Abweichungen v den Charakter wahrer Beobachtungsfehler $\varDelta$ haben.

	Beobachtungen	$v = \varDelta$	$v^2 = \varDelta^2$
	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
	20	− 1,2	1,44
	18	+ 0,8	0,64
	25	− 6,2	38,44
	15	+ 3,8	14,44
Summe	94	$[\varDelta] = 0{,}0$	$[\varDelta\varDelta] = 62{,}80$
Mittel	35° 26′ 18,8″		

$$m = \sqrt{\frac{62{,}80}{5}} = \pm 3{,}54'' \tag{3}$$

(vgl. hiezu die genauere Berechnung § 7.). Der mittlere Fehler $m = \pm 3{,}54''$ ist grösser als der auf S. 8 berechnete durchschnittliche Fehler $t = \pm 2{,}96''$, wie es nach der Gleichung (2) sein muss.

Wir dehnen den Begriff des mittleren Fehlers auch auf Funktionen von Beobachtungen aus:

Wenn eine Funktion

$$X = f\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,\ldots)$$

unmittelbar gemessener Grössen $x_1\; x_2\; x_3\; \ldots$ vorliegt, so erzeugen gewisse Fehler $\varDelta_1\; \varDelta_2\; \varDelta_3\; \ldots$ von $x_1\; x_2\; x_3\; \ldots$ einen gewissen Fehler $\varDelta$ von X, und der mittlere Fehler von X, welcher M sein soll, wird ebenso wie bei der Gleichung (1) berechnet durch:

$$M^2 = \frac{[\varDelta\varDelta]}{n}$$

Wie sich hiebei $[\varDelta\varDelta]$ aus den einzelnen $\varDelta_1\; \varDelta_2\; \varDelta_3 \ldots$ zusammensetzt, das hängt von der Natur der Funktion f ab, wie wir im nächsten § weiter behandeln werden.

§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Die Frage, in welcher Weise sich die mittleren Fehler gemessener Grössen auf die hieraus durch Rechnung abgeleiteten Grössen übertragen, muss erledigt sein, ehe weitere Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gelöst werden können. Zum Zweck einer möglichst gründlichen Erörterung behandeln wir zuerst einzelne besondere Fälle dieser Frage, ehe auf deren allgemeine Lösung eingegangen wird.

I. Eine gemessene Grösse x, deren mittlerer Fehler $= \pm m$ ist, wird mit einer constanten (fehlerfreien) Zahl a multipliziert, es handelt sich um den mittleren Fehler M des Produktes

$$X = a\,x \tag{1}$$

Durch die Multiplikation mit a werden auch die der Grösse x anhaftenden Fehler betroffen, man kann also rasch überblicken, dass das Resultat sein wird:

$$M = a\,m \tag{1a}$$

Eine mehr mathematisch eingehende Betrachtung der Sache ist diese:

Wenn $\varDelta'$ $\varDelta''$ $\varDelta'''$ ... $\varDelta^{(n)}$ die bestimmten Fehler verschiedener Messungen der Grösse x sind, so berechnet man daraus die entsprechenden bestimmten Fehler von X, nämlich:

$$a\,(x + \varDelta') - a\,x = a\,\varDelta'$$
$$a\,(x + \varDelta'') - a\,x = a\,\varDelta''$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a\,(x + \varDelta^{(n)}) - a\,x = a\,\varDelta^{(n)}$$

Die Quadratsumme dieser Fehler ist $= (a\,\varDelta')^2 + (a\,\varDelta'')^2 + \ldots + (a\,\varDelta^{(n)})^2$
$= a^2\,(\varDelta'^2 + \varDelta''^2 + \ldots\,\varDelta^{(n)2})$
$= a^2\,[\varDelta\varDelta]$

folglich der mittlere Fehler:

$$M = \sqrt{\frac{a^2\,[\varDelta\varDelta]}{n}} = a\sqrt{\frac{[\varDelta\varDelta]}{n}}$$

Der letzte Wurzel-Ausdruck ist aber der mittlere Fehler m von x, folglich, wie bereits oben angegeben wurde:

$$M = a\,m \tag{1a}$$

II. Zwei von einander unabhängig gemessene Grössen, x_1 und x_2, deren mittlere Fehler bezw. m_1 und m_2 sind, werden addiert; es fragt sich, welches ist der mittlere Fehler M der Summe

$$X = x_1 + x_2 \tag{2}$$

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob einfach zu setzen wäre:

$$M = m_1 + m_2\ (?), \tag{2*}$$

allein sobald man näher auf die Verhältnisse eingeht, so bemerkt man, dass dieses nur dem äussersten Fall der Häufung der Fehler m_1 und m_2 entspricht, während bei unregelmässigen Vorzeichen $\pm$ von m_1 und m_2 auch der Fall der gegenseitigen Tilgung $m_1 - m_2$ berücksichtigt werden muss.

Würde man bei den ersten Potenzen stehen bleiben, d. h. würde man nach § 3. den durchschnittlichen Fehler der Summe x_1 und x_2 bestimmen wollen, so wäre eine einfache Lösung überhaupt nicht zu finden; dagegen führt der Begriff des mittleren Fehlers nach § 4. zu folgender mathematischer Betrachtung:

Die bestimmten Fehler $\varDelta'$ $\varDelta''$ $\varDelta'''$ ..., welche bestimmten Fehlern $\varDelta_1'$ $\varDelta_2'$, $\varDelta_1''$ $\varDelta_2''$ ... entsprechen, lassen sich sofort angeben und quadrieren, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

$$\begin{array}{ll}
\varDelta' = \varDelta_1' + \varDelta_2' & (\varDelta')^2 = (\varDelta_1')^2 + (\varDelta_2')^2 + 2\,\varDelta_1'\,\varDelta_2' \\
\varDelta'' = \varDelta_1'' + \varDelta_2'' & (\varDelta'')^2 = (\varDelta_1'')^2 + (\varDelta_2'')^2 + 2\,\varDelta_1''\,\varDelta_2'' \\
\varDelta''' = \varDelta_1''' + \varDelta_2''' & (\varDelta''')^2 = (\varDelta_1''')^2 + (\varDelta_2''')^2 + 2\,\varDelta_1'''\,\varDelta_2''' \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\varDelta^{(n)} = \varDelta_1^{(n)} + \varDelta_2^{(n)} & (\varDelta^{(n)})^2 = (\varDelta_1^{(n)})^2 + (\varDelta_2^{(n)})^2 + 2\,\varDelta_1^n\,\varDelta_2^n \\
\hline
\text{Quadrat-Summe:} & [\varDelta\varDelta] = [\varDelta_1\varDelta_1] + [\varDelta_2\varDelta_2] + 2\,[\varDelta_1\varDelta_2] \\
\text{Quadrat-Mittel:} & \dfrac{[\varDelta\varDelta]}{n} = \dfrac{[\varDelta_1\varDelta_1]}{n} + \dfrac{[\varDelta_2\varDelta_2]}{n} + 2\,\dfrac{[\varDelta_1\varDelta_2]}{n}
\end{array}$$

Die drei ersten Glieder dieser Gleichung sind die mittleren Fehler-Quadrate von X, von x_1 und von x_2, das letzte Glied $\frac{[\varDelta_1\varDelta_2]}{n}$ ist der Mittelwert von Produkten, welche gleich wahrscheinlich positiv und negativ sind. Dieser Mittelwert, oder der Grenzwert,

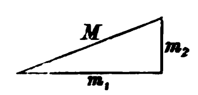
gegen welchen jenes Glied bei wachsendem n convergiert, ist aber = *Null*, weil sich die positiven und die negativen Produkte aufheben. Wir haben also:

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 \quad \text{oder} \quad M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \tag{2a}$$

Wenn es sich in der Gleichung (2) statt um Addition $x_1 + x_2$, um Subtraktion $x_1 - x_2$ handeln würde, so bliebe doch die ganze Betrachtung dieselbe, und wir haben somit den Satz:

Der mittlere Fehler einer Summe oder Differenz zweier unabhängig gemessener Grössen ist gleich der Quadratwurzel aus der Quadratsumme der mittleren Fehler der gemessenen Grössen.

Fig. 1.
Fehlergesetz:
$M^2 = m_1^2 + m_2^2$.



Dieser Satz, welcher nach Fig. 1. äusserliche Ähnlichkeit mit dem Pythagoräischen Satz der Geometrie hat, ist der wichtigste Satz der ganzen Ausgleichungsrechnung.

Die Vergleichung mit dem Pythagoräischen Satz giebt zu erkennen, dass ein kleiner Wert m_2 neben einem verhältnismässig grossen Wert m_1 wenig Einfluss auf M hat, wenn z. B. $m_1 = 10$, $m_2 = 1$, so wird $M = 10{,}5$, während $m_1 + m_2 = 11{,}00$ wäre. Es ist also in der Gleichung (2a) die auch durch die Erfahrung bestätigte Thatsache ausgesprochen, dass kleine Fehler neben grossen fast verschwinden.

Hat man mehr als zwei Grössen, $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$ zu addieren, deren mittlere Fehler $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ gegeben sind, so findet man den mittleren Fehler der Gesamtsumme, indem man zuerst $x_1 + x_2$ nach (2) und (2a) zusammenfasst:

$$X = (x_1 + x_2) + x_3 + \ldots$$

Die wiederholte Anwendung des Satzes (2a) giebt dann:

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots} = \sqrt{[mm]} \tag{2b}$$

Insbesondere, wenn alle $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ einander gleich $= m$ sind, und ihre Anzahl $= n$ ist, so wird

$$M = \sqrt{nm^2} = m\sqrt{n} \tag{2c}$$

Einfache Anwendungen der Sätze (1a) und (2c) hat man bei dem Messen von Linien mit Messlatten:

Wenn eine Messlatte *an sich* den mittleren Fehler m hat, d. h. wenn diese Latte vermutlich um $\pm m$ zu lang oder zu kurz ist, so wird die a malige fehlerlose Anlegung dieser Latte eine Länge ergeben, welche um $\pm am$ unsicher ist.

Wenn dagegen eine Messlatte an sich richtig ist, dagegen n mal an eine Linie so angelegt wird, dass jedes Anlegen mit einem mittleren Fehler $\pm m$ behaftet ist, so wird der Längenmessung nach (2c) ein mittlerer Fehler $m\sqrt{n}$ anhaften.

III. Durch Verbindung und mehrfache Anwendung der soeben ermittelten Gesetze findet man ferner: Wenn eine lineare Funktion

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \ldots$$

unabhängig gemessener Grössen $x_1\ x_2\ x_3 \ldots$, deren mittlere Fehler $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ sind, vorliegt, so erhält man den mittleren Fehler M der Funktion X aus der Gleichung:

$$M = \sqrt{(a_1 m_1)^2 + (a_2 m_2)^2 + (a_3 m_3)^2 + \ldots} \tag{3a}$$

Wenn dabei $m_1 = m_2 = m_3 \ldots = m$ ist, so wird

$$M = m\sqrt{[aa]} \tag{3b}$$

IV. **Endlich kann man durch eine ähnliche Formel den mittleren Fehler irgend einer Funktion gemessener Grössen**

$$X = f(x_1\, x_2\, x_3 \ldots) \tag{4}$$

wenigstens näherungsweise bestimmen. Bezeichnet man nämlich jetzt mit $x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ die wahren Werte der gemessenen Grössen, mit $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ deren mittlere Fehler, und mit $\Delta_1\, \Delta_2\, \Delta_3 \ldots$ bestimmte denselben anhaftende Fehler, so kann man unter der Voraussetzung, dass diese Fehler so klein sind, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können, mit Hilfe des Taylor'schen Satzes den entsprechenden Fehler Δ von x bestimmen, nämlich:

$$\Delta = f(x_1 + \Delta_1,\, x_2 + \Delta_2,\, x_3 + \Delta_3 \ldots) - f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$$

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\Delta_3 + \ldots$$

Durch ähnliche Schlüsse wie die bei I. und II. angewendeten kommt man zu dem Resultat:

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} m_3\right)^2 + \ldots} \tag{4a}$$

wobei die Differentialquotienten mit Hilfe von Näherungswerten der $x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ berechnet werden.

Ein einfaches Beispiel zur Anwendung dieses Satzes (4a) ist folgendes (Fig. 2.):

Fig. 2. Mittlerer Fehler der Seite a.

Ein Punkt P wird gegen eine feste Basis $AB = c$ festgelegt durch Messung der zwei Winkel α und γ, wodurch die Seite $BP = a$ bestimmt wird:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma} \sin\alpha \tag{5}$$

α und γ sind mit mittleren Fehlern δ_α und δ_γ behaftet; es fragt sich, was der mittlere Fehler M_a der Seite a ist. Die Basis c wird dabei als fehlerfrei betrachtet.

Man bildet das totale Differential von (5):

$$d\,a = \frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \gamma} d\gamma$$

$$d\,a = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\, d\alpha - c\sin\alpha \frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma} d\gamma$$

Nun setzt man an Stelle der Differentiale $d\alpha$ und $d\gamma$ die mittleren Fehler $\pm\delta_\alpha$ und $\pm\delta_\gamma$, und hat damit den mittleren Fehler M_a zunächst in unbestimmter Form:

$$\pm M = \pm \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\,\delta_\alpha \pm \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha\,\mathrm{cotg}\,\gamma\,\delta_\gamma$$

oder wegen (5):

$$\pm M_a = a\,\mathrm{cotg}\,\alpha\,\delta_\alpha \pm a\,\mathrm{cotg}\,\gamma\,\delta_\gamma;$$

endlich nach der Regel von (4a):

$$M_a = a\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha\,(\delta_\alpha)^2 + \mathrm{cotg}^2\gamma\,(\delta_\gamma)^2} \tag{6}$$

Wenn beide Winkel α und γ gleich genau gemessen sind, so sei $\delta_\alpha = \delta_\gamma = \delta$, damit wird:

$$M_a = a\,\delta\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha + \mathrm{cotg}^2\gamma}$$

Hiebei ist δ in analytischem Masse verstanden; wenn δ'' der Winkelfehler in Sekunden ist, so wird:

$$\frac{M_a}{a} = \frac{\delta''}{\varrho''}\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha + \mathrm{cotg}^2\gamma}$$

Wir nehmen beispielshalber $\alpha = \gamma = 60°$ und $\delta = 10''$, das giebt

$$\frac{M_a}{a} = \pm 0{,}0000396$$

oder es ist der Fehler M_a etwa $= 0{,}004\,\%$ von a.

Nehmen wir $a = 1000^m$, so ist also $M_a = 0{,}04^m$.

Wenn etwa in dem Dreieck Fig. 1. der dritte Winkel bei B auch gemessen ist, dann lässt sich die Berechnung des mittleren Fehlers der Seite a nicht mehr in so einfacher Weise machen.

§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass keine konstanten oder einseitig wirkenden Fehler vorhanden sind, indessen gilt der Hauptsatz II. des vorigen § 5. über Fehlerfortpflanzung auch dann noch, wenn es sich um Kombination eines unregelmässigen mit einem regelmässigen oder mit einem konstanten Fehler handelt, denn der Mittelwert $\frac{[\Delta_1 \Delta_2]}{n}$, auf welchen es bei II. hauptsächlich ankommt, konvergiert auch dann noch gegen Null, wenn nur Δ_1 *oder* Δ_2 gleichwahrscheinlich positiv und negativ ist.

Als Beispiel hiefür nehmen wir wieder wie im vorigen § 5. S. 12 die Längenmessung mit Messlatten. Eine solche Messung ist nämlich nicht nur mit unregelmässigen Fehlern, sondern auch mit regelmässigen Fehlern behaftet. Solche regelmässige Fehler sind z. B. das Ausweichen aus der Geraden nach links oder rechts, nach oben oder unten. Diese Ausweichungen heben sich durchaus nicht gegenseitig auf, sondern sie geben lauter positive Fehler, d. h. Fehler, welche die Länge zu gross erscheinen lassen.

Bei n maliger Lattenanlage wird man die einseitig wirkenden Fehlerteile $= A\,n$ und die unregelmässig wirkenden Teile $= B\sqrt{n}$ annehmen können, dann ist der mittlere Gesamtfehler:

$$M = \sqrt{(A\,n)^2 + (B\sqrt{n})^2} = \sqrt{A^2 n^2 + B^2 n}.$$

Der Begriff des mittleren Fehlers ist also *nicht* an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden; man kann den mittleren Fehler auch als Genauigkeitsmass für solche Messungen benützen, bei welchen einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein mittlerer Fehler, welcher constante Teile enthält, im allgemeinen nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.

Es ist ein oft gehörter Einwurf gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf gewisse Messungen, dass diese Messungen einseitige Fehler enthalten, und dass deswegen die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen *überhaupt* nicht anzuwenden sei.

Dem ist entgegenzuhalten, dass gerade die Methode der kleinsten Quadrate die feinsten Mittel darbietet, um einseitig wirkende oder unbekannte Fehler aufzufinden, und dann die Ausgleichung mit Rücksicht auf solche Fehlerquellen zu behandeln.

§ 7. Das einfache arithmetische Mittel.

Man nimmt als wahrscheinlichsten Wert einer Unbekannten, welche in gleichartiger Weise wiederholt beobachtet ist, das einfache arithmetische Mittel der Be-

obachtungsresultate. Einen strengen Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens giebt es nicht, wir nehmen dasselbe deshalb ohne Beweis als niemals angefochtene Grundlage unserer folgenden Betrachtungen.

Zur Bestimmung der Unbekannten x liegen n gleichartige Beobachtungen vor:

$$l_1 \; l_2 \; l_3 \; . \; . \; . \; l_n$$

Der wahrscheinlichste Wert ist das arithmetische Mittel

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \tag{1}$$

Insofern man das arithmetische Mittel x als nahezu übereinstimmend mit dem wahren Wert der Unbekannten betrachtet, bildet man die Differenzen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ v_3 = x - l_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_n = x - l_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

deren Summe wegen (1) gleich Null ist, d. h.:

$$[v] = 0. \tag{3}$$

Durch Quadrierung der Abweichungen v findet man den mittleren Fehler einer Beobachtung nach (1) § 4. S. 8 näherungsweise durch die Formel:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} \; (?) \tag{4}$$

Sobald man diesen Wert hat, kann man auch den mittleren Fehler M des arithmetischen Mittels selbst finden nach Anleitung des Satzes über Fehlerhäufung (3a) § 5. S. 12, denn es ist x vermöge (1) eine lineare Funktion der beobachteten Grössen l, denen sämtlich der mittlere Fehler m zukommt, wie sich noch deutlicher zeigt, wenn man die Gleichung (1) auseinanderzieht, und so schreibt:

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \ldots \frac{1}{n} l_n \tag{5}$$

Hieraus ergiebt sich nach (3a) S. 12:

$$M = \sqrt{\left(\frac{1}{n} m\right)^2 + \left(\frac{1}{n} m\right)^2 + \left(\frac{1}{n} m\right)^2 + \ldots \left(\frac{1}{n} m\right)^2}$$

Die Anzahl der Glieder unter der Wurzel ist n, folglich:

$$M = \sqrt{n \left(\frac{1}{n} m\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2}{n}}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

Die Formel (4) giebt, wie schon erwähnt, nur einen genäherten Wert für m, weil die Abweichungen v nicht die wahren, sondern nur die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler sind. Obgleich die letzteren immer unbekannt bleiben, lässt sich doch die Bestimmung m noch verbessern. Bezeichnet man mit X den wahren Wert der Unbekannten, mit $\varDelta$ die wahren Beobachtungsfehler im Gegensatz zu den wahrscheinlichsten Beobachtungsfehlern v, so bestehen die Gleichungen:

$$\varDelta_1 = X - l_1 \qquad v_1 = x - l_1 \qquad \text{also } \varDelta_1 = v_1 + (X - x) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1^2 &= v_1^2 + (X-x)^2 + 2 v_1 (X-x) \\
\Delta_2^2 &= v_2^2 + (X-x)^2 + 2 v_2 (X-x) \\
\Delta_3^2 &= v_3^2 + (X-x)^2 + 2 v_3 (X-x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\text{Summe } [\Delta\Delta] &= [v v] + n (X-x)^2 + 2 [v] (X-x)
\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (3) fällt das letzte Glied fort, und wenn man in dem vorletzten Glied die Annahme macht, dass die Abweichung des wahren Wertes X der Unbekannten von dem arithmetischen Mittel x gleich dem mittleren zu fürchtenden Fehler M des Mittels selbst zu setzen ist, also nach (6):

$$(X-x)^2 = M^2 = \frac{m^2}{n}$$

so erhält man aus (8):

$$[\Delta\Delta] = [v v] + m^2 \tag{9}$$

und da nach der strengen Definition des mittleren Fehlers die Gleichung gilt:

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = m^2 \tag{10}$$

so findet man durch Einsetzen von (10) in (9) eine Gleichung, welche man nach m^2 auflösen kann, so dass man erhält:

$$m^2 = \frac{[v v]}{n-1} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{[v v]}{n-1}}, \tag{11}$$

eine Formel, welche an Stelle von (4) zu treten hat.

Der Wert m der Formel (11) ist in den Ausdruck (6) für M zu substituieren, also:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v v]}{n(n-1)}} \tag{12}$$

Die Formel (11) erscheint bei näherer Betrachtung sehr zweckmässig, denn sie giebt mit $n = 1$ den unbestimmten Wert $m = \frac{0}{0}$, während (4) in diesem Falle $m = 0$ geben würde. Wenn nur *eine* Beobachtung vorliegt, so kann aus dieser in Betreff der Genauigkeit Nichts geschlossen werden, und im übrigen sagt die Gleichung (11), dass nach Abzug der ersten Beobachtung nur die $n-1$ übrigen zur Genauigkeitsschätzung Beiträge geben. Wir nehmen das Beispiel von S. 10 nochmals vor:

Beobachtungen	l	v	v^2
1.	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
2.	20	— 1,2	1,44
3.	18	+ 0,8	0,64
4.	25	— 6,2	38,44
5.	15	+ 3,8	14,44
Summe	94	0,0	62,80 = $[v v]$

(13)

Mittel = 35° 26′ 18,8″.

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{62{,}80}{4}} = \pm 3{,}96'' \tag{14}$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

$$M = \sqrt{\frac{62{,}80}{4 \times 5}} = \frac{\pm 3{,}96}{\sqrt{5}} = \pm 1{,}77'' \tag{15}$$

Man schreibt daher das Mittel selbst so:

$$x = 35^\circ\ 26'\ 18{,}8'' \pm 1{,}77'' \qquad (16)$$

Das Resultat $m = \pm 3{,}96''$ nach (14) ist nun besser bestimmt als der schon früher bei (3) § 4. S. 10 vorläufig gefundene Wert $m = \pm 3{,}54''$.

Wir wollen hiezu noch ein zweites, grösseres Zahlenbeispiel nehmen, das wir auch später wieder in anderer Weise benützen werden:

In der „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 78 giebt *Bessel* 18 unabhängige Messungen für den Winkel Mednicken-Fuchsberg auf der Station Trenk, wie folgende Zusammenstellung zeigt, welche zugleich die Fehlerberechnung enthält.

Nr.	Beobachtung l	v	v^2
1	83° 30′ 36,25″	— 1,38″	1,90
2	7,50	— 2,63	6,92
3	6,00	— 1,13	1,28
4	4,77	+ 0,10	0,01
5	3,75	+ 1,12	1,25
6	0,25	+ 4,62	21,34
7	3,70	+ 1,17	1,37
8	6,14	— 1,27	1,61
9	4,04	+ 0,83	0,69
10	6,96	— 2,09	4,37
11	3,16	+ 1,71	2,92
12	4,57	+ 0,30	0,09
13	4,75	+ 0,12	0,01
14	6,50	— 1,63	2,66
15	5,00	— 0,13	0,02
16	4,75	+ 0,12	0,01
17	4,25	+ 0,62	0,38
18	5,25	— 0,38	0,14
Summe	87,59	+ 10,71	46,97
Mittel	83° 30′ 34,87″	— 10,64	= $[v\,v]$

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}} = \sqrt{\frac{46{,}97}{17}} = \pm 1{,}66''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels: (17)

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}66}{\sqrt{18}} = \pm 0{,}39''$$

Hauptresultat $= 83^\circ\ 30'\ 34{,}87'' \pm 0{,}39''$.

Die oben S. 15 gefundene Gleichung (6) ist in mehr als einer Hinsicht sehr wichtig, sie sagt in Worten, dass der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels sich im Verhältnis der *Quadratwurzel* der Anzahl der Messungen verkleinert. Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes kann man M als Ordinate zur Abscisse n auftragen, wobei

man eine hyperbelartige Kurve dritten Grades erhält, welche in Fig. 3. dargestellt ist. Die Zahlenwerte hiefür sind:

$n =$	1	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
$\frac{1}{\sqrt{n}} =$	1,00	0,71	0,58	0,50	0,45	0,41	0,35	0,32	0,22	0,14	0,10

(18)

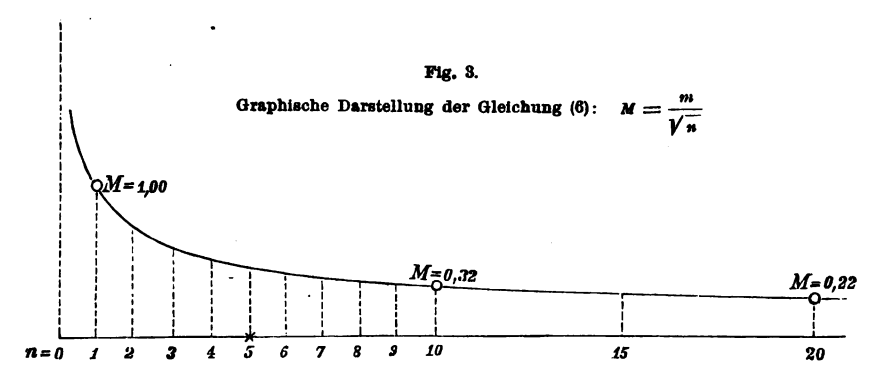


Fig. 3.
Graphische Darstellung der Gleichung (6): $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$

Die Kurve läuft asymptotisch aus, d. h. der mittlere Fehler M nähert sich unbegrenzt der Null, ohne sie selbst je zu erreichen. Die ersten 5—10 Wiederholungen geben rasch eine Abnahme von M, d. h. eine Genauigkeitssteigerung; dann aber hat weiteres Wiederholen wenig Erfolg, und um den mittleren Fehler *einer* ersten Messung auf ein Zehntel seines Wertes herunter zu bringen, müsste man 100 Wiederholungen machen.

Das thut man aber gewöhnlich nicht; eine und dieselbe Messung pflegt man höchstens 5—10 mal zu wiederholen, und zwar nicht bloss deswegen, weil von da an der Wert M nur noch langsam abnimmt, sondern aus einem noch viel wichtigeren Grund: die Gleichung (6) und die darnach berechneten Zahlenwerte (18), nebst der Kurve Fig. 3., setzen nämlich voraus, dass die Messungen *nur* mit unregelmässigen, positiv oder negativ gleich wahrscheinlichen Fehlern behaftet seien, und dieses ist in Wirklichkeit fast nie der Fall. Im Gegenteil, je feiner die Messungen werden und je öfter man sie wiederholt, desto mehr kommt man zu der Überzeugung, dass fast überall konstante Fehlerquellen einwirken. Man soll daher bei Wiederholungen auch die Nebenumstände möglichst abändern, z. B. bei Winkelmessungen nach und nach verschiedene Striche der Kreisteilung benützen u. s. w.

Zur theoretischen Anwendung im folgenden § 8. betrachten wir nochmals die wichtige Gleichung (6) in anderer Hinsicht:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{oder} \qquad M^2 = \frac{m^2}{n} \tag{6}$$

Es folgt hieraus, dass man das arithmetische Mittel als Resultat *einer* Beobachtung betrachten kann, deren mittlerer Fehler M ist; es ist also das Genauigkeitsverhältnis dieser fingierten Beobachtung und einer ursprünglichen Beobachtung durch die Werte M und m festgestellt.

Dieses führt zu dem Begriff des *Gewichtes*.

Das Verhältnis von M^2 zu m^2 ist bestimmt durch die Zahl n, welche angiebt, wie viele Beobachtungen der einen Art in ein arithmetisches Mittel vereinigt werden müssen, damit dieses die Genauigkeit einer Beobachtung der anderen Art hat. n heisst in diesem Falle das *Gewicht* der letzteren Beobachtung (wobei man das Gewicht einer Beobachtung der ersteren Art $= 1$ setzt).

§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel.

Wenn zur Bestimmung einer Unbekannten mehrere *ungleichwertige* Beobachtungen vorliegen, d. h. solche, denen von vorn herein nicht gleiche Genauigkeit zuzuschreiben ist, so ist das im vorigen § 7. behandelte einfache arithmetische Mittel nicht der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten. Wie in diesem Falle zu verfahren ist, wird folgende Beobachtung zeigen:

Wenn n gleich genaue Beobachtungen vorliegen, aus denen ein Mittel gebildet werden soll, so kann man dieselben zuerst in einzelne Gruppen teilen, z. B. so:

$$\left.\begin{array}{l} l_1'\ l_1''\ l_1''' \ldots \text{Anzahl} = p_1 \\ l_2'\ l_2''\ l_2''' \ldots \text{Anzahl} = p_2 \\ l_3'\ l_3''\ l_3''' \ldots \text{Anzahl} = p_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} p_1 + p_2 + p_3 \ldots = [p]$$

Dann kann man aus jeder einzelnen Gruppe ein Mittel bilden:

$$l_1 = \frac{l_1' + l_1'' + l_1''' + \ldots}{p_1}$$

$$l_2 = \frac{l_2' + l_2'' + l_2''' + \ldots}{p_2}$$

$$l_3 = \frac{l_3' + l_3'' + l_3''' + \ldots}{p_3}$$

Hat man diese Partialmittel $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$, so kann man aus ihnen auch das Gesamtmittel der ursprünglichen Beobachtungen ableiten, nämlich:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots} = \frac{l_1' + l_1'' + l_1''' \ldots + l_2' + l_2'' \ldots + l_3' + \ldots}{[p]} \qquad (1)$$

Wenn nun die $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ unmittelbare Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit wären, so müsste man ebenso verfahren, nachdem man zuvor diejenigen Zahlen p ermittelt hätte, welche den einzelnen Genauigkeiten entsprechen, und dieses wird erreicht, wenn man für p die Gewichte nach der am Ende des vorigen § 7. S. 18—19 gegebenen Definition nimmt.

Da übrigens der Wert von l in (1) nicht verändert wird, wenn man alle Gewichte p mit einer beliebigen Zahl multipliziert, so folgt, dass es zur Lösung der vorliegenden Aufgabe genügt, wenn solche Gewichte p benützt werden, welche den früher als Gewichte definierten Zahlen *proportional* sind, und wir werden deswegen künftig allgemein die Gewichte nur als Verhältniszahlen auffassen.

Wir wollen die in (6) § 7. bewiesene Gleichung

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

in welcher n als Gewicht auftritt, auf 2 Fälle mit $n = p$ und $n = p'$ anwenden:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \qquad M' = \frac{m}{\sqrt{p'}} \quad , \quad m = M\sqrt{p} = M'\sqrt{p'}$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Wenn M M' die mittleren Fehler, und p p' die Gewichte zweier Beobachtungen sind, so ist

$$\frac{p}{p'} = \frac{M'^2}{M^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{M}{M'} \; \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \tag{2}$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler, oder die mittleren Fehler verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Gewichte.

Den Sätzen des § 5. über mittlere Fehler entsprechen nun andere Sätze über Gewichte: Wenn eine Funktion vorliegt:

$$X = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots$$

und p_1 p_2 p_3 . . . die Gewichte von x_1 x_2 x_3 . . . sind, so findet sich das Gewicht P von X aus der Gleichung (3a) § 5. S. 12, wenn dort $M^2 = \frac{1}{P}$, $m_1^2 = \frac{1}{p_1}$ u. s. w. gesetzt wird, wodurch man erhält:

$$\frac{1}{P} = \frac{a_1^2}{p_1} + \frac{a_2^2}{p_2} + \frac{a_3^2}{p_3} + \ldots = \left[\frac{a\,a}{p}\right] \tag{3}$$

Ein dem Begriff *Gewicht* verwandter Begriff ist der der *Genauigkeit;* bei abnehmendem mittlerem Fehler wächst sowohl das Gewicht als die Genauigkeit, jedoch in verschiedenem Mass. Während das Gewicht umgekehrt proportional dem *Quadrat* des mittleren Fehlers ist, verstehen wir unter Genauigkeit eine Grösse, welche umgekehrt proportional dem mittleren Fehler selbst ist. Übrigens ist kein Bedürfnis vorhanden, besondere Genauigkeits*zahlen* in unsern Rechnungen einzuführen.

In welcher Weise die Gewichte ermittelt werden, lässt sich nicht allgemein angeben. Am einfachsten ist die Bestimmung der Gewichte, wenn man es nicht mit unmittelbaren Beobachtungen, sondern, entsprechend der Untersuchung am Anfang dieses §, mit arithmetischen Mitteln aus einzelnen Beobachtungsgruppen zu thun hat, was zuweilen vorkommt. Wenn man z. B. bei einer Triangulierung jeden Winkel mehr als einmal unabhängig misst (jedoch nicht alle Winkel gleich oft wiederholt), so kann man die Wiederholungszahlen unmittelbar als Gewichte benützen.

Wenn die mittleren Fehler m von Beobachtungen bekannt sind, so kann man daraus die Gewichte berechnen nach der Formel

$$p = \frac{1}{m^2} \qquad \text{oder} \qquad p = \frac{k}{m^2}$$

wobei k eine *beliebige* Zahl ist. Häufig ist man bei der Gewichtsbestimmung nur auf Schätzung angewiesen, und in diesem Falle ist es besser, zuerst die mittleren Fehler zu schätzen und dann die Gewichte zu berechnen, als sofort die Gewichte zu schätzen, weil die letzteren weniger anschaulich sind.

Zur Erleichterung der Gewichtsberechnung aus gegebenen mittleren Fehlern kann die Hilfstafel auf S. [7] des Anhangs benützt werden.

Nachdem die Bedeutung der Gewichte p in der Gleichung (1) erklärt ist, giebt sich alles Weitere ähnlich wie beim einfachen arithmetischen Mittel. Wir haben bis jetzt folgendes:

Gegeben die Beobachtungen: l_1 l_2 l_3 . . . l_n
mit den Gewichten: p_1 p_2 p_3 . . . p_n

Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten ist das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{4}$$

Indem man x als nahezu übereinstimmend mit dem wahren Wert X ansieht, bildet man wie früher die Differenzen:

$$\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ v_3 &= x - l_3 \\ &\dots\dots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen bezw. mit $p_1\ p_2\ p_3 \dots p_n$ multipliziert und sie dann addiert, so erhält man wegen (4):

$$[p v] = 0 \tag{5}$$

Man kann nun bereits das Verhältnis des mittleren Fehlers M von x zu dem mittleren Gewichtseinheits-Fehler m bestimmen mit Hilfe des allgemeinen Fehlerfortpflanzungssatzes (3a) § 5. Es ist nämlich nach (4) x eine lineare Funktion der Beobachtungen l, welche man, anders geordnet, so schreiben kann:

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \dots \frac{p_n}{[p]} l_n \tag{6}$$

Die mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \dots$ sind insofern bekannt, als sie zu dem Gewichtseinheits-Fehler m durch die Proportionen (2) in Beziehung gebracht sind; d. h. die mittleren Fehler der einzelnen $l_1\ l_2\ l_3 \dots$ sind:

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}} \quad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \quad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \dots \frac{m}{\sqrt{p_n}}$$

und wenn man nun den Fehlerfortpflanzungssatz anwendet, so erhält man:

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_3}}\right)^2 + \dots$$

$$M^2 = \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \left((\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + (\sqrt{p_3})^2 + \dots\right)$$

$$M^2 = m^2 \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots}{[p]^2} = m^2 \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{7}$$

Wenn man vorerst voraussetzt, es seien die wahren Beobachtungsfehler $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \dots \Delta_n$ bekannt, so lässt sich eine Formel für den mittleren Fehler m einer Beobachtung vom Gewicht 1 aufstellen. Wenn nämlich die Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \dots l_n$ nicht die Gewichte $p_1\ p_2\ p_3 \dots p_n$, sondern sämtlich das Gewicht 1 hätten, so würden vermutlich nicht die Fehler $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \dots \Delta_n$ eingetreten sein, sondern gewisse andere Fehler, nach dem Gesetze der Proportionen (2):

$$\Delta_1 \sqrt{p_1} \quad \Delta_2 \sqrt{p_2} \quad \Delta_3 \sqrt{p_3} \dots \Delta_n \sqrt{p_n}$$

Da diese Grössen als Fehler *gleichartiger* Beobachtungen angesehen werden können, so berechnet man daraus den Wert m durch einfache Quadrierung, nämlich:

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 p_1 + \Delta_2^2 p_2 + \Delta_3^2 p_3 + \dots \Delta_n^2 p_n}{n} = \frac{[p \Delta \Delta]}{n} \tag{8}$$

Es bleibt nun nur noch übrig, die Δ durch v zu ersetzen. Ähnlich wie beim einfachen Mittel hat man

$$\Delta = v + X - x$$

$$p \Delta^2 = p v^2 + p (X - x)^2 + 2 p v (X - x)$$

Indem man eine solche Gleichung für jeden der vorhandenen n Fälle aufstellt und die Summe bildet, erhält man

$$[p\Delta\Delta] = [p v v] + [p](X-x)^2 + 2[p v](X-x)$$

Es ist aber hier das letzte Glied wegen (5) gleich Null, also:

$$[p\Delta\Delta] = [p v v] + [p](X-x)^2 \tag{9}$$

Was $X-x$ betrifft, so kann man diese Differenz gleich dem mittleren Fehler M des Resultats x setzen, d. h. nach (7):

$$(X-x)^2 = \frac{m^2}{[p]}$$

womit (9) giebt:

$$[p\Delta\Delta] = [p v v] + m^2$$

Schaut man nach (8) zurück, so erhält man:

$$m^2 = \frac{[p v v]}{n} + \frac{m^2}{n}$$

Dieses ist eine Gleichung, welche nach m^2 aufgelöst werden kann, und giebt:

$$m^2 = \frac{[p v v]}{n-1} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n-1}} \tag{10}$$

folglich nach (7):

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[p v v]}{[p](n-1)}} \tag{11}$$

Zugleich bemerkt man, dass die Proportion besteht:

$$\frac{M}{m} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{[p]}} \tag{12}$$

was eine Gleichung von der Form (2) ist; und deshalb nennt man den Wert $[p]$ das Gewicht des arithmetischen Mittels x, und schreibt hiefür

$$P_x = [p] \tag{12a}$$

Zu einem Zahlenbeispiel nehmen wir die trigonometrische Höhenbestimmung eines Punktes, rückwärts aus 6 gegebenen Punkten der Landesaufnahme. Diese 6 Punkte mit ihren unabänderlich gegebenen Höhen über *N. N.* und mit den Entfernungen von dem neuen Punkte P sind in folgender Tabelle gegeben, welche sofort auch die gemessenen Höhenunterschiede h und deren Zusammensetzung mit den gegebenen Höhen enthält:

Punkt	Entfernung von P a	Gegebene Höhen über *N. N.*	Gemessene Höhenunterschiede h	Berechnete Höhen von P über *N. N.*
A	2010^m	1043,64^m	— 314,73^m	728,91^m
B	8903	619,02	+ 109,20	728,22
C	5820	480,81	+ 248,24	729,05
D	3002	1247,01	— 518,43	728,58
E	6197	928,18	— 199,16	729,02
F	5800	418,71	+ 310,13	728,84
			(*Einfaches* Mittel	728,77^m)

(13)

Das einfache arithmetische Mittel der 6 unabhängigen Höhenbestimmungen wäre 728,77^m; dieses *einfache* Mittel dürfen wir aber nicht als Resultat annehmen, weil bei der Ungleichheit der Entfernungen a die 6 Höhenbestimmungen nicht gleichwertig sind.

Ein einzelner Höhenunterschied h wird bestimmt nach der Formel:

$$h = a \, tang \, \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2$$

wo $\frac{1-k}{2r} a^2$ die Korrektion für Erdkrümmung und Refraktion ist.

Sehen wir bei den kurzen Entfernungen a von den Refraktionsfehlern ab, so bleibt als Hauptfehlerquelle nur der Messungsfehler des Höhenwinkels α, welcher den Höhenfehler giebt:

$$dh = a \frac{d \, tang \alpha}{d \alpha} d \alpha = a \frac{d \alpha}{cos^2 \alpha} \tag{14}$$

Der Höhen- oder Tiefenwinkel α ist meist so klein, dass $cos^2 \alpha = 1$ gesetzt werden kann, und indem wir auch noch die verschiedenen Höhenwinkel als *gleich* genau gemessen annehmen, sowie auch die gegebenen Höhen über *N. N.* als fehlerfrei behandeln, finden wir aus (14), dass der mittlere Fehler einer Höhenbestimmung proportional der Entfernung a ist; folglich ist das Gewicht einer solchen Höhenbestimmung proportional $\frac{1}{a^2}$.

Die Masseinheit ist hiebei beliebig, wir nehmen a in Kilometern, und zwar abgerundet nach (13):

$a =$ 2,0 8,9 5,8 3,0 6,2 5,8 km

Die Hilfstafel S. [7] des Anhangs giebt, ebenfalls abgerundet:

$$p = \frac{1}{a^2} = 0,25 \quad 0,01 \quad 0,03 \quad 0,11 \quad 0,03 \quad 0,03 \tag{15}$$

Wir haben absichtlich ziemlich stark abgerundet, weil es keinen praktischen Wert hat, in solchen Fällen, wo die Gewichtsbemessung selbst auf gewissen, nicht strengen Annahmen beruht, mit vielen Dezimalen zu rechnen.

Mit den Höhen von (13) und den Gewichten (15) erhalten wir nun folgende Berechnung, welche den Formeln (4) (10) und (12) folgt:

l	p	$p\,l$	$v = 0,83 - l$	v^2	$p\,v^2$
728 + 0,91	0,25	0,2275	− 0,08	0,0064	0,0016
+ 0,22	0,01	0,0022	+ 0,61	0,3721	0,0037
+ 1,05	0,03	0,0315	− 0,22	0,0484	0,0015
+ 0,58	0,11	0,0638	+ 0,25	0,0625	0,0070
+ 1,02	0,03	0,0306	− 0,19	0,0361	0,0011
+ 0,84	0,03	0,0252	− 0,01	0,0001	0,0000
	= 0,46	0,3808			0,0149

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{0,3808}{0,46} = 0,83$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,0149}{5}} = \pm\, 0,055^m \tag{16}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,055}{\sqrt{0,46}} = \pm\, 0,080^m$$

Also im ganzen: $H = 728^m + x = 728,83^m$

mit dem mittleren Fehler: $\pm\, 0,08^m$

Ausser diesem Hauptresultat haben wir noch, wie meistens bei solchen Ausgleichungen mit Gewichten, ein Nebenresultat in dem mittleren Fehler m der Gewichts-

einheit. Derselbe ist nach (16) $m = \pm 0{,}055^m$. Die Gewichtseinheit entspricht einer Entfernung $a = 1000^m$, es ist also der zu m gehörige Höhenwinkelfehler:

$$\delta = \frac{m}{a}\,\varrho = \frac{0{,}055}{1000}\,\varrho = \pm 11''$$

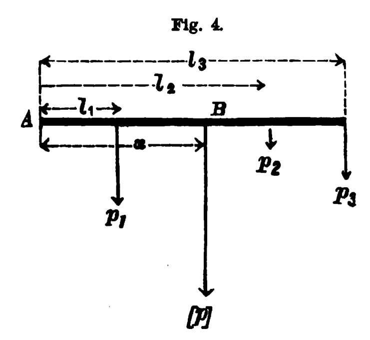
Dieses mag den wirklichen Verhältnissen entsprechen, indem die Höhenwinkel mit einem gewöhnlichen Theodolit gemessen sind, dessen Höhenkreis nur 20″ unmittelbar abzulesen gestattete.

Zugleich ist damit bewiesen, dass die als fehlerfrei vorausgesetzten Höhen der 6 Punkte A B C D E F der Landesaufnahme dieser Voraussetzung nahezu genügten.

Anhang zu § 8.

Die in § 8. behandelten Formeln gestatten zum Teil einfache mechanische Deutungen.

Fig. 4.



Denkt man sich nach Fig. 4. verschiedene Gewichte $p_1\ p_2\ p_3 \ldots$ an einer Drehachse A mit Hebelsarmen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ wirkend, so sind die statischen Momente dieser Gewichte bezw. $p_1 l_1\ p_2 l_2\ p_3 l_3 \ldots$, und die Gleichung

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

liefert denjenigen Hebelsarm x, welcher, mit der Summe aller Gewichte $[p]$ belastet, dasselbe statische Moment giebt, wie die Summe der Einzelmomente.

Denkt man sich nun die Drehachse von A um den Betrag x nach B verschoben, dann haben die Gewichte $p_1\ p_2\ p_3$ in Bezug auf die neue Achse B die Hebelsarme $v_1\ v_2\ v_3$, wobei

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3$$

und es ist

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 v_3 = [p\,v] = 0$$

oder es ist B der Schwerpunkt eines den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3$ entsprechenden Massensystems.

Auch die Summe $[p\,v\,v]$ hat eine mechanische Deutung; es ist dieses das Trägheitsmoment des soeben erwähnten Massensystems in Bezug auf die Achse B, und die Bedingung $[p\,v\,v] =$ Minimum, welche den Mittelwert x im Sinne der Ausgleichungsrechnung bestimmt, heisst im Sinne der Mechanik, es soll B eine Achse kleinsten Trägheitsmomentes sein.

§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen.

Wenn zwei gleich genaue Beobachtungen vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, so hat man nach § 7. zu rechnen, und findet sofort:

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,d \tag{1}$$

Mittlerer Fehler des Mittels:

$$M = \frac{d}{2} = 0{,}500\,d \tag{2}$$

Wenn zwei ungleichartige Beobachtungen mit den Gewichten p und q vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, indem etwa die erste den Wert l und die zweite den Wert $l + d$ geliefert hat, so wird das Mittel:

$$x = \frac{p\,l + q\,(l + d)}{p + q} = l + \frac{q}{p + q}\,d \tag{3}$$

Die Abweichungen vom Mittel werden:

$$v_1 = + \frac{q}{p + q}\,d \qquad v_2 = - \frac{p}{p + q}\,d \tag{4}$$

und es besteht (ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) das Verhältnis:

$$v_1 : v_2 = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} \tag{5}$$

d. h. der Widerspruch d wird auf die beiden Beobachtungen umgekehrt proportional den Gewichten verteilt. Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird nach (10) § 8. S. 22:

$$m = \sqrt{\frac{p\,v_1^2 + q\,v_2^2}{2 - 1}} = d\sqrt{\frac{p\,q}{p + q}} \tag{6}$$

und der mittlere Fehler des Mittels selbst nach (11) § 8, S. 22:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p + q}} = \frac{d}{p + q}\sqrt{p\,q} \tag{7}$$

Die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2 der beiden Beobachtungen *vor* der Ausgleichung sind:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p}} \quad , \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{q}} \tag{8}$$

Es besteht also das Verhältnis:

$$m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{q}} \tag{9}$$

Wir wollen hieran einige Betrachtungen anknüpfen, welche nach unseren Erfahrungen dem Anfänger in der Methode der kleinen Quadrate zur Vermeidung von Missverständnissen nützlich sind:

Bei einer ersten Betrachtung scheint die Gleichung (9) und die Gleichung (5) nicht gut vereinbar. Die Verbesserungen $v_1\ v_2$, welche man schliesslich den Messungen zuteilt, haben ein anderes Verhältnis als die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2, welche man den Messungen von vornherein zugeschrieben hat. Man hat sich hier nach § 5. (2*) und (2a) S. 11 und 12 zu erinnern, dass der Widerspruch d entstanden ist als die Differenz zweier Beobachtungen, deren *mittlere* zu fürchtende Fehler $\pm m_1$ und $\pm m_2$ sind, dass man also im Mittel nicht annehmen darf

$$m_1 + m_2 = d$$

sondern:

$$\pm m_1 \pm m_2 = d$$

also nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (2a) § 5.:

$$m_1^2 + m_2^2 = d^2$$

und diese Beziehung wird durch die Werte m_1 und m_2 von (8) und (6) in der That erfüllt. Dagegen sind v_1 und v_2 die *bestimmten* Korrektionen, welche man den Beobachtungen zuteilt, und welche deshalb die Beziehung erfüllen müssen:

$$v_1 - v_2 = d$$

Diese v sind übrigens durchaus nicht untrüglich, im Gegenteil, es haftet ihnen der mittlere Fehler M des Mittels selbst an, und man muss deswegen annehmen, dass v_1 einschliesslich seiner Unsicherheit M, dem a priori zu fürchtenden Fehler m_1 gleich ist, d. h.

$$v_1 \pm M = \pm m_1$$

also nach (4), (7), (8) und (6):

$$\frac{q}{p + q}\,d \pm \frac{d}{p + q}\sqrt{p\,q} = d\sqrt{\frac{q}{p + q}}$$

und in der That giebt die Quadrierung mit Weglassung des mit $\pm$ behafteten Doppelproduktes eine identische Gleichung:

$$\frac{q^2 + p\,q}{(p+q)^2} = \frac{q}{p+q}$$

Zur weiteren Veranschaulichung behandeln wir noch den einfachen Fall $p = 1$, $q = 2$, d. h. es ist eine Unbekannte zweimal beobachtet worden, und zwar das erstemal mit dem Gewicht 1, das zweitemal mit dem Gewichte 2. Die Beobachtungen haben die Differenz d gegeben. Entsprechend vorstehenden Gleichungen erhält man:

	Beobachtung 1.	Beobachtung 2.	
Beobachtungsresultate . .	l	$l + d$	
Gewichte	$p = 1$	$q = 2$	
Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 = m$	$m_2 = \frac{m}{\sqrt{2}}$	
Mittel, wahrscheinlichster Wert	$l + \frac{2}{3}\,d$		
Wahrscheinlichste Verbesserungen	$v_1 = +\frac{2}{3}\,d$	$v_2 = -\frac{1}{3}\,d$	$(v_1 - v_2 = d)$
Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 .	$m = d\sqrt{\frac{2}{3}}$		
Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels . . .	$M = \frac{d}{3}\sqrt{2}$		

Es bestehen die Verhältnisse:

Mittlere Fehler vor der Ausgleichung . . $m_1 : m_2 = \sqrt{2} : 1 = 1{,}414 : 1$

Genauigkeiten . . . . $\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = 1 : 1{,}414$

Verbesserungen . . . . $v_1 : v_2 = 2 : 1.$

Wenn dagegen zwei Beobachtungen vorlägen, deren Genauigkeiten a priori sich wie 1 : 2 verhielten, so müsste man den Widerspruch im Verhältnis 4 : 1 verteilen.

§. 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Wenn in einem ebenen Dreieck (Fig. 5.) die drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen werden, und zwar mit den Resultaten:

$$\alpha \qquad \beta \qquad \gamma$$

Fig. 5.

$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w.$

so wird der Widerspruch der Summe $\alpha + \beta + \gamma$ gegen 180°, welcher wegen der Messungsfehler auftreten wird, auf die drei gemessenen Winkel zu gleichen Teilen verteilt. Man kann dieses bekannte Verfahren durch das Prinzip des arithmetischen Mittels in folgender Weise begründen:

Für den ersten Winkel sind zwei unabhängige Beobachtungsresultate vorhanden:

$$\text{erstens} \quad x_1 = \alpha \text{ mit dem Gewicht } = p_1 = 1 \tag{1}$$

$$\text{zweitens} \quad x_2 = 180^\circ - (\beta + \gamma) \text{ mit dem Gewicht } = p_2 = \frac{1}{2} \tag{2}$$

Das zweite Gewicht ist $= \frac{1}{2}$, weil in x_2 die Fehler von β *und* von γ, d. h. der

$\sqrt{2}$-fache Wert des Fehlers von α zusammenwirken, was nach (2) § 8. S. 20 auf das Gewichtsverhältnis $1 : \frac{1}{2}$ führt.

Der wahrscheinlichste Winkelwert ist daher nach (4) § 8. S. 20:

$$x = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times [180^\circ - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}} \tag{3}$$

Wenn man hierin den Dreiecks-Widerspruch w einführt:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \tag{4}$$

so wird

$$180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha - w$$

also giebt Einsetzung in (3):

$$x = \frac{2\,\alpha + (\alpha - w)}{3} = \alpha - \frac{w}{3} \tag{5}$$

Dasselbe gilt auch für die beiden anderen Winkel des Dreiecks, welche mit y und z bezeichnet sein mögen, d. h.:

$$x = \alpha - \frac{w}{3}$$

$$y = \beta - \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma - \frac{w}{3}$$

Summe: $x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - w$

d. h. der Widerspruch w wird auf die drei Winkel gleich verteilt.

Die Verbesserung v_1 der ersten Beobachtung x_1 nach (1) ist:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

und die Verbesserung v_2 der zweiten Beobachtung x_2 nach (2) ist:

$$v_2 = +\frac{w}{3} + \frac{w}{3} = \frac{2w}{3} \tag{7}$$

der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird nach der Formel (10) § 8:

$$m = \pm\sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2-1}} = \pm\sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,w}{3}\right)^2} = \pm\frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Da dem Winkel α vor der Ausgleichung das Gewicht 1 zugeteilt war (ebenso wie auch den Winkeln β und γ), so ist dieser Wert m zugleich der mittlere Fehler eines Winkels *vor* der Ausgleichung. *Nach* der Ausgleichung erhält der verbesserte Winkelwert x (ebenso wie auch y und z) ein grösseres Gewicht, nämlich die Summe $p_1 + p_2 = \frac{3}{2}$, und damit wird der mittlere zu fürchtende Fehler des Winkels x (oder auch y oder z) *nach* der Ausgleichung:

$$M = \pm\frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{w}{3}\sqrt{2} \tag{9}$$

Das Resultat (8), $m = \pm\frac{w}{\sqrt{3}}$, lässt sich sehr anschaulich unmittelbar deuten:

der Schlussfehler w ist nämlich die unregelmässige Zusammenwirkung dreier Fehler $\pm m$, also:

$$\pm m \pm m \pm m = \pm w$$

woraus:

$$m^2 + m^2 + m^2 = w^2$$

was mit (8) übereinstimmt.

Die mittleren Fehler m und M, welche vor und nach der Ausgleichung gelten, veranschaulichen den durch die Ausgleichung erzielten Genauigkeitsgewinn. Nach (8) und (9) ist:

$$M : m = \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 = 0{,}816 : 1 \tag{10}$$

Der mittlere Fehler hat infolge der Ausgleichung im Verhältnis 0,816 : 1 abgenommen, oder die Genauigkeit hat in dem Verhältnis 1 : 0,816 zugenommen.

Wir werden die Ausgleichung der Winkel im Dreieck nun auch noch für den Fall ungleicher Gewichte behandeln:

Gemessen sind die 3 Winkel $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ (11)

mit den Gewichten $p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma$ (12)

der Dreieckswiderspruch ist $\alpha + \beta + \gamma - 180° = w$ (13)

Ist m der mittlere Gewichtseinheitsfehler, so sind die mittleren Winkelfehler vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} \qquad m_\beta = \frac{m}{\sqrt{p_\beta}} \qquad m_\gamma = \frac{m}{\sqrt{p_\gamma}} \tag{14}$$

Dieses giebt:

$$m_\alpha^2 = m^2\left(\frac{1}{p_\alpha}\right) \qquad m_\beta^2 + m_\gamma^2 = m^2\left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right) \tag{15}$$

Bezeichnet man nun mit p_1 das Gewicht von α und mit p_2 das Gewicht von $\beta + \gamma$, so wird nach (15):

$$p_1 = p_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}} \qquad p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}} \tag{16}$$

Setzt man $\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma} = \left[\frac{1}{p}\right]$, so giebt (16) nach einiger Umformung:

$$p_1 + p_2 = \frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right)} \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen in Bezug auf die Gewichte haben wir nun ähnlich wie bei (3):

$$x = \frac{p_1\,\alpha + p_2\,[180° - (\beta + \gamma)]}{p_1 + p_2} = \frac{p_1\,\alpha + p_2\,(\alpha - w)}{p_1 + p_2}$$

$$x = \alpha - \frac{p_2}{p_1 + p_2}\,w$$

Setzt man hier (16) und (17) ein, so wird:

$$x = \alpha - \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w \tag{18}$$

Da für die beiden anderen Winkel ähnliche Gleichungen gelten, hat man den Satz, dass der Widerspruch w auf die drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ umgekehrt proportional den Gewichten oder proportional den Quadraten der mittleren Fehler verteilt wird.

Man kann nun auch ähnliche Formeln wie (8) und (9), welche bei gleichen Gewichten gelten, für ungleiche Gewichte entwickeln. Der Raumersparung wegen wollen wir aber nur noch die Resultate hiefür hersetzen, nämlich:

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{19}$$

Mittlerer Fehler des Winkels α vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} = w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{20}$$

Mittlerer Fehler des Winkels α bezw. x nach der Ausgleichung:

$$M_\alpha = w\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{21}$$

Beispiel. In dem Dreieck *Oggersheim—Mannheim—Speyer* hat man (Fig. 6.):

Gemessen	$\alpha =$	72° 16′ 44,86″	$p_\alpha = 27$
„	$\beta =$	90 1 56,46	$p_\beta = 42$
„	$\gamma =$	17 41 17,43	$p_\gamma = 65$
Summe:	$\alpha+\beta+\gamma =$	179° 59′ 58,75″	
soll		180° 0′ 0,29″	
Widerspruch:	$w =$	— 1,54″	

Fig. 6.

$\alpha + \beta + \gamma - (180° + \varepsilon) = w.$

$$\frac{1}{p_\alpha} = 0{,}037 \qquad \frac{1}{p_\beta} = 0{,}024 \qquad \frac{1}{p_\gamma} = 0{,}015$$

$$\left[\frac{1}{p}\right] = 0{,}076$$

$$v_\alpha = \frac{0{,}037}{0{,}076}\,1{,}54'' = +0{,}75'' \qquad v_\beta = +0{,}49'' \qquad v_\gamma = +0{,}30''$$

Ausgeglichen	$\alpha =$	72° 16′ 45,61″
„	$\beta =$	90 1 56,95
„	$\gamma =$	17 41 17,73
Summe		180° 0′ 0,29″

Nach (19) bestimmt man den mittleren Fehler für die Gewichtseinheit:

$$m = \pm 5{,}59''$$

und nach (21) berechnet man die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel, und hat damit das Schlussresultat:

$$\alpha = 72°\ 16'\ 45{,}61'' \pm 0{,}77''$$
$$\beta = 90°\ 1'\ 56{,}95'' \pm 0{,}72''$$
$$\gamma = 17°\ 41'\ 17{,}73'' \pm 0{,}61''$$

In ähnlicher Weise, wie hier mit der Aufgabe der Dreieckswinkelausgleichung geschehen ist, können noch manche andere Aufgaben, welche beim ersten Anblick eine Ausgleichung mit mehreren Unbekannten zu verlangen scheinen, auf die Bestimmung *einer* Unbekannten durch das arithmetische Mittel zurückgeführt werden, jedenfalls alle Ausgleichungen mit *einer* streng zu erfüllenden Bedingungsgleichung, sofern man die Unbekannte passend wählt.

§. 11. Bestimmung des mittleren Fehlers aus Beobachtungs-Differenzen.

Die Differenz zweier gleich genauer Beobachtungen derselben Unbekannten ist der *wahre* Fehler der Differenz. Es ist nämlich die Differenz eine Funktion der beiden Beobachtungen, deren wahrer Wert = Null ist. Hat man also eine Anzahl n unabhängiger gleichartiger Beobachtungsdifferenzen d, so kann man daraus die *mittlere Differenz* D je zweier Beobachtungen berechnen nach der Formel:

$$D^2 = \frac{[d\,d]}{n} \tag{1}$$

Der Nenner n ist hier streng richtig, und nicht etwa wie bei (4) und (11) § 7. S. 16 durch $n-1$ zu ersetzen, denn die Differenzen d haben den Charakter *wahrer* Beobachtungsfehler.

Die theoretische Beziehung zwischen der mittleren Differenz D und dem mittleren Fehler m einer Beobachtung ist nach § 5. (2a), S. 12:

$$D^2 = m^2 + m^2 = 2\,m^2 \qquad \text{oder} \qquad D = m\sqrt{2} \tag{2}$$

folglich

$$m = \sqrt{\frac{[d\,d]}{2\,n}} \tag{3}$$

Wenn man eine Anzahl n von Beobachtungen (verschiedener Grössen) mit den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ p_n$ je in gleichartiger Weise wiederholt (so dass den wiederholten Beobachtungen wieder dieselben Gewichte $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ p_n$ zukommen) und dabei die Differenzen $d_1\ d_2\ d_3 \ldots d_n$ erhalten hat, so berechnet man daraus die mittlere Differenz D für das Gewicht 1, nämlich:

$$D^2 = \frac{p_1\,d_1^2 + p_2\,d_2^2 + p_3\,d_3^2 + \ldots p_n\,d_n^2}{n} = \frac{[p\,d\,d]}{n}$$

oder

$$D = \sqrt{\frac{[p\,d\,d]}{n}} \tag{4}$$

und daraus den mittleren Fehler m einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[p\,d\,d]}{2\,n}} \tag{5}$$

Praktische Anwendungen hiefür hat man sehr häufig, z. B. in den Differenzen der Längenmessungen und der Nivellements, insofern es sich nur um unregelmässige Fehler handelt. Die Fehler solcher Messungen sind nämlich nach S. 12 proportional den Quadratwurzeln der Entfernungen zu setzen.

Man habe eine Anzahl Doppelmessungen

mit Entfernungen	s_1	s_2	s_3	$\ldots$	s_n
„ Differenzen	d_1	d_2	d_3	$\ldots$	d_n
dann sind die Gewichte	$p_1 = \frac{1}{s_1}$	$p_2 = \frac{1}{s_2}$	$p_3 = \frac{1}{s_3}$	$\ldots$	$p_n = \frac{1}{s_n}$

Die Gleichung (5) giebt also:

$$m = \sqrt{\frac{1}{2\,n}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \frac{d_3^2}{s_3} + \ldots + \frac{d_n^2}{s_n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2\,n}\left[\frac{d\,d}{s}\right]} \tag{6}$$

Wir wollen diese sowohl für Längenmessungen als auch für Nivellements gültige Gleichung auf ein klassisches Beispiel anwenden. *Bessel* hat bei seiner Gradmessung in Ostpreussen eine Basis in 2 Teilen je 2fach gemessen, nämlich:

	1. Teil:	2. Teil:	Gesamtmittel
1. Messung	441,1852^m	1381,1571^m	1822,3447^m
2. Messung	441,1839^m	1381,1632^m	
Differenzen	— 1,3^{mm}	+ 6,1^{mm}	

Indem man nun die Differenzen in Millimetern, die Entfernungen in Kilometern zählt, hat man nach (6):

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1,3^2}{0,441} + \frac{6,1^2}{1,381}\right) = 7,70 \qquad m = \pm 2,78^{mm} \tag{7}$$

Dieses ist der mittlere Fehler *einer* Messung der Längeneinheit von 1 Kilometer. Der mittlere Fehler des Gesamtmittels 1822,3447^m wird daher:

$$M = \pm \frac{2,78}{\sqrt{2}} \sqrt{1,822} = \pm 2,65^{mm} \tag{8}$$

Man kann durch Betrachtung der Beobachtungsdifferenzen noch eine zweite Begründung der in § 7. (4) und (11) S. 16 behandelten Ersetzung des Nenners n durch $n-1$ erhalten: Wenn eine Unbekannte n mal beobachtet ist, so kann man zur Gewinnung eines Urteils über die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung die einzelnen Resultate unter sich vergleichen, und zwar kann man die n Beobachtungen zu $n\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Differenzen kombinieren. Bedeuten l_1 und l_2 die zwei ersten Beobachtungen, so ist deren Differenz $d = l_2 - l_1$ oder auch $d = v_1 - v_2$, wenn mit v, wie früher, die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel bezeichnet werden. Die sämtlichen so erhaltenen $n\frac{n-1}{2}$ Differenzen sind folgende:

$$\begin{array}{llll}
v_1 - v_2 & & & \\
v_1 - v_3 & v_2 - v_3 & & \\
v_1 - v_4 & v_2 - v_4 & v_3 - v_4 & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\
v_1 - v_n & v_2 - v_n & v_3 - v_n \;\ldots\ldots & v_{n-1} - v_n
\end{array}$$

Diese Differenzen sind nun allerdings nicht unabhängig, und man hat deswegen nicht das Recht, sie wie unabhängige Beobachtungsfehler zu behandeln, allein sie sind wenigstens gleichartig und gestatten deswegen die Bildung eines Mittelwertes. Ihre Quadratsumme wird, da jedes einzelne v^2 sich $(n-1)$ mal findet,:

$$[d\,d] = (n-1)[v\,v] - 2[v_i\,v_k] \tag{9}$$

wenn $[v_i\,v_k]$ die Summe aller bei der Quadrierung der Differenzen auftretenden Produkte bedeutet.

Um diese unbekannte Summe $[v_i\,v_k]$ wieder zu eliminieren, benützt man die identische Gleichung:

$$(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n)^2 = [v]^2 = [v\,v] + 2[v_i\,v_k]. \tag{10}$$

(9) und (10) geben zusammen:

$$[d\,d] = (n-1)[v\,v] + [v\,v] - [v]^2$$

Die algebraische Summe $[v]$ ist aber $= 0$ (vgl. (3) § 7. S. 15),

also $\quad [d\,d] = n\,[v\,v]$

Die Anzahl der Differenzen d ist $= n\frac{n-1}{2}$, also die mittlere Differenz D:

$$D = \sqrt{\frac{2\,[d\,d]}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{2\,[v\,v]}{n-1}} \tag{7}$$

und der mittlere Fehler:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}}$$

in Übereinstimmung mit (11) § 7.

(Die Bedeutung von n ist in den letzten Formeln eine andere als in (1) bis (5)). Man vergleiche hiezu: Astr. Nachr. 74. Band (1869) S. 209 u. ff. und S. 283.

§ 12. Allgemeines Ausgleichungsprinzip.

Das arithmetische Mittel genügt nur zur Ausgleichung von Beobachtungen *einer* Unbekannten. Wenn zur Bestimmung *mehrerer* Unbekannter Beobachtungen in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so muss ein allgemeineres Ausgleichungsprinzip gesucht werden. Alle Ausgleichungsaufgaben werden sich auf eine Grundaufgabe zurückführen lassen, welche wir schon in der Einleitung S. 2 angedeutet haben:

Es liegen folgende n Gleichungen vor:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} 0 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ 0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ 0 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z + \ldots}_{\text{Anzahl} = u} + l_n \end{array} \right\} \tag{1}$$

Die Grössen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ sind durch Beobachtungen erhalten worden, $x\ y\ z \ldots$ sind Unbekannte, welche mit den Beobachtungen l in Beziehungen stehen. Die Coëfficienten $a\ b\ c \ldots$ der diese Beziehungen ausdrückenden Gleichungen (1) sind fehlerfrei gegeben.

Die Anzahl n der Beobachtungen und der Gleichungen (1) soll immer grösser sein als die Anzahl u der darin vorkommenden Unbekannten, d. h.:

$$n > u \tag{2}$$

Es wird daher im allgemeinen nicht möglich sein, ein System von Unbekannten $x\ y\ z$ zu finden, welches *allen* Gleichungen (1) Genüge leistet. In diesen Gleichungen werden Widersprüche auftreten, welche wir mit $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ bezeichnen; und damit gehen die Gleichungen (1) über in die folgenden neuen Gleichungen, denen wir den Namen Fehlergleichungen geben:

Fehlergleichungen

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \quad + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \quad + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots \quad + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z + \ldots}_{\text{Anzahl} = u} \quad + l_n \end{array} \right\} \tag{3}$$

Man kann nur verlangen, dass von den n Widersprüchen v eine Anzahl u verschwindet, man muss also notgedrungen auf die Bedingung, dass *alle* v gleich Null werden, verzichten, und sich mit einem System $x\ y\ z \ldots$ begnügen, für welches die v im allgemeinen *nicht* gleich Null werden.

Die Aufgabe, ein solches System zu finden, ist ohne weitere Bedingung eine unbestimmte; eine solche weitere Bedingung ist insofern vorhanden, als die Wider-

sprüche v in ihrer Gesamtheit möglichst klein sein sollen, so dass den Gleichungen (1) möglichst wenig Zwang angethan wird.

Die allseitig befriedigende mathematische Formulierung dieser Bedingung des möglichst Anpassens, oder des kleinsten Zwangs lautet:

Es soll die **Quadrat-Summe** der Widersprüche v möglichst klein sein, oder in einer Formel:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Diese einfache Bedingung gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungen l, zu welchen die Verbesserungen v gehören, a priori *gleich* genau zu achten sind. Ist dieses nicht der Fall, und kommen den Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ a priori die mittleren zu fürchtenden Fehler $m_1\ m_2\ m_3 \ldots m_n$ zu, so gilt statt (4) die geänderte Bedingung:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \tag{5}$$

Oder indem man unter *Gewichten* $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ solche Zahlen versteht, welche den Quadraten $m_1^2\ m_2^2\ m_3^2 \ldots m_n^2$ umgekehrt proportional sind, kann man statt (5) auch schreiben:

$$[p\,v\,v] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + \ldots p_n v_n^2 = \text{Minimum} \tag{5a}$$

Als Bemerkung hiezu gilt alles, was wir schon bei dem mittleren Fehler § 4. S. 9 erwähnt haben. *)

Ehe wir weiteren Gebrauch von dem Prinzip der Gleichung (4), bzw. (5) oder (5a) machen, überzeugen wir uns, dass dieses Prinzip im Einklang mit dem schon früher behandelten arithmetischen Mittel ist.

Man habe eine Grösse x wiederholt beobachtet
mit den Resultaten $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$
und mit den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$

Der Hypothese, es sei x der wahrscheinlichste Wert, entsprechen die wahrscheinlichsten Verbesserungen v der Beobachtungen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots \qquad v_n = x - l_n$$

Nach (5a) soll sein:

$$p_1 (x - l_1)^2 + p_2 (x - l_2)^2 + p_3 (x - l_3)^2 + \ldots = \text{Minimum}$$

woraus durch Differentiieren nach der Veränderlichen x erhalten wird:

$$2\,p_1 (x - l_1) + 2\,p_2 (x - l_2) + 2\,p_3 (x - l_3) + \ldots = 0$$

also mit Auflösung nach x:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots} = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

in Übereinstimmung mit (1) § 8. S. 19.

Man kann auch noch in anderer Weise das arithmetische Mittel als besonderen Fall unserer allgemeineren Ausgleichungsaufgabe nachweisen:

Wenn zur Bestimmung der unbekannten Grösse x die Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ gemacht sind, wobei die Beziehungen bestehen:

*) Man vergleiche hiezu auch eine interessante Abhandlung: „Über die Methode der kleinsten Quadrate". Inaugural-Dissertation zur Erwerbung der Doktorwürde in der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig, verfasst von *Richard Henke* in Dresden. Dresden, Druck von B. G. Teubner. 1868.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + l_1 = 0 \\ a_2 x + l_2 = 0 \\ a_3 x + l_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (6)$$

so kann man jede dieser Gleichungen nach x auflösen:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{l_1}{a_1} \\ x = -\frac{l_2}{a_2} \\ x = -\frac{l_3}{a_3} \\ \dots\dots \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Wenn die Gewichte der Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3\ \dots$ alle gleich sind, und m der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 ist, so sind die mittleren Fehler der verschiedenen in (7) enthaltenen Bestimmungen von x bzw.:

$$\frac{m}{a_1} \quad \frac{m}{a_2} \quad \frac{m}{a_3} \dots \qquad (8)$$

folglich die Gewichte der Werte x umgekehrt proportional den Quadraten hievon, d. h.:

$$\text{Gewichte:} \quad a_1^2 \quad a_2^2 \quad a_3^2 \dots \qquad (9)$$

Nachdem die Gewichte (9) ermittelt sind, erhält man den wahrscheinlichsten Wert von x aus (7) und (9):

$$x = \frac{-a_1^2 \frac{l_1}{a_1} - a_2^2 \frac{l_2}{a_2} - a_3^2 \frac{l_3}{a_3} - \dots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots}$$

$$x = -\frac{[a\,l]}{[a\,a]} \qquad (10)$$

Diese Gleichung wird im folgenden § 13. bestätigt werden, indem die Gleichungen (3) daselbst mit $y = 0$ geben werden:

$$[a\,a]\,x + [a\,l] = 0$$

§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten.*)

Wenn mehrere Fehlergleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ \dots\dots\dots \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

wo die $l_1\ l_2\ l_3\ \dots\ l_n$ beobachtet sind, und die Unbekannten $x\ y$ bestimmt werden sollen, so nennt man die l insofern „vermittelnde Beobachtungen“, als man sie gewissermassen nicht um ihrer selbst willen beobachtet hat, sondern als Vermittlung, um zu den Unbekannten $x\ y$ zu gelangen.

Ein einzelnes v giebt quadriert:

$$\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2\,a\,b\,x\,y + 2\,a\,l\,x \\ &+ b^2 y^2 \quad + 2\,b\,l\,y \\ &\qquad\qquad + l^2 \end{aligned}$$

*) Wir behandeln zunächst den Fall von *zwei* Unbekannten besonders.

Denkt man sich alle einzelnen v so quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y &+ 2\,[a\,l]\,x \\ + \ [b\,b]\,y^2 &+ 2\,[b\,l]\,y \\ &+ \ [l\,l]\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Unser Quadrat-Minimums-Prinzip verlangt:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,y} = 0$$

d. h.:

$$\left.\begin{aligned}[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Diese Gleichungen nennt man *Normalgleichungen;* die Auflösung derselben giebt:

$$x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) oder (4) enthalten die vollständige Ausgleichungsvorschrift für die vorgelegten Fehlergleichungen (1). In Worten hat man folgende Anweisung:

Wenn die Coëfficienten a b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen (1) gegeben sind, so bildet man daraus alle Quadrate und Produkte und deren Summen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 &= [a\,a] \\ a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + \ldots\, a_n\,b_n &= [a\,b] \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2 &= [b\,b] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Aus diesen Summen-Coëfficienten bildet man die Normalgleichungen (3) oder sofort deren Auflösungen (4).

Man kann die Normalgleichungen (3) auch in dieser abgekürzten Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}[a\,v] = 0 \\ [b\,v] = 0\end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

denn es ist nach (1):

$$[a\,v] = a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots$$

was in weiterer Ausführung giebt:

$$[a\,v] = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l]$$

Diese Formen (3a) entsprechen der Gleichung $[v] = 0$ beim arithmetischen Mittel. S. 15.

Wir nehmen hiezu sofort ein Zahlenbeispiel:

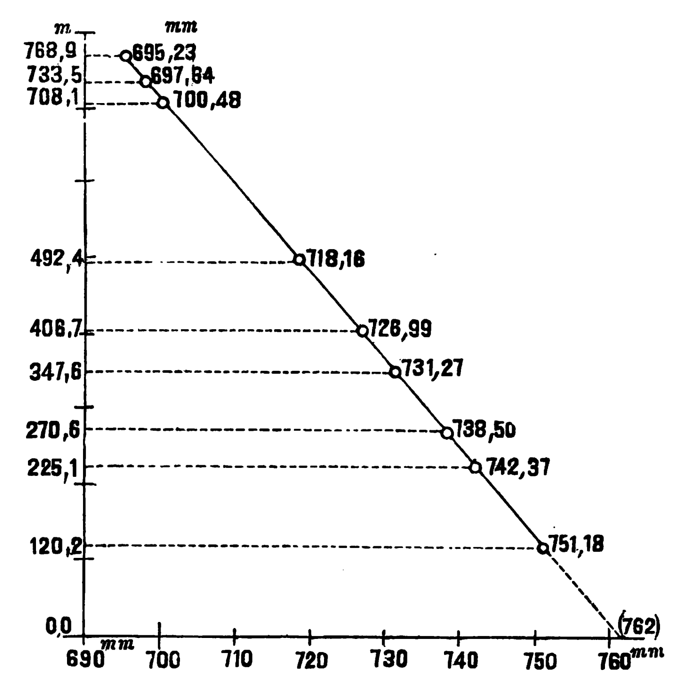
In den „Württembergischen Naturwissenschaftlichen Jahresheften“ Jahrgang XXIV. (1868) S. 260 sind von Professor *Schoder* die Meereshöhen h und die 12jährigen Barometermittel B von 9 meteorologischen Stationen mitgeteilt, nämlich:

	h	B	
	m	mm	
1. Bruchsal	120,2	751,18	(5)
2. Cannstatt . . .	225,1	742,37	
3. Stuttgart	270,6	738,50	
4. Calw	347,6	731,27	
5. Friedrichshafen . .	406,7	726,99	
6. Heidenheim . . .	492,4	718,16	
7. Isny	708,1	700,48	
8. Freudenstadt . .	733,5	697,64	
9. Schopfloch . . .	768,9	695,23	

Wir wollen annehmen, die Theorie der barometrischen Höhenmessung sei uns ganz unbekannt, wir bemerken aber, dass bei wachsenden Höhen h die Barometerstände B ziemlich gesetzmässig abnehmen; und um das Gesetz dieser Abnahme zu untersuchen, beginnen wir damit, die Barometerstände B als Funktion der Höhen h graphisch darzustellen, wie Fig. 7. zeigt.

Fig. 7.

Graphische Darstellung der Barometerstände B als Funktion der Höhen h. Die Höhen h sind vertikal, die Barometerstände B horizontal dargestellt.



Für viele Zwecke wird es nun genügen, durch die erhaltenen Punkte eine Gerade oder eine stetige Kurve möglichst anschliessend durchzulegen, und die Ordinaten der Ausgleichungs-Kurve als ausgeglichene Werte anzunehmen.

Auch, wenn man eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vornehmen will, ist ein solches Auftragen vor Beginn der Rechnung immer rätlich, ganz besonders, wenn die Beziehung der Veränderlichen theoretisch unklar ist; die graphische Darstellung hat den Zweck, die Art der Abhängigkeit zu veranschaulichen, unter Umständen die Form der Ausgleichungs-Funktion festzustellen, grobe Beobachtungsfehler aufzufinden und Näherungswerte der Unbekannten zu ermitteln.

Der Anblick unserer Figur lässt eine lineare Funktion zwischen h und B annehmbar erscheinen, d. h. wir setzen:

$$B = X + h\,Y \tag{6}$$

Irgend 2 von den 9 Beobachtungen (5) würden hinreichen, die 2 Unbekannten X und Y der Funktion (6) zu bestimmen. Um allen 9 Beobachtungen möglichst gerecht zu werden, bilden wir Fehlergleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = X + h_1\, Y - B_1 \\ v_2 = X + h_2\, Y - B_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_9 = X + h_9\, Y - B_9 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Dieses sind Gleichungen von der Form (1); die v sind die an den Beobachtungen B anzubringenden Verbesserungen, indem nur die Barometerstände B als fehlerhaft, die Höhen h dagegen als fehlerfrei behandelt werden.

Zum Anschluss an die Bezeichnungen in (3) und (4) müssen wir also setzen:

$$a = 1 \qquad b = h \qquad l = -B \qquad (8)$$

und erhalten damit folgende Berechnung:

Num.	a	b	l	b^2	bl
1.	1,0	120,2	— 751,18	14 448	— 90 292
2.	1,0	225,1	— 742,37	50 670	— 167 107
3.	1,0	270,6	— 738,50	73 224	— 199 838
4.	1,0	347,6	— 731,27	120 826	— 254 189
5.	1,0	406,7	— 726,99	165 405	— 295 667
6.	1,0	492,4	— 718,16	242 458	— 353 622
7.	1,0	708,1	— 700,48	501 406	— 496 010
8.	1,0	733,5	— 697,64	538 022	— 511 719
9.	1,0	768,9	— 695,23	591 207	— 534 562
	9,0	4073,1	— 6501,82	2297 666	— 2903 006

(9)

Man hat also jetzt:

$$\left.\begin{array}{lll} [aa] = +\,9{,}0 & [ab] = +\,4073{,}1 & [al] = -\,6501{,}82 \\ & [bb] = +\,2297\,666 & [bl] = -\,2903\,006 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Setzt man diese Coëfficienten in (4), so giebt die Ausrechnung (indem wir nach (6) die Unbekannten X Y nennen):

$$X = -\frac{-\,3\,114\,772\,940}{+\qquad 4\,088\,850} = +\,761{,}77$$

$$Y = -\frac{+\qquad 855\,500}{+\qquad 4\,088\,850} = -\,0{,}086\,944$$

Die Ausgleichungsfunktion (6) heisst also:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08694\,h \qquad (11)$$

oder nach h aufgelöst:

$$h = 11{,}502\;(761{,}77 - B)$$

§ 14. Einführung von Näherungswerten.

Wir haben die Ausrechnung des Zahlenbeispiels in vorstehendem § 13., welche sich zuerst dargeboten hat, nicht zur Nachahmung, sondern sozusagen als abschreckendes Beispiel hierhergesetzt; man kann nämlich die Rechnung wesentlich vereinfachen durch Einführung von *Näherungswerten* der Unbekannten X und Y. Ebenso wie man bei dem arithmetischen Mittel (13) § 7. S. 16, die Grade und Minuten (35° 26′) nicht mit in die Summierung hineinzog, kann man auch in unserem Falle erste Näherungen absondern.

Betrachtet man die Fig. 7. S. 36, so zeigt die Barometer-Kurve, wenn man sie bis zur Höhe $h = 0$ nach unten rechts verlängert, beiläufig den Wert 762^{mm}, und da es ja bekannt ist, dass in der Höhe Null über dem Meer allerdings der Barometer-

stand etwa $= 760^{mm}$ ist, so behalten wir den graphisch gefundenen Näherungswert 762 bei. Eine gute Näherung für den Coëfficienten Y erhält man durch die erste und letzte Beobachtung:

1.	$h = 120,2$	$B = 751,18$
9.	$768,9$	$695,23$
Differenzen:	$\Delta h = 648,7$	$\Delta B = -55,95$

$$Y = \frac{55,95}{648,7} = 0,08625$$

Wir nehmen also nun

$$\text{Näherung:} \quad B = 762 - 0,08625\,h \tag{1}$$

Gelegentlich ist hiezu zu bemerken: Auf welchem Wege man die ersten Näherungen herbekommt, ist gleichgültig, sehr oft hat man sie von anderwärts, von früheren vorläufigen Berechnungen u. s. w. Unter allen Umständen kann man sich dadurch brauchbare Näherungen verschaffen, dass man, bei 2 Unbekannten, 2 möglichst verschiedene Beobachtungen auswählt und die ihnen entsprechenden Fehlergleichungen mit $v = 0$ auflöst.

Mit den Näherungen (1) schreiben wir nun:

$$\text{Es } \textit{soll} \text{ sein:} \quad B = (762 + x) - (0,08625 + y')\,h \tag{2}$$

d. h. wir führen die Unbekannten x und y' als Verbesserungen der Näherungen ein.

Wegen der Beobachtungsfehler sind die Gleichungen (2) im allgemeinen nicht erfüllt, weil die B beobachtete Werte vorstellen. Es muss jedem B eine Verbesserung v zugeteilt werden, d. h. im Gegensatz zu (2) hat man:

$$\text{Es } \textit{ist:} \quad B + v = (762 + x) - (0,08625 + y')\,h \tag{3}$$

Das giebt die Fehlergleichung:

$$v = x - h\,y' + (762 - 0,08625\,h) - B \tag{4}$$

Indessen kommt noch eine Kleinigkeit in Betracht: Bei der Annahme (4) werden die Coëfficienten von x und y' sehr *ungleich*. Die Coëfficienten von x sind nämlich alle $= 1$ und die Coëfficienten von y sind $= h$, von 120 bis 769, d. h. viel grösser als die Coëfficienten von x. Eine solche Ungleichheit ist formell sehr störend, wie jeder Rechenversuch sofort zeigen wird; man kann aber immer die Coëfficienten nahezu gleich machen durch Einführung neuer Unbekannten, nämlich statt (4):

$$v = x - \frac{h}{100}(100\,y') + (762 - 0,08625\,h) - B$$

oder zur Abkürzung

$$100\,y' = y \tag{5}$$

giebt:

$$v = x - \frac{h}{100}\,y + (762 - 0,08625\,h) - B \tag{6}$$

Das ist eine nun genügend zugerichtete Fehlergleichung von der allgemeinen Form

$$v = a\,x + b\,y + l$$

wobei

$$a = 1 \qquad b = -\frac{h}{100} \tag{7}$$

$$l = (762 - 0,08625\,h) - B \tag{8}$$

Zur Veranschaulichung der Bedeutung von l wollen wir noch ein neues Zeichen (B) einführen, nämlich:

$$l = (B) - B \qquad (B) = 762 - 0,08625\,h \tag{9}$$

(B) ist nämlich derjenige Wert der Beobachtungsgrösse B, welchen B annehmen würde, wenn die Näherungswerte 762 und 0,08625 streng gälten. In Hinsicht auf das Vorzeichen merken wir ein- für allemal:

$$l = (B) - B = \text{Näherung} - \text{Beobachtung} \tag{9a}$$

Nach den Formeln (9), (8) und (7) wird folgendes berechnet:

h	(B)	B	l	a	b	b^2	l^2	bl
120,2	751,63	751,18	+ 0,45	+ 1,0	— 1,20	1,44	0,20	— 0,54
225,1	742,59	742,37	+ 0,22	+ 1,0	— 2,25	5,06	0,05	— 0,50
270,6	738,66	738,50	+ 0,16	+ 1,0	— 2,71	7,34	0,03	— 0,43
347,6	732,02	731,27	+ 0,75	+ 1,0	— 3,48	12,11	0,56	— 2,61
406,7	726,92	726,99	— 0,07	+ 1,0	— 4,07	16,56	0,00	+ 0,28
492,4	719,53	718,16	+ 1,37	+ 1,0	— 4,92	24,21	1,88	— 6,74
708,1	700,93	700,48	+ 0,45	+ 1,0	— 7,08	50,13	0,20	— 3,19
733,5	698,74	697,64	+ 1,10	+ 1,0	— 7,34	53,88	1,21	— 8,07
768,9	695,68	695,23	+ 0,45	+ 1,0	— 7,69	59,14	0,20	— 3,46
			+ 4,88	+ 9,0	— 40,74	229,87	4,33	— 25,26

$$\left.\begin{array}{lll} [aa] = +9{,}00 & [ab] = -\ 40{,}74 & [al] = +\ 4{,}88 \\ & [bb] = +\ 229{,}87 & [bl] = -25{,}26 \\ & & [ll] = +\ 4{,}33 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Die Summe $[ll]$ haben wir hier gelegentlich mitberechnet, obgleich sie nach der bisherigen Entwicklung noch nicht nötig erscheint.

Setzt man nun die Coëfficienten (10) in die Formeln (4) § 13. S. 35, so erhält man (mit Rücksicht auf die Bezeichnungsart (5)):

	$x = -0{,}23$	$y = +0{,}0697$	$y' = +0{,}000\,697$
Näherungen (1)	762,00		0,086 250
Resultate	$X = 761{,}77$		$Y = 0{,}086\,947$ (11)

Wir haben also auf einem zweiten, bequemeren, Wege die Resultate des vorigen § 13. S. 37 wieder erhalten, nämlich abgerundet (hinreichend übereinstimmend):

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \qquad (12)$$

Wenn man hiernach für die gegebenen Höhen h die einzelnen B ausrechnet, und sie mit den beobachteten B vergleicht, so erhält man folgendes:

	h	B beobachtet	B nach (12) ausgeglichen	v	v^2
1.	120,2^m	751,18^{mm}	751,32^{mm}	+ 0,14^{mm}	0,0196
2.	225,1	742,37	742,20	— 0,17	0,0289
3.	270,6	738,50	738,24	— 0,26	0,0676
4.	347,6	731,27	731,55	+ 0,28	0,0784
5.	406,7	726,99	726,41	— 0,58	0,3364
6.	492,4	718,16	718,96	+ 0,80	0,6400
7.	708,1	700,48	700,21	— 0,27	0,0729
8.	733,5	697,64	598,00	+ 0,36	0,1296
9.	768,9	695,23	594,92	— 0,31	0,0961
					1,4695 = $[vv]$ (13)

Diese Summe $[vv]$ wird später zur Berechnung mittlerer Fehler gebraucht werden.

§ 15. *Gauss*'sche Elimination und Fehlerquadratsumme für zwei Unbekannte.

Statt der unmittelbaren Auflösung der Normalgleichungen, welche in (4) § 13. S. 35 angegeben ist, empfiehlt sich in den meisten Fällen die von *Gauss* zuerst im Jahr 1810 (s. o. § 1. S. 3 und 4) angewendete allmähliche Eliminierung mit einer eigentümlichen sehr übersichtlichen Bezeichnungsart.

Wir nehmen die Normalgleichungen (3) § 13. S. 35 nochmals vor:

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [al] = 0 \qquad (1)$$

$$[ab]\,x + [bb]\,y + [bl] = 0 \qquad (2)$$

Wir multiplizieren die erste Normalgleichung (1) mit $-\frac{[ab]}{[aa]}$ und addieren sie zur zweiten, wodurch x wegfällt, und folgende Gleichung übrig bleibt:

$$\left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right) y + \left([bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\right) = 0 \qquad (3)$$

Dieses giebt Veranlassung, abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, nämlich:

$$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb.1] \qquad [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] = [bl.1] \qquad (4)$$

damit wird (3):

$$[bb.1]\,y + [bl.1] = 0 \qquad y = -\frac{[bl.1]}{[bb.1]} \qquad (5)$$

Macht man die Elimination in umgekehrter Folge, so hat man:

$$[aa] - \frac{[ab]}{[bb]}[ab] = [aa.1] \qquad [al] - \frac{[ab]}{[bb]}[bl] = [al.1] \qquad (6)$$

$$[aa.1]\,x + [al.1] = 0 \qquad x = -\frac{[al.1]}{[aa.1]} \qquad (7)$$

Die Klammern $[bb.1]$, $[bl.1]$ u. s. w. sind symbolische Bezeichnungen von ähnlicher Art, wie auch z. B. die Determinanten-Bezeichnung.

Um sich den Bau unserer Klammer-Coëfficienten einzuprägen, merke man sich zunächst, dass jeder solche Wert = Null wird, sobald man die symbolische Bezeichnung algebraisch auffasst, z. B.

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = bb - \frac{ab}{aa}ab = bb - \frac{b}{a}ab = bb - bb = 0. \qquad (8)$$

Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler.

Nach (2) § 13. S. 35 ist diese Summe zunächst:

$$\left.\begin{aligned}[vv] = [aa]\,x^2 + 2\,[ab]\,xy + 2\,[al]\,x \\ + [bb]\,y^2 + 2\,[bl]\,y \\ + [ll]\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Hiemit lässt sich die Normalgleichung (1) in innige Beziehung bringen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}([aa]\,x + [ab]\,y + [al])^2 = [aa]^2\,x^2 + 2\,[aa]\,[ab]\,xy + 2\,[aa]\,[al]\,x \\ + [ab]^2\,y^2 + 2\,[ab]\,[al]\,y \\ + [al]^2\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Wenn man dieses mit $[aa]$ dividiert und von (9) abzieht, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}[vv] - \frac{([aa]\,x + [ab]\,y + [al])^2}{[aa]} = [bb]\,y^2 + 2\,[bl]\,y + [ll] \\ - \frac{[ab]^2}{[aa]}y^2 - 2\frac{[ab]}{[aa]}[al]\,y - \frac{[al]^2}{[aa]}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Die paarweise untereinander geschriebenen 6 letzten Glieder gruppieren sich von selbst so, dass man hat:

$$[vv] - \frac{([aa]\,x + [ab]\,y + [al])^2}{[aa]} = [bb.1]\,y^2 + 2\,[bl.1]\,y + [ll.1] \qquad (12)$$

So kann man fortfahren, indem man nach (5) rechnet:

$$\frac{([bb.1]\,y+[bl.1])^2}{[bb.1]}=[bb.1]\,y^2+2\,[bl.1]\,y+\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}$$

Dieses wird gliederweise von (12) abgezogen und giebt:

$$[vv]-\frac{([aa]\,x+[ab]\,y+[al])^2}{[aa]}-\frac{([bb.1]\,y+[bl.1])^2}{[bb.1]}=[ll.1]-\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} \qquad (13)$$

Schreibt man vollends $[ll.2]$ für die letzten Teile von (13), so ist nun das ursprüngliche $[vv]$ von (9) auf folgende Form gebracht:

$$[vv]=\frac{([aa]\,x+[ab]\,y+[al])^2}{[aa]}+\frac{([bb.1]\,y+[bl.1])^2}{[bb.1]}+[ll.2] \qquad (14)$$

Nach (1) und (5) sind aber die beiden quadratischen Glieder = Null, es bleibt also übrig:

$$[vv]=[ll.2] \qquad (15)$$

Die neu eingeführten Glieder $[ll.1]$ und $[ll.2]$, welche zur Elimination selbst nicht nöthig waren, berechnet man im Anschluss an die Elimination.

§. 16. Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\beta\beta]$ und $[\alpha\beta]$.

Nach dem Fehlerhäufungs-Gesetz von § 5. können wir den mittleren Fehler oder das Gewicht jeder Funktion direkt gemessener Grössen l angeben, wenn deren mittlere Fehler a priori gegeben sind. Wenn also z. B. x und y mit den Messungen $l_1\ l_2\ \ldots\ l_n$ so zusammenhängen:

$$x=\alpha_1\,l_1+\alpha_2\,l_2+\ldots\,\alpha_n\,l_n \qquad (1)$$

$$y=\beta_1\,l_1+\beta_2\,l_2+\ldots\,\beta_n\,l_n \qquad (2)$$

und es ist m der mittlere Fehler der einzelnen l, dann ist nach (3b) § 5. S. 12:

$$m_x^2=[\alpha\alpha]\,m^2 \qquad \text{und} \qquad m_y^2=[\beta\beta]\,m^2 \qquad (3)$$

oder in Gewichtsform, wenn zu m das Gewicht = 1 gehört:

$$p_x=\frac{1}{[\alpha\alpha]} \qquad p_y=\frac{1}{[\beta\beta]} \qquad (4)$$

Wenn nun x und y durch die Gleichungen (7) und (5) § 15. S. 40 bestimmt werden, so wird es nötig sein, um die Formeln (3) oder (4) anzuwenden, jene (7) und (5) auf die Formen (1) und (2) zu bringen, d. h. die früheren (7) und (5) müssen als lineare Funktionen der l entwickelt werden. Wir wollen dieses bei y ausführen, nämlich:

$$y=-\frac{[bl.1]}{[bb.1]} \qquad (5)$$

Der Nenner $[bb.1]$ enthält keinerlei Bestandteile von l, die Entwicklung braucht sich also nur auf den Zähler $[bl.1]$ zu erstrecken, und hiezu ist:

$$[bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]=b_1\,l_1+b_2\,l_2+\ldots-\frac{[ab]}{[aa]}(a_1\,l_1+a_2\,l_2+\ldots)$$

$$y=-\frac{1}{[bb.1]}\left\{\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right)l_1+\left(b_2-\frac{[ab]}{[aa]}a_2\right)l_2+\ldots\right\}$$

Also durch Vergleichung mit (2):

$$\beta_1=-\frac{1}{[bb.1]}\left(b_1-\frac{[ab]}{[aa]}a_1\right) \qquad (6)$$

$$\beta_1^2=\frac{1}{[bb.1]^2}\left(b_1^2-\frac{2\,[ab]}{[aa]}a_1\,b_1+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_1^2\right).$$

Die folgenden $\beta_2^2\ \beta_3^2\ \ldots\ \beta_n^2$ unterscheiden sich hievon nur durch den Index $_{2\ 3}\ \ldots\ _n$, man kann also die Summe $[\beta\beta]$ rasch bilden:

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b\,b] - \frac{2\,[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,[a\,a]\right)$$

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]\right) = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\,[b\,b\,.\,1]$$

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]}\quad,\quad p_y = [b\,b\,.\,1] \tag{7}$$

Um auch $[\alpha\alpha]$ zu bestimmen, braucht man nur überall b und a gegenseitig zu vertauschen, wodurch sich ergiebt:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{[a\,a\,.\,1]}\quad,\quad p_x = [a\,a\,.\,1] \tag{8}$$

Um noch eine andere Zusammenfassung zu erhalten, setzen wir

$$[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] = D \tag{9}$$

und damit wird
$$[b\,b\,.\,1] = \frac{D}{[a\,a]}\qquad [a\,a\,.\,1] = \frac{D}{[b\,b]} \tag{10}$$

Wir werden später auch noch $[\alpha\beta]$ nötig haben, weshalb wir auch diese Produktsumme sofort im Anschluss an das bisherige bestimmen:

Ein einzelner Wert β_1 oder α_1 giebt sich nach (6), mit Anwendung von D nach (10):

$$\beta_1 = -\frac{[a\,a]}{D}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)\qquad \alpha_1 = -\frac{[b\,b]}{D}\left(a_1 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}\,b_1\right)$$

$$\alpha_1\,\beta_1 = +\frac{1}{D^2}\,([a\,a]\,b_1 - [a\,b]\,a_1)\,([b\,b]\,a_1 - [a\,b]\,b_1)$$

$$= \frac{1}{D^2}\,([a\,a]\,[b\,b]\,a_1\,b_1 - [a\,a]\,[a\,b]\,b_1\,b_1 - [a\,b]\,[b\,b]\,a_1\,a_1 + [a\,b]\,[a\,b]\,a_1\,b_1)$$

$$[\alpha\beta] = \frac{1}{D^2}\,([a\,a]\,[b\,b]\,[a\,b] - [a\,a]\,[a\,b]\,[b\,b] - [a\,b]\,[b\,b]\,[a\,a] + [a\,b]\,[a\,b]\,[a\,b])$$

Die 2 ersten Glieder heben sich auf, und wenn man wieder die Bedeutung von D berücksichtigt, so erhält man:

$$[\alpha\beta] = \frac{-[a\,b]}{D} = \frac{-[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{11}$$

und wegen der Analogie mit $[b\,b\,.\,1]$ wollen wir noch einführen:

$$[a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}\,[b\,b] = [a\,b\,.\,1] \tag{12}$$

wodurch wird:
$$[\alpha\beta] = \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} \tag{13}$$

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} = \frac{[b\,b]}{D} = \frac{1}{p_x} \qquad [\alpha\beta] = \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} = \frac{-[a\,b]}{D} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad [\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} = \frac{[a\,a]}{D} = \frac{1}{p_y} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$(m_x)^2 = \frac{m^2}{p_x} = [\alpha\alpha]\,m^2 = \frac{[b\,b]}{D}\,m^2 \qquad (m_y)^2 = \frac{m^2}{p_y} = [\beta\beta]\,m^2 = \frac{[a\,a]}{D}\,m^2 \tag{15}$$

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \tag{16}$$

Dieser Coëfficienten-Determinante D entspricht auch eine Gewichts-Coëfficienten-Determinante:
$$\Delta = [\alpha\alpha]\,[\beta\beta] - [\alpha\beta]\,[\alpha\beta] \tag{17}$$

und es besteht zwischen beiden die Beziehung:

$$D\,\Delta = 1 \tag{18}$$

§ 17. Gewicht einer Funktion von x und y.

Oft hat es weniger Interesse, die Genauigkeit der Unbekannten x und y selbst zu kennen, als die Genauigkeit einer Funktion derselben; wir nehmen die lineare Funktion:

$$F = f_1 x + f_2 y \tag{1}$$

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, als ob man den mittleren Fehler von F kurzweg aus den mittleren Fehlern von x und y berechnen könnte nach der Formel (3a) § 5. S. 12:

$$M^2 = (f_1 m_x)^2 + (f_2 m_y)^2 \quad (?) \tag{2}$$

Allein dieses ist nicht richtig, weil die x und y durchaus *nicht* unabhängige Beobachtungen mit den ebenfalls unabhängigen mittleren Fehlern m_x und m_y sind, vielmehr hängen x und y von *denselben* Messungen $l_1\ l_2 \ldots l_n$ ab. Wenn z. B. zufällig die Fehler aller l positiv wären, so würden nach (1) und (2) des vorigen § 16. S. 41 auch die Fehler von x *und* von y beide positiv.

Setzen wir zunächst bestimmte Fehler $\varDelta l_1\ \varDelta l_2 \ldots$ der l voraus, so folgen daraus die bestimmten Fehler $\varDelta_x$ und $\varDelta_y$ nach (1) und (2) § 16. S 41:

$$\varDelta x = \alpha_1 \varDelta l_1 + \alpha_2 \varDelta l_2 + \alpha_3 \varDelta l_3 + \ldots \tag{3}$$

$$\varDelta y = \beta_1 \varDelta l_1 + \beta_2 \varDelta l_2 + \beta_3 \varDelta l_3 + \ldots \tag{4}$$

und daraus folgt ferner der bestimmte Fehler von F nach (1):

$$\varDelta F = f_1 \varDelta x + f_2 \varDelta y \tag{5}$$

Wenn man dieses quadriert und die Mittelwerte der Quadrate bildet, so wird, wenn n malige Wiederholung angenommen wird:

$$\frac{[\varDelta F \varDelta F]}{n} = f_1^2 \frac{[\varDelta x \varDelta x]}{n} + f_2^2 \frac{[\varDelta y \varDelta y]}{n} + 2 f_1 f_2 \frac{[\varDelta x \varDelta y]}{n} \tag{6}$$

und hier ist der Mittelwert $\frac{[\varDelta x \varDelta y]}{n}$ *nicht* gleich Null, denn es ist nach (3) und (4):

$$\left.\begin{aligned} \varDelta x \varDelta y = \alpha_1 \beta_1 (\varDelta l_1)^2 + \alpha_2 \beta_2 (\varDelta l_2)^2 + \alpha_3 \beta_3 (\varDelta l_3)^2 + \ldots \\ + \alpha_1 \beta_2 \varDelta l_1 \varDelta l_2 + \alpha_2 \beta_1 \varDelta l_2 \varDelta l_1 + \alpha_1 \beta_3 \varDelta l_1 \varDelta l_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hier werden die Mittelwerte der in der *zweiten* Linie stehenden Produkte allerdings = Null, weil die *verschiedenen* (mit ungleichen Nummern $_1$ und $_2$ u. s. w. bezeichneten) $\varDelta l$ unter sich unabhängig sind. Es bleibt also nur die erste Linie von (7) weiter zu betrachten, und diese giebt den Mittelwert:

$$\frac{[\varDelta x \varDelta y]}{n} = [\alpha \beta]\, m^2 \tag{8}$$

Die übrigen in (6) auftretenden, quadratischen Mittelwerte haben bereits bekannte Bedeutungen, nämlich:

$$\frac{[\varDelta x \varDelta x]}{n} = m_x^2 = [\alpha \alpha]\, m^2 \quad \text{und} \quad \frac{[\varDelta y \varDelta y]}{n} = m_y^2 = [\beta \beta]\, m^2$$

Setzt man dieses nebst (8) in (6) ein, so wird:

$$\frac{[\varDelta F \varDelta F]}{n} = M^2 = m^2 \left\{ f_1^2 [\alpha \alpha] + f_2^2 [\beta \beta] + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] \right\} \tag{9}$$

oder auch:

$$M^2 = (f_1 m_x)^2 + (f_2 m_y)^2 + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta]\, m^2 \tag{10}$$

Würde man also die unrichtige Formel (2) angewendet haben, so würde das Glied $2 f_1 f_2 [\alpha \beta]\, m^2$, welches die Zusammenwirkung der beiden Fehler m_x und m_y ausdrückt, verloren gegangen sein.

Statt (9) kann man auch schreiben (wegen (14) § 16. S. 42):

$$M^2 = m^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[a a . 1]} + 2 \frac{f_1 f_2}{[a b . 1]} + \frac{f_2^2}{[b b . 1]} \right\} \tag{11}$$

Die Gleichung (9) kann man ausserdem noch in eine andere Gestalt bringen mit Benützung der Beziehungen, welche am Schluss von § 16. S. 42 zusammengestellt sind, nämlich:

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{[b\,b]}{D} \qquad [\beta\,\beta] = \frac{[a\,a]}{D} \qquad [\alpha\,\beta] = \frac{-[a\,b]}{D}$$

damit wird (9):

$$\frac{M^2}{m^2} = \frac{1}{P} = \frac{1}{D}\left\{f_1^2\,[b\,b] + f_2^2\,[a\,a] - 2\,f_1 f_2\,[a\,b]\right\} \tag{12}$$

und dieses kann auch noch so umgeformt werden:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{13}$$

wobei

$$[f_2\,.\,1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,f_1. \tag{14}$$

§ 18. Mittlerer Gewichtseinheitsfehler m.

Wenn die bei der Ausgleichung übrig bleibenden Widersprüche v wahre Beobachtungsfehler wären, so hätte man den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung zu berechnen:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} \quad (?) \tag{1}$$

wo n die Anzahl der Beobachtungen ist. Es ist nun aber noch eine Abänderung vorzunehmen, ähnlich wie früher beim arithmetischen Mittel (wo der Nenner $n-1$ statt n wurde).

Wir machen wieder, wie beim arithmetischen Mittel, S. 16, Unterscheidung zwischen den wahrscheinlichsten Werten x, y und den wahren Werten X, Y der Unbekannten, ebenso wie zwischen den wahrscheinlichsten Fehlern v und den wahren Fehlern $\varDelta$ der Beobachtungen l, nämlich:

$$v = a\,x + b\,y + l$$
$$\varDelta = a\,X + b\,Y + l$$
$$\varDelta = a\,(X - x) + b\,(Y - y) + v$$
$$[\varDelta\,\varDelta] = [a\,a]\,(X-x)^2 + 2\,[a\,b]\,(X-x)\,(Y-y) + 2\,[a\,v]\,(X-x) + [b\,b]\,(Y-y)^2 + 2\,[b\,v]\,(Y-y) + [v\,v]$$

Nach (3a) § 13. S. 35 ist aber $[a\,v] = 0$ und $[b\,v] = 0$, also:

$$[\varDelta\,\varDelta] = [v\,v] + [a\,a]\,(X-x)^2 + [b\,b]\,(Y-y)^2 + 2\,[a\,b]\,(X-x)\,(Y-y) \tag{2}$$

Für $(X-x)^2$ und $(Y-y)^2$ kann man die mittleren Fehlerquadrate $(m_x)^2$ und $(m_y)^2$ setzen, d. h. nach (15) § 16. S. 42:

$$(X-x)^2 = \frac{[b\,b]}{D}\,m^2 \qquad (Y-y)^2 = \frac{[a\,a]}{D}\,m^2 \tag{3}$$

und für das Produkt $(X-x)\,(Y-y)$ hat man nach (8) § 17. S. 43 zu setzen:

$$(X-x)\,(Y-y) = [\alpha\,\beta]\,m^2 = -\frac{[a\,b]}{D}\,m^2 \tag{4}$$

Setzt man also (4) und (3) in (2), so erhält man:

$$[\varDelta\,\varDelta] = [v\,v] + \frac{m^2}{D}\,([a\,a]\,[b\,b] + [b\,b]\,[a\,a] - 2\,[a\,b]\,[a\,b])$$

also wegen der Bedeutung von D nach S. 42:

$$[\varDelta\,\varDelta] = [v\,v] + 2\,m^2$$

Die Division mit n giebt das richtige mittlere Fehlerquadrat m^2, d. h.

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = m^2 = \frac{[v\,v]}{n} + 2\frac{m^2}{n}$$

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-2} \qquad m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} \tag{5}$$

Diese letzte Gleichung hat an Stelle der früheren (1) zu treten. Vergleicht man den Nenner $n-2$ mit dem früher beim arithmetischen Mittel (11) § 7. S. 16 gültigen Nenner $n-1$, so findet Übereinstimmung statt mit der dort angegebenen Erklärung, dass nur die Zahl der *überschüssigen* Beobachtungen bei der Berechnung des mittleren Fehlers massgebend ist.

(Man kann hiernach bereits vermuten, dass bei 3 Unbekannten der Nenner $n-3$, allgemein bei u Unbekannten $n-u$ heissen wird, was wir später beweisen werden.)

§ 19. Coëfficienten-Berechnung und Summenproben.

Die Ausrechnung der Quadrate $a\,a$ und der Produkte $a\,b$ u. s. w. kann, je nachdem die Zahlen einfach oder mit vielen Stellen angegeben sind, verschieden geschehen.

Die Quadrate bildet man jedenfalls mit einer Quadrattafel, wie eine solche z. B. auf S. [2]—[6] unseres Anhangs mit 3stelligem Argument gegeben ist. Für grössere Genauigkeit (welche aber bei guter Vorbereitung der Rechenform selten nötig ist) hat man ausführlichere Quadrattafeln als Beigaben zahlreicher Logarithmentafeln und anderer Tabellenwerke.

Die Produkte $a\,b$ u. s. w. kann man direkt ausmultiplizieren, wie in den Beispielen S. 37 und S. 39 mit $[b\,l]$ geschehen ist. Bei mehrstelligen Zahlen kann man sich der Produktentafel, der Rechenmaschine u. s. w. bedienen; es giebt aber auch ein sehr gutes Verfahren, die Produkte mit der Quadrattafel zu bestimmen. Es ist nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

woraus man findet:

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)\,(a+b)] - ([a\,a] + [b\,b])}{2}, \tag{1}$$

und da man $[a\,a]$ sowie $[b\,b]$ ohnehin braucht, so ist nur noch $[(a+b)\,(a+b)]$, d. h. die Summe der Quadrate $(a+b)^2$ auszurechnen. Wir wollen dieses Verfahren an dem Beispiele (10) § 14. S. 39 zeigen, wobei b absolut (d. h. nicht $-b$) genommen ist:

b	l	$b+l$	b^2	l^2	$(b+l)^2$
1,20	0,45	1,65	1,44	0,20	2,72
2,25	0,22	2,47	5,06	0,05	6,10
2,71	0,16	2,87	7,34	0,03	8,24
3,48	0,75	4,23	12,11	0,56	17,89
4,07	— 0,07	4,00	16,56	0,00	16,00
4,92	1,37	6,29	24,21	1,88	39,56
7,08	0,45	7,53	50,13	0,20	56,70
7,34	1,10	8,44	53,88	1,21	71,23
7,69	0,45	8,14	59,14	0,20	66,26
40,74	4,88	45,62	229,87	4,33	284,70
45,62			234,20		— 234,20
					50,50 = 2 $[b\,l]$
					25,25 = $[b\,l]$

Dieses stimmt hinreichend mit 25,26 nach S. 39, und damit ist nicht nur $[b\,l]$, sondern auch $[b\,b]$ und $[l\,l]$ kontrolliert.

Summenproben. **Man kann die Berechnung der Coëfficienten $[aa]$ $[ab]$ u. s. w. auch durch Summenglieder kontrollieren, und man erhält dadurch eine durch die ganze Rechnung hindurch laufende, von Linie zu Linie wirksame Probe, welche namentlich bei vielen Unbekannten sich ungemein nützlich erweist.**

Ausser den Gliedern $a\ b\ l$ jeder Fehlergleichung führt man noch deren Summe ein, oder auch die *negative* Summe, damit immer alles auf Null ausgehen muss. Wir setzen:

$$a_1 + b_1 + l_1 + s_1 = 0$$
$$a_2 + b_2 + l_2 + s_2 = 0$$

dann ist auch:

$$[aa] + [ab] + [al] + [as] = 0$$
$$[ab] + [bb] + [bl] + [bs] = 0$$
$$[al] + [bl] + [ll] + [ls] = 0$$
$$[as] + [bs] + [ls] + [ss] = 0$$

Dieses wollen wir durch Linien in folgender Weise andeuten:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
[aa] & [ab] & [al] & [as] \\ \hline
 & [bb] & [bl] & [bs] \\ \cline{2-4}
 & & [ll] & [ls] \\ \cline{3-4}
 & & & [ss]
\end{array}$$

Man bekommt also ein Coëfficienten-System, wie wenn statt 2 Unbekannten deren 3 vorhanden wären. Dem entsprechend rechnet man auch weiter nicht nur $[bb.1]$, $[bl.1]$, sondern auch $[bs.1]$, $[ls.1]$ u. s. w., d. h.:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] \qquad [ll.1] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al]$$

$$[bs.1] = [bs] - \frac{[ab]}{[aa]}[as] \qquad [ls.1] = [ls] - \frac{[al]}{[aa]}[as] \qquad [ss.1] = [ss] - \frac{[as]}{[aa]}[as]$$

Hiemit hat man wieder Proben, nämlich:

$$\begin{array}{l|l|l}
[bb.1] & [bl.1] & [bs.1] \\ \hline
 & [ll.1] & [ls.1] \\ \cline{2-3}
 & & [ss.1]
\end{array}$$

Die Richtigkeit der hierdurch angedeuteten Probegleichungen lässt sich leicht einsehen, z. B.:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]$$
$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]$$
$$0 = [ab] - \frac{[ab]}{[aa]}[aa]$$

$$[bb.1] + [bl.1] = -[bs] - \frac{[ab]}{[aa]}(-[as]) = -[bs.1]$$

$$[bb.1] + [bl.1] + [bs.1] = 0$$

und ebenso: $[bl.1] + [ll.1] + [ls.1] = 0$

" " $[bs.1] + [ls.1] + [ss.1] = 0$

So geht es auch noch weiter:

$$[ll.2] = [ll.1] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]$$

$$[ls.2] = [ls.1] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1] \qquad [ss.2] = [ss.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]}[bs.1]$$

Die hiebei gültigen Proben sind angedeutet durch:

$$\begin{array}{c|c} [ll.2 & [ls.2] \\ \hline & [ss.2] \end{array}$$

d. h. diese 3 letzten Glieder müssen einander gleich werden, wie sich in ähnlicher Weise, wie oben bei den Coëfficienten [... 1], leicht nachweisen lässt.

Nun kommt noch die wichtige Probe, dass $[ll.2] = [vv]$ werden muss, indem $[vv]$ durch Quadrieren der einzelnen auszurechnenden v bestimmt wird.

Die mitgeteilten sehr zahlreichen Proben sind bei einiger Übung, wenn nur 2 Unbekannte vorhanden sind, teilweise überflüssig, und man kann sich hier, so weit die Elimination in Frage kommt, wohl mit der Probe begnügen, dass $[ll.2]$, dessen Bestimmung bei y *und* bei x vorkommt, hiebei übereinstimmend erhalten werden muss. Oft wird man die *quadratischen* Schlussglieder $[ss]$ $[ss.1]$ $[ss.2]$ weglassen können; wir haben diese letzten Probeglieder mehr der Symmetrie der Formeln wegen als wegen des praktischen Bedürfnisses aufgenommen.

Andererseits kann wohl auch ein Rechner, der seiner Sache sonst sicher ist, sich mit der *einen* Probe begnügen:

$$\begin{aligned} [ss] = [aa] &+ 2[ab] + 2[al] \\ &+ \;\; [bb] + 2[bl] \\ &+ \;\; [ll] \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} = [aa] &+ [ab] + [al] \\ + [ab] &+ [bb] + [bl] \\ + [al] &+ [bl] + [ll] \end{aligned}$$

Wenn alle diese Proben stimmen, so kann man mit einer an absolute Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die Fehlerlosigkeit der Rechnung behaupten

Unsere Zahlenbeispiele von § 13. und § 14. hatten die Eigentümlichkeit, dass alle Coëfficienten $a = 1$ sind. Dieser Fall kommt häufig vor und erleichtert die Ausrechnung der Summen-Coëfficienten sehr, denn es ist dann, bei n Beobachtungen,

$$[aa] = n \qquad [ab] = [b] \qquad [al] = [l]$$

und nur $[bb]$ $[bl]$ und $[ll]$ müssen besonders berechnet werden, wozu dann kaum Summenglieder s zu nehmen sind, während die Elimination wohl mit Summengliedern gemacht werden kann.

§ 20. Eliminations-Beispiel mit 2 Unbekannten.

Wir nehmen das Beispiel von § 14., welches wir dort nach gewöhnlichen algebraischen Methoden behandelt haben, nochmals vor.

Das Coëfficienten-System von S. 39 nebst Summengliedern ist:

$$\left.\begin{array}{cccc} a & b & l & s \\ +9{,}00 & -\;40{,}74 & +\;4{,}88 & +\;26{,}86 \\ & +229{,}87 & -25{,}26 & -163{,}87 \\ & & +\;4{,}33 & +\;16{,}05 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Indem wir vorerst unentschieden lassen, ob man die Werte $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ $\frac{[ab]}{[aa]}[al]$ u. s. w. unmittelbar oder mit dem Rechenschieber oder mit Logarithmen oder sonst wie ausrechnen will, erhalten wir die folgende Anordnung, wobei man vorerst annehmen mag, dass die *klein gedruckten Zahlen* nötigenfalls auf einem Nebenblatt berechnet worden sind.

				Probe
$[aa] = +9{,}00$	$[ab] = -\ 40{,}74$	$[al] = +\ 4{,}88$	$[as] = +\ 26{,}86$	0,00
	$[bb] = +229{,}87$	$[bl] = -\ 25{,}26$	$[bs] = -163{,}87$	0,00
	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab] = -\ 184{,}42$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[al] = +\ 22{,}09$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[as] = +\ 121{,}58$	
		$[ll] = +\ 4{,}33$	$[ls] = +\ 16{,}05$	0,00
		$-\frac{[al]}{[aa]}[al] = -\ 2{,}65$	$-\frac{[al]}{[aa]}[as] = -\ 14{,}56$	
	$[bb.1] = +\ 45{,}45$	$[bl.1] = -\ 3{,}17$	$[bs.1] = -\ 42{,}29$	−0,01
		$[ll.1] = +\ 1{,}68$	$[ls.1] = +\ 1{,}49$	0,00
		$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1] = -\ 0{,}22$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1] = -\ 2{,}95$	
		$[ll.2] = +\ 1{,}46$	$[ls.2] = -\ 1{,}46$	0,00

$$\left.\begin{array}{ll} y = -\dfrac{-\ 3{,}17}{+\ 45{,}45} = -\ 0{,}06975 & \\ p_y = 45{,}45 \qquad [vv] = 1{,}46 & \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Für die umgekehrte Rechnung, nämlich Elimination von y und Bestimmung von x nebst p_x, schreiben wir nur noch die Zahlen, und zwar mit einer Stelle weniger als vorher:

b	a	l	s	Probe
+ 229,9	− 40,7	− 25,3	− 163,9	0,0
	+ 9,0	+ 4,9	+ 26,8	0,0
	− 7,2	− 4,5	− 29,0	
		+ 4,3	+ 16,1	0,0
		− 2,8	− 18,0	
	+ 1,8	+ 0,4	− 2,2	0,0
		+ 1,5	− 1,9	0,0
		− 0,1	+ 0,5	
		+ 1,4	− 1,4	0,0

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{+\ 0{,}4}{+\ 1{,}8} = -\ 0{,}22 \quad (\text{genauer} = -\ 0{,}226) \\ p_x = 1{,}8 \qquad [vv] = 1{,}4 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Wenn es sich um eine Rechnung mit so wenigen Stellen wie hier handelt, so macht man die Rechnung am besten mit dem *Rechenschieber*. Man stellt für die erste Linie den Quotienten $\frac{40{,}7}{229{,}9}$ ein, und multipliziert damit der Reihe nach:

40,7 25,3 163,9, d. h. man liest die 3 Produkte:

$$\frac{40{,}7}{229{,}9}\,40{,}7 = 7{,}2 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,25{,}3 = 4{,}5 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,163{,}9 = 29{,}9$$

mit *einer* Einstellung des Schiebers, am Läufer ab.

Um die Vorzeichen — oder + der Grössen $-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ u. s. w. richtig anzusetzen, kann man in jedem einzelnen Falle die verschiedenen einwirkenden + und — abzählen; man gelangt aber bald zu einer übersichtlichen mechanischen Regel, die wir an der Hand des vorstehenden Beispiels bilden wollen:

a)	+	−	+	+
b)		+	−	−
		b.1) −	+	+
l)			+	+
			l.1) −	−

1) Die Vorzeichen einer Linie *b*.1) oder *l*.1) haben jedenfalls dieselbe Folge wie die darüberstehenden Vorzeichen der ersten Linie *a*).

2) Die Vorzeichen einer Linie *b*.1) oder *l*.1) beginnen immer mit —, daraus folgt:

3) Wenn über *b*.1) in der Linie *a*) das Zeichen — steht, so gehen die Vorzeichen von *a*) unmittelbar nach *b*.1) über; wenn dagegen über *b*.1) in der Linie *a*) das Zeichen + steht, so gehen die Vorzeichen von *a*) sämtlich umgekehrt nach *b*.1) über.

Wir wollen diese Regel an einem Beispiel mit 5 Elementen weiter veranschaulichen:

+	+	−	+	−
	+	−	−	+
	−	+	−	+
		+	−	−
		−	+	−
			+	−
			−	+

Wenn die Rechenschieber-Genauigkeit nicht ausreicht, so rechnet man logarithmisch, wie folgendes Schema (S. 50) zeigt.

Die logarithmische Auflösung der Normalgleichungen nach dem Schema S. 50 nimmt folgenden Verlauf:

Die vorher berechneten Coëfficienten $[aa]$ $[ab]$ u. s. w. werden an die durch die Zeilen- und Spaltenbezeichnung bestimmten Stellen geschrieben, z. B. die Zeile [*b* und die Spalte *l*] bestimmen durch ihr Zusammentreffen die Stelle für $[bl] = -25{,}26$.

Nach diesem werden die 4 Logarithmen in eine Linie gesetzt:

$log\,[aa] = 0.95424$ $\quad log\,[ab] = 1.61002$ $\quad log\,[al] = 0.68842$ $\quad log\,[as] = 1.42911$

Die weitere logarithmische Rechnung geschieht mit Hilfe von *Zetteln* (Papierstreifen), welche unten auf S. 50 angegeben sind. Man kann das, was die *zwei* Zettel *a.* und *b.* enthalten, natürlich praktisch wohl auch auf *einen* Papierstreifen schreiben, in der Beschreibung reden wir jedoch von *zwei* getrennten Zetteln.

Zettel *a.* wird so erhalten: Man legt einen Papierstreifen über die Linie *log* [*a* und schreibt über 0.95424 die dekadische Ergänzung 9.45076. Dieses ist $log\,\frac{1}{[aa]}$ und wird zur Berechnung von $log\,\frac{[ab]}{[aa]}$ und von $log\,\frac{[al]}{[aa]}$ gebraucht. Hiezu schiebt man den Zettel um eine Spalte nach rechts, so dass 9.04576 über 1.61002 kommt, die Summe beider 0.65578 schreibt man auf den Zettel rechts. Der Zettel wird abermals um eine Spalte nach rechts geschoben und giebt 9.04576 über 0.68842, zusammen 9.73418.

Damit ist der Zettel *a.* an sich fertig, und kann zur Berechnung von $\frac{[ab]}{[aa]}\,[ab]$ $\frac{[ab]}{[aa]}\,[al]$ u. s. w. gebraucht werden. Zu diesem Zweck kommt der Zettel wieder in

Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen. (4)

	$a]$	$b]$	$l]$	$s]$	Proben.
$[a$	$+9,00$	$-40,74$	$+4,88$	$+26,86$	0,00
$log\,[a$	0.95424	1.61002	0.68842	1.42911	
$log\left(\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right)[a$		2.26580	1.34420	2.08489	
$log\left(\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\right)[a$			0.42260	1.16329	
$[b$		$+229,87$	$-25,26$	$-163,87$	0,00
$-\left(\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right)[a$		$-184,42$	$+22,09$	$+121,58$	
$[l$			$+4,33$	$+16,05$	0,00
$-\left(\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\right)[a$			$-2,65$	$-14,56$	
		$b\,.\,1]$	$l\,.\,1]$	$s\,.\,1]$	
$y = -\frac{-3,17}{+45,45}$	$[b$	$+45,45$	$-3,17$	$-42,29$	$-0,01$
$= +0,06975$	$log\,[b$	1.65753	0.50106	1.62624	
	$log\left(\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\right)[b$		9.34459	0.46977	
	$[l$		$+1,68$	$+1,49$	0,00
	$-\left(\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\right)[b$		$-0,22$	$-2,95$	
			$l\,.\,2]$	$s\,.\,2]$	
		$[l$	$+1,46$	$-1,46$	0,00
Zettel *a.*	$log\,\frac{1}{[a\,a]}$ 9.04576	$log\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ 0.65578	$log\,\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ 9.73418		
Zettel *b.*		$log\,\frac{1}{[b\,b\,.\,1]}$ 8.34246	$log\,\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}$ 8.84353		

$$8{,}84353 = log\,y$$
$$0{,}06975 = y$$

die Normallage und liefert durch allmähliches Schieben nach rechts, indem 0.65578 nach abwärts addiert wird, folgendes:

0.65578	0.65578	0.65578
1.61002	0.68842	1.42911
2.26580	1.34420	2.08489

in ähnlicher Weise wird auch vollends erhalten:

9.73418	9.73418
0.68842	1.42911
. . . .	. . . .
0.42260	1.16329

Zu den so erhaltenen Logarithmen

2,26580	1.34420	2.08489
	0.42260	1.16329

schlägt man die Nummeri auf, und setzt dieselben in die vorbereiteten Stellen darunter:

$$\begin{array}{ccc} -184{,}42 & +22{,}09 & +121{,}58 \\ & -2{,}65 & -14{,}56 \end{array}$$

Die Vorzeichen — oder + bestimmt man hiebei nach der auf S. 49 bereits angegebenen Regel.

Addiert man diese Beträge algebraisch zu den darüberstehenden Coëfficienten $[bb] = +229{,}87$ u. s. w., so erhält man:

$$\begin{array}{ccc} [bb.1] = +45{,}45 & [bl.1] = -3{,}17 & [bs.1] = -42{,}29 \\ & [ll.1] = +1{,}68 & [ls.1] = +1{,}49 \end{array}$$

Zu diesem erstmals reduzierten System gehört der zweite Zettel *b*.

Verfährt man mit diesem ebenso wie vorher mit dem Zettel *a*., so ist die Elimination vollendet, und auf dem Zettel *b*. selbst hat man:

$$log \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = log\, y \text{ (abgesehen vom Vorzeichen).}$$

Um auch x zu erhalten, kann man das erhaltene y in eine der Normalgleichungen

$$\begin{array}{l} +9{,}00\,x \quad -40{,}74\,y \quad +4{,}88 \;\; = 0 \\ -40{,}74\,x + 229{,}87\,y - 25{,}26 = 0 \end{array}$$

einsetzen, und erhält damit $x = -0{,}226$. Wenn man aber auch das Gewicht von x haben will, so stellt man die ganze Elimination um, so dass y die erste und x die zweite Unbekannte wird, wie schon auf S. 48 angegeben ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll} x = -0{,}226 & [ll.2] = 1{,}46 & y = +0{,}06975 \\ [aa.1] = +1{,}78 & & [bb.1] = +45{,}45 \end{array}\right\} \quad (5)$$

$[ll.2] = 1{,}46$ stimmt genügend mit dem schon früher (am Schluss von § 14. (13) S. 39) berechneten $[vv] = 1{,}4695$, man hat also jetzt den mittleren Gewichtseinheitsfehler

$$m = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \pm 0{,}46^{mm} \quad (6)$$

und damit auch die mittleren Fehler von x und y:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{1{,}78}} = \pm 0{,}34^{mm} \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{45{,}45}} = \pm 0{,}06797$$

also $\quad x = -0{,}23^{mm} \pm 0{,}34^{mm} \qquad y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797$

$$y' = \frac{y}{100} = +0{,}0006975 \pm 0{,}0006797$$

Näherung	762,00	Näherung	+ 0,08625
Resultat	$761{,}77^{mm} \pm 0{,}34^{mm}$	Resultat	$+0{,}0869475 \pm 0{,}006797$

also die gesuchte Formel:

$$\left.\begin{array}{l} B = 761{,}77^{mm} - 0{,}08695\,h \\ \quad\;\; \pm 0{,}34 \quad \pm 0{,}00680\,h \end{array}\right\} \quad (7)$$

Dieses stimmt mit (12) § 14. S. 39 überein; unser neues Resultat hat aber gegenüber jenem den grossen Vorzug, dass nicht bloss die Coëfficienten 761,77 und 0,08695 selbst, sondern auch deren mittlere Fehler bestimmt sind.

(Die im vorstehenden beschriebene Elimination mit *Schiebe-Zetteln*, welche Verfasser im wesentlichen in dieser Form als Schüler von Prof. *Schoder* gelernt hat, haben wir seit 20 Jahren in Hunderten von Fällen praktisch erprobt.)

§ 21. Beispiel eines Funktions-Gewichtes.

Um auch eine Anwendung von § 17. zu haben, müssen wir vor allem den Coëfficienten $[ab.1] = \frac{1}{[\alpha\beta]}$ berechnen, wozu die Formel dient:

$$[ab.1] = [ab] - \frac{[aa]}{[ab]}[bb] \quad \text{oder} \quad = [ab] - \frac{[bb]}{[ab]}[aa]$$

Wir haben dieses zweifach geschrieben, weil diese beiden Formen sich den Eliminationen von x und von y anschliessen.

Um dieses deutlich zu zeigen, setzen wir die Anfänge jener Eliminationen von S. 48 und S. 50 nochmals her, und fügen die Berechnung von $[ab.1]$ beidemale bei:

	a]	b]	l]		b]	a]	l]
[a	+ 9,0	— 40,7	+ 4,9	[b	+ 229,9	— 40,7	— 25,3
[b	— 40,7	+ 229,9	— 25,3	[a	— 40,7	+ 9,0	+ 4,9
	+ 50,8.	— 184,4	+ 22,1		+ 50,8	— 7,2	— 4,5
	+ 10,1	+ 45,5	— 3,2		+ 10,1	+ 1,8	+ 0,4
	= [ab.1]	= [bb.1]			= [ba.1]	[aa.1]	

Es soll nun für die Höhe $h = 1000^m$ der mittlere Barometerstand B und dessen mittlerer Fehler, bzw. Gewicht, berechnet werden. Es handelt sich also um die Funktion:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \quad \text{oder} \quad = 761{,}77 - 8{,}695\left(\frac{h}{100}\right)$$

mit $h = 1000$:

$$B = 761{,}77 - 10 \times 8{,}695 = X - 10\,Y = 674{,}82 \tag{1}$$

Dieses entspricht der Funktion (1) § 17. S. 43:

$$F = f_1 x + f_2 y \quad \text{d. h.} \quad f_1 = 1 \quad f_2 = -10.$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers M der Funktion (1) haben wir nach (11) § 17. S. 43 die Formel:

$$M^2 = m^2 \left\{\frac{f_1^2}{[aa.1]} + 2\frac{f_1 f_2}{[ab.1]} + \frac{f_2^2}{[bb.1]}\right\}$$

welche mit Einsetzung aller Zahlenwerte giebt:

$$M^2 = 0{,}46^2 \left\{\frac{1}{1{,}8} - \frac{20}{10{,}1} + \frac{100}{45{,}5}\right\} = 0{,}46^2 \times 0{,}77$$

$$M = \pm 0{,}40^{mm}$$

also $$B_{1000} = 674{,}82^{mm} \pm 0{,}40^{mm}$$

§ 22. Ungleiche Gewichte.

Bisher wurde angenommen, dass alle Beobachtungen l von vornherein gleich genau seien. Wenn dieses nicht der Fall ist, haben die einzelnen l verschiedene Gewichte. Wir wollen annehmen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Beobachtungen} & l_1 & l_2 & l_3 \ldots l_n \\ \text{mit Gewichten} & p_1 & p_2 & p_3 \ldots p_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

Die Fehlergleichungen seien dieselben wie früher:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & = p_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 & = p_3 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n & = p_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

Dann hat man nicht mehr $[v v]$ zu einem Minimum zu machen, sondern:

$$[p v v] = \text{Minimum} \tag{3}$$

Dieses giebt die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [p a a] x + [p a b] y + [p a l] &= 0 \\ [p a b] x + [p b b] y + [p b l] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (3) § 13. S. 35 nur dadurch, dass in jeder Klammer p zugesetzt ist; eine weitere Änderung gegen früher tritt nicht ein Auch bei der Elimination tritt z. B. $[p b b . 1]$ an die Stelle von $[b b . 1]$ u. s. w. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird:

$$m = \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 2}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[p l l . 2]}{n - 2}} \tag{5}$$

Dieser Fehler m gehört im allgemeinen zu keiner wirklichen Beobachtung, sondern zu einer fingierten Beobachtung, welche das Gewicht $p = 1$ hat.

Wenn die Gewichtswurzeln $\sqrt{p}$ bequeme Zahlen sind, so ist es oft nützlich, statt geradezu $[p a a]$ $[p a b]$ u. s. w. auszurechnen, so zu verfahren:

Man multipliziert alle Coëfficienten a b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen mit $\sqrt{p}$, und denkt sich die Fehlergleichungen (2) nun so geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 \sqrt{p_1} &= a_1 \sqrt{p_1} + b_1 \sqrt{p_1} + l_1 \sqrt{p_1} \\ v_2 \sqrt{p_2} &= a_2 \sqrt{p_2} + b_2 \sqrt{p_2} + l_2 \sqrt{p_2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

dann giebt die Quadrierung von selbst die Summe $[p v v]$ nach (3) und die Normalgleichungen (4).

Man kann diese Sache auch so auffassen: Mögen die Summen direkt nach (4) oder nach (6) entstanden sein; man kann immer dem *Zeichen* $[a a]$ die Bedeutung unterlegen:

$$p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + p_3 a_3^2 + \ldots \quad = [a a] \quad \text{u. s. w.} \tag{7}$$

und damit gelten alle bisherigen Formeln auch für ungleiche Gewichte.

Die Coëfficienten α β in § 16. erhalten hiebei auch veränderte Bedeutungen, nämlich entsprechend (1) S. 41 haben wir nun:

$$x = \frac{\alpha_1}{\sqrt{p_1}} (l_1 \sqrt{p_1}) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{p_2}} (l_2 \sqrt{p_2}) + \cdots \tag{8}$$

$$\frac{1}{p_x} = \left[\frac{\alpha \alpha}{p}\right] \quad , \quad \frac{1}{p_y} = \left[\frac{\beta \beta}{p}\right] \tag{9}$$

Die Weiterrechnung nach § 16. führt aber abermals auf die Formel:

$$p_y = [p b b . 1], \tag{10}$$

so dass man also überall sich nicht weiter um die Gewichte zu kümmern hat, sobald die Summen-Coëfficienten entweder nach (4) unmittelbar oder nach (6) berechnet vorliegen.

Mittlere Fehler a priori angenommen.

Wenn die Genauigkeitsverhältnisse der Beobachtungen und der Fehlergleichungen geradezu durch mittlere Fehler (nach Schätzung a priori oder sonst wie) angenommen sind, so sind die Gewichte p den Quadraten dieser mittleren Fehler umgekehrt proportional zu nehmen, und die Rechnung ist nach den Formeln (1) bis (5), oder (6) bis (10) zu führen; indessen kann man die Formeln auch so schreiben, dass nicht von Gewichten p, sondern nur von mittleren Fehlern m die Rede ist, und diese mehr anschauliche Form empfiehlt sich in vielen Fällen. Wir haben so:

Fehlergleichungen: Mittlere Fehler der l *vor* der Ausgleichung:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & \pm m_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & \pm m_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n & \pm m_n \end{array}\right\} \quad (11)$$

Ausgleichungsprinzip:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \quad (12)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a\,a}{m\,m}\right] x + \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{a\,l}{m\,m}\right] = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] x + \left[\frac{b\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{b\,l}{m\,m}\right] = 0 \end{array}\right\} \quad (13)$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler *nach* der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{l\,l}{m\,m}\,.\,2\right]} \quad (14)$$

Die mittleren Fehler der Werte von l *nach* der Ausgleichung sind bzw.:

$$m_1' = \frac{m}{1} m_1 \quad , \quad m_2' = \frac{m}{1} m_2 \ \ldots \ m_n' = \frac{m}{1} m_n \quad (15)$$

Wenn die $m_1\ m_2\ \ldots\ m_n$ schon *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so wird $m = 1$ und $m_1' = m_1 \quad m_2' = m_2$ u. s. w.

Um zu einer weiteren Betrachtung in Bezug auf Gewichte zu gelangen, gehen wir von dem einfachen Fall aus, dass eine Fehlergleichung das Gewicht 2 und alle anderen das Gewicht 1 haben, also etwa:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & p = 1 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 & p = 2 \end{array}\right\} \quad (16)$$

dann ist die erste Normalgleichung:

$$(a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_3^2)\,x + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2\,a_3 b_3)\,y + (a_1 l_1 + a_2 l_2 + 2\,a_3 l_3) = 0$$

Dasselbe würde man auch erhalten, wenn man die dritte Fehlergleichung doppelt einsetzte, und dann mit folgendem System weiter rechnete:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & p = 1 \\ \left\{\begin{array}{l} v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ v_4 = a_3 x + b_3 y + l_3 \end{array}\right. & \begin{array}{l} p = 1 \\ p = 1 \end{array} \end{array}\right\} \quad (17)$$

Aus beiden Systemen (16) und (17) erhält man dieselben Unbekannten $x\ y$ mit denselben Gewichten und derselben Summe $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$.

Wenn man aber die mittleren Fehler berechnet, so darf man bei (17) *nicht* 4 Gleichungen in Rechnung bringen, sondern nur 3, d. h. es ist:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{3-2} \text{ und } \textit{nicht} = \frac{[v\,v]}{4-2} \quad (17a)$$

Wenn umgekehrt die Gleichungen (17) den Beobachtungen entsprechen, so darf man zwar zur Ausgleichung selbst statt (17) ein System von der Form (16) anwenden, bei der Fehlerberechnung ist aber die ursprüngliche Zahl der Fehlergleichungen, d. h. der Beobachtungen, massgebend.

Wenn 2 Fehlergleichungen mit gleichen Coëfficienten $a, b \ldots$, aber mit ungleichen Absolutgliedern l, und mit ungleichen Gewichten vorliegen:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_2 & \quad " \quad = p_2 \end{array}\right\} \quad (18)$$

so geben diese nach gewöhnlichem Verfahren folgende Beiträge zu den Coëfficienten der Normalgleichungen:

$$p_1 a^2 + p_2 a^2 = (p_1 + p_2) a^2 \,, \; (p_1 + p_2) ab \ldots p_1 a l_1 + p_2 a l_2 = a (p_1 l_1 + p_2 l_2) \quad (19)$$

Beitrag zu dem Fehlerquadrat-Gliede: $(p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2)$ (20)

Wir wollen nun statt der *zwei* Gleichungen (18) die *eine* folgende schreiben:

$$v' = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2}{p_1 + p_2} \,, \quad \text{Gewicht} = p_1 + p_2 \quad (18')$$

Diese *eine* Gleichung giebt zu den Normalgleichungen folgende Beiträge:

$$(p_1 + p_2)\, a^2 \quad , \quad (p_1 + p_2)\, a\, b \ldots \quad a\, (p_1 l_1 + p_2 l_2) \quad (19')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(p_1 l_1 + p_2 l_2)^2}{p_1 + p_2} \quad (20')$$

Die Coëfficienten (19) und (19′) sind identisch, dagegen die Beiträge zur Quadratsumme $[p\,l\,l]$ sind in (20) und in (20′) nicht identisch, und nur wenn $l_1 = l_2$ ist, geht (20′) in (20) über.

Dieses Resultat heisst in Worten: Man kann zwei Fehlergleichungen von der Form (18), d. h. mit gleichen Coëfficienten aber ungleichen Absolutgliedern, durch *eine* Gleichung (18′) ersetzen, soweit es sich nur um die Unbekannten $x\ y\ z \ldots$ selbst und um deren Gewichte handelt, dagegen für die Berechnung mittlerer Fehler giebt die Gleichung (18′) keinen richtigen Ersatz der zwei ursprünglichen Gleichungen, sondern nur eine etwa näherungsweise zulässige Genauigkeitsbestimmung. In dem Nenner des mittleren Fehlerquadrats muss aber jedenfalls die Gleichung (18′) als *zwei* Gleichungen zählen.

§ 23. Nicht lineare Funktionen.

Wenn die Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten nicht durch lineare Gleichungen dargestellt sind, so kann man dennoch die Ausgleichung auf lineare Fehlergleichungen zurückführen in folgender Weise:

Man habe die Beobachtungen

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \ldots L_n$$

welche mit den Unbekannten X und Y in folgenden Beziehungen stehen:

Es *soll* sein:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y) - L_1 = 0 \\ F_2(X, Y) - L_2 = 0 \\ F_3(X, Y) - L_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_n(X, Y) - L_n = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, und es gelten statt derselben die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = F_1(X, Y) - L_1 \\ v_2 = F_2(X, Y) - L_2 \\ v_3 = F_3(X, Y) - L_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ v_n = F_n(X, Y) - L_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Schreibt man diese Gleichungen in die Form:

$$F(X, Y) - (L + v) = 0 \quad (3)$$

so ergiebt die Vergleichung mit (1), dass v eine Verbesserung der Beobachtung L ist, welche den Widerspruch in der betreffenden Gleichung zum Verschwinden bringt. Wenn X und Y die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind, so sind die Werte v die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Beobachtungen L, oder, um alle Fragen der Wahrscheinlichkeit zu vermeiden, nennt man v die „übrigbleibenden Fehler" der Ausgleichung.

Versteht man unter (X) und (Y) Näherungswerte von X und Y, und unter x und y deren Korrektionen, also

$$X = (X) + x \qquad Y = (Y) + y \tag{4}$$

so kann man mit Hilfe des *Taylor*schen Satzes unter Beschränkung auf die ersten Potenzen von x und y die Funktion F so umformen:

$$F(X, Y) = F((X) + x, (Y) + y)$$

$$F(X, Y) = F((X), (Y)) + \frac{\partial F}{\partial X} x + \frac{\partial F}{\partial Y} y$$

und damit gehen die Gleichungen (2) über in:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n \end{array}\right\} \tag{5}$$

wobei die Coëfficienten a, b und die Absolutglieder l folgende Bedeutung haben:

$$a = \frac{\partial F}{\partial X} \qquad b = \frac{\partial F}{\partial Y} \tag{6}$$

$$l = F((X), (Y)) - L \quad \text{oder} \quad l = (L) - L \tag{7}$$

(L) ist ganz allgemein derjenige Wert, welchen eine Beobachtung L annehmen würde, wenn die Näherungen (X), (Y) gültig wären.

Schreibt man (7) in die Form:

$$F((X), (Y)) - (L + l) = 0 \quad \text{oder} \quad (L) - (L + l) = 0 \tag{8}$$

und vergleicht man dieses mit (1), so ergiebt sich, dass die l in Bezug auf das Vorzeichen, mit den v gleichartig sind.

Es ist hiernach l diejenige Verbesserung, welche an einer Beobachtung L angebracht werden müsste, wenn die Näherungswerte (X), (Y) statt X Y angenommen würden.

Die Gleichungen (5) treten an die Stelle der Fehlergleichungen (2); diese Gleichungen (5) sind selbst Fehlergleichungen in Bezug auf die neuen Unbekannten x, y und in Bezug auf die Werte l, welche an Stelle der Beobachtungen L treten.

§ 24. Ausgleichung von Barometerständen.

Zu einem Zahlenbeispiel der Ausgleichung mit nicht linearen Funktionen nehmen wir die Barometermessungen von § 13. S. 35 nochmals vor, nämlich:

	h (m)	B (mm)	
1. Bruchsal	120,2	751,18	(1)
2. Cannstatt	225,1	742,37	
3. Stuttgart	270,6	738,50	
4. Calw	347,6	731,27	
5. Friedrichshafen	406,7	726,99	
6. Heidenheim	492,4	718,16	
7. Isny	708,1	700,48	
8 Freudenstadt	733,5	697,64	
9. Schopfloch	768,9	695,23	

Wir stellen uns die Aufgabe: Es soll zwischen den Höhen h und den Barometerständen B eine Beziehung hergestellt werden von der Form:

$$h = Y \log \frac{X}{B} \tag{2}$$

wobei die trigonometrisch bestimmten Meereshöhen h als fehlerfrei, die Barometerstände B als gleich genaue Beobachtungen behandelt werden.

Es handelt sich zuerst um Bestimmung von Näherungswerten (X) und (Y). Hiezu schreiben wir (2) in die Form:

$$\log X - \log B = \frac{h}{Y}$$

und wenden diese Gleichung auf die erste und auf die letzte Beobachtung an, dieses giebt:

$$\log (X) - \log 751{,}18 = \frac{120{,}2}{(Y)}$$

$$\log (X) - \log 695{,}23 = \frac{768{,}9}{(Y)}$$

Diese zwei Gleichungen kann man nach (X) und (Y) auflösen, und man findet:

$$(X) = 762{,}03 \qquad (Y) = 19298 \tag{3}$$

Um zu der allgemeinen Form der Gleichungen (1) S. 55 zu gelangen, hat man die Gleichung (2) nach (B) aufzulösen. Dieses giebt:

$$\frac{h}{Y} = \log \frac{X}{B} \;,\quad \frac{X}{B} = 10^{\frac{h}{Y}} \;,\quad \frac{B}{X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \;,\quad B - X\,10^{-\frac{h}{Y}} = 0$$

d. h. die in den allgemeinen Formeln S. 55 mit $F\,(X, Y)$ bezeichnete Funktion ist in unserem Falle: $F\,(X, Y) = X\,10^{-\frac{h}{Y}}$,
und damit berechnet man nach Anleitung von (6) und (7) S. 56:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial \left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \\ b &= \frac{\partial \left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial Y} = X\,10^{-\frac{h}{Y}}\,\frac{h}{Y^2}\,\frac{1}{M} \\ l &= (X)\,10^{-\frac{h}{(Y)}} - B \quad \text{oder} \quad = (B) - B \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bei der Ausrechnung von a und b ist überall (X) und (Y) an Stelle von X und Y zu setzen. Die Ausrechnung der Formeln (4) macht man am besten in logarithmischer Form, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} \log a &= -\frac{h}{(Y)} \quad \text{oder} \quad \log \frac{1}{a} = \frac{h}{(Y)} \\ \log b &= -\frac{h}{(Y)} + \log \frac{(X)\,h}{M\,(Y)^2} = \log a + \log \frac{(X)\,h}{(Y)^2\,M} \\ \log (l + B) &= \log (X) - \frac{h}{(Y)} = \log (X) + \log a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man hier die Zahlenwerte nach (1) und (3) ein, so erhält man:

Nr.	a	b	l
1	+ 0,986	+ 0,00056	0,00
2	+ 0,973	+ 0,00103	— 0,53
3	+ 0,968	+ 0,00123	— 0,68
4	+ 0,959	+ 0,00157	— 0,20
5	+ 0,953	+ 0,00182	— 1,06
6	+ 0,943	+ 0,00219	+ 0,38
7	+ 0,919	+ 0,00307	— 0,20
8	+ 0,916	+ 0,00317	+ 0,53
9	+ 0,912	+ 0,00331	0,00

Der Umstand, dass der erste und der letzte Wert l Null werden, ist nicht zufällig; es kommt dieses daher, dass die erste und die letzte Beobachtung B zur Bestimmung der Näherungswerte benützt wurden. Wenn die Näherungswerte gar keiner der Beobachtungen streng genügen, so wird auch kein Wert $l = 0$ werden.

Die Fehlergleichungen würden also jetzt sein:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}00056\,y' + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}00103\,y' - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Die zweite Unbekannte wurde hier y' genannt, weil wir dieselbe nochmals ändern wollen. Die Coëfficienten sind nämlich noch zu ungleich, was bei der numerischen Rechnung unbequem ist. Wir wollen daher statt der Fehlergleichungen (6) lieber folgende schreiben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}056\left(\frac{y'}{100}\right) + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}103\left(\frac{y'}{100}\right) - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

d. h. wir führen statt y' die neue Unbekannte ein:

$$\frac{y'}{100} = y \qquad (\text{also } y' = 100\,y) \qquad (8)$$

wobei y' die Korrektion des Näherungswertes (Y) und y die aus den Normalgleichungen zu bestimmende Unbekannte ist. Damit erhält man folgende Tafel der Coëfficienten, nebst Summen s, wobei: $a + b + l + s = 0$ (9)

Nr.	a	b	l	s
1	+ 0,986	+ 0,056	0,000	— 1,042
2	+ 0,973	+ 0,103	— 0,530	— 0,546
3	+ 0,968	+ 0,123	— 0,680	— 0,411
4	+ 0,959	+ 0,157	— 0,200	— 0,916
5	+ 0,953	+ 0,182	— 1,060	— 0,075
6	+ 0,943	+ 0,219	+ 0,380	— 1,542
7	+ 0,919	+ 0,307	— 0,200	— 1,026
8	+ 0,916	+ 0,317	+ 0,530	— 1,763
9	+ 0,912	+ 0,331	0,000	— 1,243
Summen	+ 8,529	+ 1,795	— 1,760	— 8,564

Die Ausrechnung der Summen-Coëfficienten $[aa]$, $[bb]$ u. s. w. wollen wir durchaus mit der Quadrattafel nach der Methode von § 19. S. 45 machen.

Bei nur 2 Unbekannten hat man dabei auch eine Erleichterung insofern, als $a + s$ $b + s$ $l + s$ nicht besonders zu berechnen sind, denn wegen (9) ist:

$$(a + s) = -(b + l) \qquad (b + s) = -(a + l) \qquad (l + s) = -(a + b)$$

a	b	l	s	$a + b$ $= -(l+s)$	$a + l$ $= -(b+s)$	$b + l$ $= -(a+s)$	Proben:	
+0,986	+0,056	0,000	—1,042	+ 1,042	+ 0,986	+ 0,056	+8,529	+ 8,529
+0,973	+0,103	—0,530	—0,546	+ 1,076	+ 0,443	— 0,427	+1,795	+ 1,795
+0,968	+0,123	—0,680	—0,411	+ 1,091	+ 0,288	— 0,557	—1,760	+10,324
+0,959	+0,157	—0,200	—0,916	+ 1,116	+ 0,759	— 0,043	—8,564	+ 8,529
+0,953	+0,182	—1,060	—0,075	+ 1,135	— 0,107	— 0,878	0,000	— 1,760
+0,943	+0,219	+0,380	—1,542	+ 1,162	+ 1,323	+ 0,599		+ 6,769
+0,919	+0,307	—0,200	—1,026	+ 1,226	+ 0,719	+ 0,107		+ 1,795
+0,916	+0,317	+0,530	—1,763	+ 1,233	+ 1,446	+ 0,847		— 1,760
+0,912	+0,331	0,000	—1,243	+ 1,243	+ 0,912	+ 0,331		
+8,529	+1,795	—1,760	—8,564	+10,324	+ 6,769	+ 0,035		+ 0,035

a^2	b^2	l^2	s^2	$(a+b)^2 = (l+s)^2$	$(a+l)^2 = (b+s)^2$	$(b+l)^2 = (a+s)^2$
0,9722	0,0031	0,0000	1,0858	1,0858	0,9722	0,0031
0,9467	0,0106	0,2809	0,2981	1,1578	0,1962	0,1823
0,9370	0,0151	0,4624	0,1689	1,1903	0,0829	0,3102
0,9197	0,0246	0,0400	0,8391	1,2455	0,5761	0,0018
0,9082	0,0331	1,1236	0,0056	1,2882	0,0114	0,7709
0,8892	0,0475	0,1444	2,3778	1,3502	1,7503	0,3588
0,8446	0,0942	0,0400	1,0527	1,5031	0,5170	0,0114
0,8391	0,1005	0,2809	3,1082	1,5203	2,0909	0,7174
0,8317	0,1096	0,0000	1,5450	1,5450	0,8317	0,1096
8,0884	0,4383	2,3722	10,4812	11,8862	7,0287	2,4655

$$\begin{array}{lr} [aa] = & 8,0884 \\ [bb] = & 0,4383 \\ \hline & -\ 8,5267 \\ & +11,8862 \\ \hline & +\ 3,3595 \\ [ab] = & +\ 1,6798 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} [aa] = & 8,0884 \\ [ll] = & 2,3722 \\ \hline & -10,4606 \\ & +\ 7,0287 \\ \hline & -\ 3,4319 \\ [al] = & -\ 1,7160 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} [aa] = & 8,0884 \\ [ss] = & 10,4812 \\ \hline & -18,5696 \\ & +\ 2,4655 \\ \hline & -16,1041 \\ [as] = & -\ 8,0520 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} [bb] = & 0,4383 \\ [ll] = & 2,3722 \\ \hline & -\ 2,8105 \\ & +\ 2,4655 \\ \hline & -\ 0,3450 \\ [bl] = & -\ 0,1725 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} [bb] = & 0,4383 \\ [ss] = & 10,4812 \\ \hline & -10,9195 \\ & +\ 7,0287 \\ \hline & -\ 3,8908 \\ [bs] = & -\ 1,9454 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} [ll] = & 2,3722 \\ [ss] & 10,4812 \\ \hline & -12,8534 \\ & +11,8862 \\ \hline & -\ 0,9672 \\ [ls] & -\ 0,4836 \end{array}$$

Diese Coëfficienten stellt man in üblicher Weise zusammen:

	a	b	l	s	Probe
a	+ 8,0884	+ 1,6798	− 1,7160	− 8,0520	+ 2
b		+ 0,4383	− 0,1725	− 1,9454	+ 2
l			+ 2,3722	− 0,4836	+ 1
s				+ 10,4812	+ 2

Ausführlich geschrieben heisst z. B. die dritte Probe:

$$-1,7160 - 0,1725 + 2,3722 - 0,4836 = +0,0001$$

Die bei den Proben bleibenden Reste $+2 \quad +2 \quad +1 \quad +2$ rühren lediglich von Abrundungen her, und bleiben auf sich beruhen.

Löst man nun die Normalgleichungen nach dem Muster von § 20. S. 50 logarithmisch auf, so bekommt man:

	a	b	l	s	Probe
Logarithmische Auflösung der Normal-gleichungen nach dem Muster S. 20.	+ 8,088	+ 1,680	— 1,716	— 8,052	0,000
	0.90784	0.22531	0.23452	0.90590	
		9.54278	9.55199	0.22337	
			9.56120	0.23258	
		+ 0,438	— 0,172	— 1,946	0,000
		— 0,349	+ 0,356	+ 1,678	
			+ 2,372	— 0,484	0,000
			— 0,364	— 1,708	
$y = -\frac{0,184}{0,089} = -2,07$		+ 0,089	+ 0,184	— 0,273	0,000
		8.94939	9.26482	9.43616	
			9.58025	9.75159	
			+ 2,008	— 2,192	0,000
			— 0,380	+ 0,564	
			+ 1,628	— 1,628	0,000

Nun stellt man die Coëfficienten so um:

b	a	l	s	
+ 0,438	+ 1,680	— 0,172	— 1,946	
	+ 8,088	— 1,716	— 8,052	
		+ 2,372	— 0,484	

Die Weiterrechnung giebt dann:

$x = -\frac{-1,056}{+1,644} = +0,642$	+ 1,644	— 1,056	— 0,588
		+ 2,304	— 1,248
		— 1,626	+ 1,626

Man hat also jetzt im ganzen:

$$x = +0,642 \qquad [vv] = [ll.2] \qquad y = -2,07$$
$$p_x = 1,644 \qquad = 1,627 \qquad p_y = 0,089$$

$$m = \sqrt{\frac{1,627}{9-2}} = \pm 0,48$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm 0,38 \qquad\qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm 1,62$$

also $\quad x = +0,64 \pm 0,38 \qquad\qquad y = -2,07 \pm 1,62$

$$y' = -207 \pm 162$$

Näherungen $\quad (X) = 762,03 \qquad\qquad (Y) = 19298$

Resultate $\quad X = 762,67 \pm 0,38 \qquad\qquad Y = 19091 \pm 162 \qquad (11)$

Also die gesuchte Formel:

$$h = 19091 \log \frac{762,67}{B} \quad \text{oder} \quad \log B = \log 762,67 - \frac{h}{19091} \qquad (12)$$

Um die Fehlerverteilung zu untersuchen und um zugleich eine durchgreifende Rechenprobe zu erhalten, berechnen wir nach der Formel (12) aus den gegebenen Meereshöhen h die Barometerstände B, und vergleichen dieselben mit den Beobachtungen:

Nr.	Meereshöhe h	Barometerstand B ausgeglichen	Barometerstand B beobachtet	v	v^2
	m	mm	mm	mm	mm
1	120,2	751,69	751,18	+ 0,51	0,2601
2	225,1	742,24	742,37	— 0,13	0,0169
3	270,6	738,18	738,50	— 0,32	0,1024
4	347,6	731,36	731,27	+ 0,09	0,0081
5	406,7	726,16	726,99	— 0,83	0,6889
6	492,4	718,69	718,16	+ 0,53	0,2809
7	708,1	700,24	700,48	— 0,24	0,0576
8	733,5	698,10	697,64	+ 0,46	0,2116
9	768,9	695,12	695,23	— 0,11	0,0121
					1,6386 = $[vv]$

Die hieraus erhaltene Summe $[vv] = 1{,}6386$ stimmt genügend mit dem aus der Elimination erhaltenen Wert $[ll.2] = 1{,}628$ oder $1{,}627$.

Man kann nun diese nach dem *logarithmischen* Gesetz gemachte Ausgleichung mit der früheren, nach *linearem* Gesetz gemachten Ausgleichung vergleichen. Nach S. 39 und S. 61 hat man:

Beobachtung	Ausgleichung linear	Ausgleichung logarithmisch	Differenz
751,18^{mm}	751,32^{mm}	751,69^{mm}	+ 0,37^{mm}
742,37	742,20	742,24	+ 0,04
738,50	738,24	738,18	— 0,06
731,27	731,55	731,36	— 0,19
726,99	726,41	726,16	— 0,25
718,16	718,96	718,69	— 0,27
700,48	700,21	700,24	+ 0,03
697,64	598,00	698,10	+ 0,10
695,23	594,92	695,12	+ 0,20
	$[vv] = 1{,}47$	$[vv] = 1{,}64$	
	$m = \pm 0{,}46^{mm}$	$m = \pm 0{,}48^{mm}$	
	$B_0 = 761{,}77^{mm} \pm 0{,}34^{mm}$	$B_0 = 762{,}67^{mm} \pm 0{,}38^{mm}$	

Die übrigbleibende Summe $[vv]$ betrachtet man in solchen Fällen als Kriterium der Güte der angewendeten Funktion, und in diesem Falle erscheint also die *lineare* Funktion *besser* als die theoretische *logarithmische* Funktion, was jedenfalls nicht der Fall ist, und nur durch Zufall erklärt werden kann.

Als sachliches Resultat heben wir hervor: Der auf den Meeresspiegel reduzierte mittlere Barometerstand in Württemberg ist:

$$B_0 = 762{,}7^{mm} \pm 0{,}4^{mm}.$$

Eine weitergehende Interpolations-Ausgleichung dieser Art wurde von uns in der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie 1880, S. 162—167 veröffentlicht.

26 badische und württembergische Stationen zwischen 111^m und 1009^m Höhe gaben die Formel:

$$h = 18517 \log \frac{762{,}56}{B} (1 + 0{,}003665\, t)$$

wo t die mittlere Jahrestemperatur ist. Hiebei ist:

$$B_0 = 762{,}56^{mm} \pm 0{,}10^{mm}.$$

§ 25. Übergang zu beliebig vielen Unbekannten.

Wir haben in § 13. bis § 24. die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit *zwei* Unbekannten besonders behandelt, weil dieser Fall sich sehr übersichtlich darstellen liess, und weil es für das erste Erlernen der M. d. kl. Q. nützlich ist, nicht sofort in die weitschweifigen allgemeinen Formeln für beliebig viele Unbekannte einzugehen. Zudem kommt der Fall *zweier* Beobachtungen so oft vor, z. B. bei trigonometrischen Punktbestimmungen, mit Coordinaten x und y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu erledigen.

Man kann sogar von den Formeln für 2 Unbekannte ziemlich bestimmte Analogieschlüsse auf die Formeln für mehr Unbekannte sich erlauben; z. B. nachdem nachgewiesen ist, dass bei 2 Unbekannten x und y das Gewicht $p_y = [b\,b\,.\,1]$ ist, kann man wohl vermuten, dass bei 3 Unbekannten x y z gelten wird $p_z = [c\,c\,.\,2]$ u. s. w.

Auch bei der Fehlerformel mit dem Nenner $n-2$ (§ 18, S. 45) haben wir schon den Analogieschluss beigefügt, dass bei u Unbekannten der Nenner $n-u$ zu erwarten sein werde.

Wir gehen nun von dem besonderen Falle zweier Unbekannter x und y zu dem allgemeinen Fall beliebig vieler Unbekannter x y z . . . über, und überzeugen uns sofort, dass Alles, was früher über die Einführung von Näherungswerten (§ 14.), über den allgemeinen Gang der *Gauss*'schen Elimination mit $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ . . . (§ 15.), Coëfficienten - Berechnung und Summenproben (§ 19.), über ungleiche Gewichte und nicht lineare Funktionen (§ 22.—23.) u. A. gesagt wurde, nicht bloss für 2, sondern für beliebig viele Unbekannte gilt.

Z. B. bei 4 Unbekannten x y z t hat man folgenden Rechnungsgang:

Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1\,t + l_1 \\ v_2 &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2\,t + l_2 \\ v_3 &= a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3\,t + l_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Normalgleichungen ausführlich geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,d]\,t + [c\,l] &= 0 \\ [a\,d]\,x + [b\,d]\,y + [c\,d]\,z + [d\,d]\,t + [d\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Da hier alle nicht quadratischen Coëfficienten $[a b]$ $[a c]$ . . . *doppelt* vorkommen, pflegt man, um diese nicht doppelt schreiben zu müssen, die folgende Abkürzung anzuwenden, wobei man die in der Diagonale stehenden quadratischen Glieder *unterstreicht* und dann die Wiederholungen der $[a\,b]$ $[a\,c]$ . . . einfach weglässt

Normalgleichungen abgekürzt geschrieben, nebst $[l\,l]$:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,d]\,t + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[d\,d]\,t} + [d\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} & \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Reduzierte Normalgleichungen abgekürzt geschrieben:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{1. Reduktion:} & \underline{[bb.1]}\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t + [bl.1] = 0 \\ & \underline{[cc.1]}\,z + [cd.1]\,t + [cl.1] = 0 \\ & \underline{[dd.1]}\,t + [dl.1] = 0 \\ & \underline{[ll.1]} \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{2. Reduktion:} & \underline{[cc.2]}\,z + [cd.2]\,t + [cl.2] = 0 \\ & \underline{[dd.2]}\,t + [dl.2] = 0 \\ & \underline{[ll.2]} \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{3. Reduktion:} & [dd.3]\,t + \underline{[dl.3]} = 0 \\ & \underline{[ll.3]} \end{array}\right\} \quad (6)$$

$$\underline{[ll.4]} \quad (7)$$

Der Bau des Eliminations-Coëfficienten lässt sich leicht dem Gedächtnis einprägen, wenn man ausser den unmittelbar in die Augen fallenden noch folgende Eigenschaften merkt:

1) Jeder Klammer-Coëfficient wird $= 0$, wenn man die symbolischen Zeichen algebraisch auffasst, z. B.:

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al] = bl - \frac{ab\,al}{aa} = bl - bl = 0$$

2) Wenn 1, 2, 3 ... in der Klammer steht, so steht im Nenner des Subtrahenten bzw. $[aa]$, $[bb.1]$, $[cc.2]$ ...

Um ein Zahlenbeispiel zu haben, wollen wir folgendes Gleichungssystem auflösen:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{459}\,x - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 = 0 \\ +\underline{464}\,y + 408\,z - 269\,t + 695 = 0 \\ +\underline{676}\,z - 331\,t + 653 = 0 \\ +\underline{469}\,t - 283 = 0 \\ +\underline{1129} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Auflösung mit dem Rechenschieber zeigt umstehende Tabelle S. 64, welche ähnliche Anordnung hat wie die Tabelle für 2 Unbekannte $x\ y$ § 20. S. 48. In den 2 letzten Spalten sind die Summenglieder und die Proben angegeben.

Die Anfangsgleichungen aller Gruppen, zusammengenommen, nennt man *vollständig reduzierte Normalgleichungen oder Endgleichungen:*

$$\left.\begin{array}{lrl} A & = [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,t + [al] = 0 \\ B' & = [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bd.1]\,t + [bl.1] = 0 \\ C'' & = [cc.2]\,z + [cd.2]\,t + [cl.2] = 0 \\ D''' & = [dd.3]\,t + [dl.3] = 0 \\ & [ll.4] = [vv] \end{array}\right\} \quad (9)$$

Dieses sind wirkliche Gleichungen, deren jede immer eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende, während (3) oder (8) mit den Unterstreichungen nur Abkürzungen der Gleichungen (2) sind, deren jede noch *alle* Unbekannten enthält.

Das Zahlenbeispiel auf S. 64 giebt folgende Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} +459\,x - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 = 0 \\ +256\,y + 146\,z - 105\,t + 354 = 0 \\ +263\,z - 64\,t + 21 = 0 \\ +281\,t + 137 = 0 \\ 11 = [vv] \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z u. s. w. Kurz, man kann durch Rückwärtssubstituieren allmählich alle Unbekannten in der Aufeinanderfolge $t\ z\ y\ x$ finden.

Auflösung eines Systems von 4 Normalgleichungen:

	a	b	c	d	l	s	Probe
A	+ 459	— 308	— 389	+ 244	— 507	+ 501	0
		+ 464	+ 408	— 269	+ 695	— 990	0
		— 208	— 262	+ 164	— 341	+ 337	
			+ 676	— 331	+ 653	—1017	0
			— 330	+ 207	— 430	+ 425	
				+ 469	— 283	+ 170	0
				— 130	+ 270	— 267	
					+1129	—1687	0
					— 560	+ 554	
B′		+ 256	+ 146	— 105	+ 354	— 653	— 2
			+ 346	— 124	+ 223	— 592	— 1
			— 83	+ 60	— 202	+ 373	
				+ 339	— 13	— 97	0
				— 43	+ 145	— 268	
					+ 569	—1133	0
					— 490	— 902	
C′			+ 263	— 64	+ 21	— 219	+ 1
				+ 296	+ 132	— 365	— 1
				— 15	+ 5	— 53	
					+ 79	— 231	+ 1
					— 2	+ 17	
D‴				+ 281	+ 137	— 418	0
					+ 77	— 214	0
					— 66	+ 203	
					+ 11	— 11	

$$t = -\frac{+137}{+281} = -0{,}488$$

Die Ausrechnung der Abzüge — 208 — 262 + 164 u. s. w. ist mit dem Rechenschieber gemacht.

§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen.

Im Anschluss an die reduzierten Normalgleichungen können wir auch reduzierte Fehlergleichungen bilden, welche zu manchen Zwecken sehr nützlich sind.

Mit Beschränkung auf 3 Unbekannte $x\ y\ z$ haben wir die allgemeine Form einer Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l \tag{1}$$

und hiezu die erste Normalgleichung:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \tag{2}$$

woraus

$$x = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z - \frac{[a\,l]}{[a\,a]} \tag{3}$$

Dieses x setzen wir in (1) und haben:

$$v = \left(b - \frac{[a b]}{[a a]}\, a\right) y + \left(c - \frac{[a c]}{[a a]}\, a\right) z + \left(l - \frac{[a l]}{[a a]}\, a\right) \tag{4}$$

oder

$$v = \qquad b' y + \qquad c' z + \qquad l' \tag{5}$$

wobei

$$b' = b - \frac{[a b]}{[a a]}\, a \qquad c' = c - \frac{[a c]}{[a a]}\, a \qquad l' = l - \frac{[a l]}{[a a]}\, a \tag{6}$$

(4) oder (5) nennen wir eine »*reduzierte Fehlergleichung*«, und b' c' l' nach (6) können wir reduzierte Coëfficienten nennen.

Man kann sich leicht überzeugen, dass folgendes richtig ist:

$$\left.\begin{array}{lll} [b' b'] = [b b \,.\, 1] & [b' c'] = [b c \,.\, 1] & [b' l'] = [b l \,.\, 1] \\ & [c' c'] = [c c \,.\, 1] & [c' l'] = [c l \,.\, 1] \\ & & [l' l'] = [l l \,.\, 1] \end{array}\right\} \tag{7}$$

denn es ist z. B.:

$$b_1' = b_1 - \frac{[a b]}{[a a]}\, a_1 \qquad b_1'^2 = b_1^2 - 2\, a_1\, b_1 \frac{[a b]}{[a a]} + \frac{[a b]^2}{[a a]^2}\, a_1^2$$

$$[b' b'] = [b b] - 2\, [a b] \frac{[a b]}{[a a]} + \frac{[a b]^2}{[a a]^2}\, [a a]$$

$$[b' b'] = [b b] - \frac{[a b]}{[a a]}\, [a b] = [b b \,.\, 1] \text{ u. s. w.}$$

Nun kann man die Fehlergleichung (5) nochmals reduzieren. Nimmt man nämlich die erste reduzierte Normalgleichung zur Hand:

$$[b b \,.\, 1]\, y + [b c \,.\, 1]\, z + [b l \,.\, 1] = 0 \quad \text{oder} \quad [b' b']\, y + [b' c']\, z + [b' l'] = 0$$

und bestimmt daraus:

$$y = -\frac{[b' c']}{[b' b']}\, z - \frac{[b' l']}{[b' b']}$$

und setzt man dieses in (5), so wird:

$$v = \left(c' - \frac{[b' c']}{[b' b']}\, b'\right) z + \left(l' - \frac{[b' l']}{[b' b']}\, b'\right) \tag{8}$$

$$v = c'' z + l'' \tag{9}$$

wobei

$$c'' = c' - \frac{[b' c']}{[b' b']}\, l' \qquad l'' = l' - \frac{[b' l']}{[b' b']}\, b' \tag{10}$$

und es gelten die ähnlich wie (7) leicht nachzuweisenden Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{ll} [c'' c''] = [c c \,.\, 2] & [c'' l''] = [c l \,.\, 2] \\ & [l'' l''] = [l l \,.\, 2] \end{array}\right\} \tag{11}$$

So kann man auch fortfahren, bis man hat:

$$v = l''' = l'' - \frac{[c'' l'']}{[c'' c'']}\, c'' \tag{12}$$

oder mit Zurückgehen auf (10) und (6):

$$v = l''' = l - \frac{[a l]}{[a a]}\, a - \frac{[b' l']}{[b' b']}\, b' - \frac{[c'' l'']}{[c'' c'']}\, c''$$

Wir haben also nun bewiesen, dass alle Eliminations-Coëfficienten $[b b \,.\, 1]$, $[b c \,.\, 1] \ldots [c l \,.\, 2]$ u. s. w. nicht bloss der Form nach, sondern in Wirklichkeit Quadratsummen und Produktsummen sind, deren Elemente b', $c' \ldots c''$ u. s. w. angegeben werden können.

Insbesondere sind die $[b b \,.\, 1]$ $[c c \,.\, 2] \ldots$ *Quadrat*summen, und daher stets positiv.

§ 27. Fehlerquadratsumme $[v v]$ und mittlerer Fehler m.

Die Entwicklung von $[v v]$, welche in § 15. (9) bis (15) S. 40—41, für 2 Unbekannte gemacht wurde, lässt sich allgemein weiter führen:

Für 3 Elemente $x\ y\ z$ haben wir:

$$\left.\begin{aligned}[vv] = [aa]\,x^2 + 2\,[ab]\,xy + 2\,[ac]\,xz + 2\,[al]\,x \\ + [bb]\,y^2 + 2\,[bc]\,yz + 2\,[bl]\,y \\ + [cc]\,z^2 + 2\,[cl]\,z \\ + [ll]\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Mit dieser Fehlerquadratsumme $[vv]$ kann man die linken Seiten $A\ B'\ C'\ldots$ der Endgleichungen (9) § 25. S. 63 in innige Beziehungen bringen. Zunächst hat man:

$$A = [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] \quad (2)$$

also

$$\begin{aligned}\frac{AA}{[aa]} = [aa]\,x^2 + 2\,[ab]\,xy + 2\,[ac]\,xz + 2\,[al]\,x \\ + \frac{[ab]^2}{[aa]}\,y^2 + 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\,[ac]\,yz + 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\,[al]\,y \\ + \frac{[ac]^2}{[aa]}\,z^2 + 2\,\frac{[ac]}{[aa]}\,[al]\,z \\ + \frac{[al]^2}{[aa]}\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich Glied für Glied von der Summe $[vv]$ in (1) subtrahieren; dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned}[vv] - \frac{AA}{[aa]} = [bb.1]\,y^2 + 2\,[bc.1]\,yz + 2\,[bl.1]\,y \\ + [cc.1]\,z^2 + 2\,[cl.1]\,z \\ + [ll.1]\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Genau in derselben Weise kann man mit der zweiten Endgleichung fortfahren:

$$B' = [bb.1]\,y + [bc.1]\,z + [bl.1] \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\frac{B'B'}{[bb.1]} = [bb.1]\,y^2 + 2\,[bc.1]\,yz + 2\,[bl.1] \\ + \frac{[bc.1]^2}{[bb.1]}\,z^2 + 2\,\frac{[bc.1]}{[bb.1]}\,[bl.1]\,z \\ + \frac{[bl.1]}{[bb.1]}\,[bl.1]\end{aligned}$$

Dieses kann man wieder Glied für Glied von (3) abziehen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned}[vv] - \frac{AA}{[aa]} - \frac{B'B'}{[bb.1]} = [cc.2]\,z^2 + 2\,[cl.2]\,z \\ + [ll.2]\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens giebt:

$$C' = [cc.2]\,z + [cl.2] \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\frac{C'C'}{[cc.2]} = [cc.2]\,z^2 + 2\,[cl.2]\,z \\ + \frac{[cl.2]}{[cc.2]}\,[cl.2]\end{aligned}$$

Wenn man auch dieses noch, Glied für Glied, von (5) abzieht, so erhält man:

$$[vv] - \frac{AA}{[aa]} - \frac{B'B'}{[bb.1]} - \frac{C'C'}{[cc.2]} = [ll.3] \quad (7)$$

Nun sind aber die $A\ B'\ C'$ nach (2) (4) und (6), d. h. die linken Seiten der Endgleichungen (9) § 25. S. 63 sämtlich gleich *Null*, und (7) wird sehr einfach:

$$[vv] = [ll.3] \quad (7a)$$

Wenn man dieses Restglied $[l\,l\,.\,3]$ wieder in seine Teile zerlegt, so hat man:

$$[l\,l\,.\,3] = [l\,l\,.\,2] - \frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,l\,.\,2]$$

$$[l\,l\,.\,2] = [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$$

$$[l\,l\,.\,1] = \quad [l\,l] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l]$$

folglich:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,3] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{8}$$

Am Schluss von § 26. wurde gezeigt, dass alle Nenner $[a\,a]$ $[b\,b\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. positiv sind; man sieht also aus (8) deutlich, wie die Summe $[l\,l]$ allmählich abnimmt.

Aus $[v\,v]$ berechnet man auch den mittleren Fehler m einer einzelnen Beobachtung (vom Gewicht 1). Wenn v die wahren Beobachtungsfehler wären, so würde man bei n Fehlergleichungen haben:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n} \quad (?) \tag{9}$$

dagegen bekommt man aus den wahren Beobachtungsfehlern $\varDelta$ richtig:

$$m^2 = \frac{[\varDelta\,\varDelta]}{n} \tag{10}$$

Bezeichnet man die wahren Unbekannten mit X Y Z, so hat man:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l$$

$$\varDelta = a\,X + b\,Y + c\,Z + l$$

$$\text{Differenz} \quad v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + c\,(z - Z) + \varDelta \tag{11}$$

Diese Gleichung hat wieder die Form einer Fehlergleichung, und würde in der Form $[a\,v] = 0$ $[b\,v] = 0$ auch Normalgleichungen von der früheren Form geben; man kann daher auf die Gleichung (11) auch alle mit den Fehlergleichungen vorgenommenen Umformungen anwenden, insbesondere ist nach (8):

$$[v\,v] = [\varDelta\,\varDelta] - \frac{[a\,\varDelta]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varDelta\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,\varDelta\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{12}$$

und mit den reduzierten Coëfficienten von § 26.:

$$[v\,v] = [\varDelta\,\varDelta] - \frac{[a\,\varDelta]^2}{[a\,a]} - \frac{[b'\,\varDelta']^2}{[b'\,b']} - \frac{[c''\varDelta'']^2}{[c''\,c'']} \tag{13}$$

wobei die $\varDelta'$ $\varDelta''$ ... folgende Bedeutungen haben:

$$\varDelta' = \varDelta - \frac{[a\,\varDelta]}{[a\,a]}a \qquad \varDelta'' = \varDelta' - \frac{[b\varDelta\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}b' = \varDelta' - \frac{[b'\varDelta']}{[b'\,b']}b' \tag{14}$$

Aus (13) erkennt man, wegen der quadratischen Gestalt der Glieder, dass $[\varDelta\,\varDelta]$ jedenfalls grösser als $[v\,v]$ ist. Die Differenz $[\varDelta\,\varDelta] - [v\,v]$ ist selbst eine Funktion der $\varDelta$, also in aller Strenge niemals zu bestimmen; man kann aber wenigstens die Mittelwerte bestimmen, gegen welche die Glieder von (13) konvergieren. Wir betrachten zuerst:

$$[a\,\varDelta]^2 = (a_1\varDelta_1 + a_2\varDelta_2 + \ldots)^2 = a_1^2\,\varDelta_1^2 + a_2^2\,\varDelta_2^2 + \ldots + 2\,a_1\,a_2\,\varDelta_1\,\varDelta_2 + \ldots \tag{15}$$

Wegen der gleichwahrscheinlichen Vorzeichen + und — der $\varDelta_1$ $\varDelta_2$ ... ist der Mittelwert:

$$[a\,\varDelta]^2 = a_1^2\,\varDelta_1^2 + a_2^2\,\varDelta_2^2 + \ldots$$

und weil der Mittelwert der wahren Fehlerquadrate $\Delta_1^2\ \Delta_2^2\ \ldots$ gleich dem mittleren Fehlerquadrat m^2 ist (vgl. (10)), ist nun der Mittelwert:

$$[a\,\Delta]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots)\,m^2 = [a\,a]\,m^2$$

folglich:

$$\frac{[a\,\Delta]^2}{[a\,a]} = m^2 \tag{16}$$

Gehen wir zu dem zweiten Gliede von (13) über, so ist zuerst zu zeigen, dass der Mittelwert von $[b'\Delta']$ auch gleich dem Mittelwert von $[b'\Delta]$ ist, denn nach der ersten Gleichung von (14) ist:

$$[b'\Delta'] = [b'\,\Delta] - \frac{[a\,\Delta]}{[a\,a]}\,[a\,b']$$

Hier ist aber über das Vorzeichen von $[a\,\Delta]$ gar nichts bekannt, es ist also im Mittel $[b'\Delta'] = [b'\Delta]$, folglich nach denselben Schlüssen wie bei (15) und (16):

$$\frac{[b'\Delta']^2}{[b'\,b']} = \frac{[b'\Delta]^2}{[b'b']} = m^2$$

Diese Schlussfolge geht beliebig weiter; wir haben daher aus (13):

$$[v\,v] - [\Delta\,\Delta] = -m^2 - m^2 - m^2 \qquad \text{oder} \qquad [\Delta\,\Delta] = [v\,v] + 3\,m^2 \tag{17}$$

Der strenge Wert des mittleren Fehlerquadrats ist nach (10):

$$m^2 = \frac{[\Delta\,\Delta]}{n}$$

und dieses giebt in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung (17):

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-3} \tag{18}$$

Dieses gilt für 3 Unbekannte, da wir der Kürze wegen nur 3 Symbole $x\ y\ z$ geschrieben haben; die Betrachtung gilt aber allgemein, und giebt daher für n Fehlergleichungen mit u Unbekannten:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u} \tag{19}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (9).

Anhang zu § 27.

Ähnliche Entwicklungen wie die vorstehende Entwicklung von $[vv]$ kommen in der M. d. kl. Q. mehrfach vor; wir bilden deshalb aus dieser Entwicklung einen allgemeinen Satz, indem in (1) und (7) S. 66 alle $l = 0$ gesetzt werden, und dann (1) und (7) einander gleich gesetzt werden. Wenn man hiebei die Bedeutungen von A nach (2), B' nach (4), und C'' nach (6) berücksichtigt, so geben (1) und (7):

$$\left\{\begin{array}{r} [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z \\ +\ \ [b\,b]\,y^2\ \ + 2\,[b\,c]\,y\,z \\ +\ \ [c\,c]\,z^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} \dfrac{([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z)^2}{[a\,a]} \\ + \dfrac{([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z)^2}{[b\,b\,.\,1]} \\ + \dfrac{([c\,c\,.\,2]\,z)^2}{[c\,c\,.\,2]} \end{array}\right\} \tag{20}$$

Dieses ist eine algebraische Identität, welche mit der Bedingung Quadratsumme $[v\,v]$ = Minimum in gar keiner Beziehung besteht. Es ist hier nur vorausgesetzt, dass die Coëfficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. nach dem allgemeinen Gesetz der Elimination gebildet sind.

§ 28. Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . .

Nach dem Bisherigen haben wir, mit Beschränkung auf $n = 4$, $u = 3$, folgendes:

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl } n = 4 \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z}_{\text{Anzahl } u = 3} + l_4 \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Normalgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] = 0 \end{array} \right\} \qquad (3)$$

$$[c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \qquad (4)$$

Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{array}{r} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \quad\;\; \end{array} \right\} \qquad (2^*)$$

Reduzierte Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left. \begin{array}{r} \underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,z + [c\,l\,.\,1] = 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,1]} \quad\;\; \end{array} \right\} \qquad (3^*)$$

$$\left. \begin{array}{r} \underline{[c\,c\,.\,2]}\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,2]} \quad\;\; \end{array} \right\} \qquad (4^*)$$

$$\underline{[l\,l\,.\,3]} \qquad (5)$$

Die Bedeutung der Eliminations-Coëfficienten setzen wir nochmals ausführlich her:

$$\left. \begin{array}{lll} [bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] & [bc.1] = [bc] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c] & [bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\,l] \\ & [cc.1] = [cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\,c] & [cl.1] = [cl] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] \\ & & [ll.1] = [ll] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l] \end{array} \right\} \qquad (3^{**})$$

$$\left. \begin{array}{ll} [cc.2] = [cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] & [cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1] \\ & [ll.2] = [ll.1] - \frac{[cl.1]}{[cc.1]}[cl.1] \end{array} \right\} \qquad (4^{**})$$

$$[ll.3] = [ll.2] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2] \Big\} \qquad (5^{**})$$

Nun wollen wir die Normalgleichungen (2) so aufgelöst denken, dass x y z sich als lineare Funktionen der l zeigen:

$$\left.\begin{aligned} -x &= \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + \alpha_3\, l_3 + \alpha_4\, l_4 \\ -y &= \beta_1\, l_1 + \beta_2\, l_2 + \beta_3\, l_3 + \beta_4\, l_4 \\ -z &= \gamma_1\, l_1 + \gamma_2\, l_2 + \gamma_3\, l_3 + \gamma_4\, l_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hievon betrachten wir zunächst die dritte Gleichung für z, und sehen, dass wenn die Coëfficienten $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ bestimmt wären, man auch den mittleren Fehler von z angeben könnte, nämlich:

$$(m_z)^2 = \gamma_1^2\, m^2 + \gamma_2^2\, m^2 + \gamma_3^2\, m^2 + \gamma_4^2\, m^2 = m^2\, [\gamma\,\gamma] \tag{7}$$

wenn m der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist, oder in Gewichtsform:

$$\frac{1}{p_z} = [\gamma\,\gamma] \tag{8}$$

Zum Zweck der Elimination von x und y aus den Normalgleichungen (2) multiplizieren wir diese Gleichungen mit den vorläufig unbestimmt gelassenen Coëfficienten Q_{z1} , Q_{z2} , Q_{z3}; dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned} Q_{z1}\,[a\,a]\,x + Q_{z1}\,[a\,b]\,y + Q_{z1}\,[a\,c]\,z + Q_{z1}\,[a\,l] &= 0 \\ Q_{z2}\,[a\,b]\,x + Q_{z2}\,[b\,b]\,y + Q_{z2}\,[b\,c]\,z + Q_{z2}\,[b\,l] &= 0 \\ Q_{z3}\,[a\,c]\,x + Q_{z3}\,[b\,c]\,y + Q_{z3}\,[c\,c]\,z + Q_{z3}\,[c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Nun verfügt man über die vorerst unbestimmt gelassenen Faktoren Q_{z1}, Q_{z2}, Q_{z3} so, dass bei der Addition der 3 Gleichungen (9) die Coëfficienten von x und von y je $=0$ werden, und dass der Coëfficient von z hiebei $=1$ wird, also:

$$\left.\begin{aligned} Q_{z1}\,[a\,a] + Q_{z2}\,[a\,b] + Q_{z3}\,[a\,c] &= 0 \\ Q_{z1}\,[a\,b] + Q_{z2}\,[b\,b] + Q_{z3}\,[b\,c] &= 0 \\ Q_{z1}\,[a\,c] + Q_{z2}\,[b\,c] + Q_{z3}\,[c\,c] &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

damit giebt die Addition der Gleichungen (9):

$$-z = Q_{z1}\,[a\,l] + Q_{z2}\,[b\,l] + Q_{z3}\,[c\,l] \tag{11}$$

Vergleicht man dieses (11) mit der ursprünglichen Annahme (6), und löst man die Klammern $[a\,l]$, $[b\,l]$, $[c\,l]$ in (11) auf, so wird die Bedeutung der Coëfficienten γ:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= Q_{z1}\, a_1 + Q_{z2}\, b_1 + Q_{z3}\, c_1 \\ \gamma_2 &= Q_{z1}\, a_2 + Q_{z2}\, b_2 + Q_{z3}\, c_2 \\ \gamma_3 &= Q_{z1}\, a_3 + Q_{z2}\, b_3 + Q_{z3}\, c_3 \\ \gamma_4 &= Q_{z1}\, a_4 + Q_{z2}\, b_4 + Q_{z3}\, c_4 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ und berücksichtigt (10), so wird:

$$[a\,\gamma] = Q_{z1}\,[a\,a] + Q_{z2}\,[a\,b] + Q_{z3}\,[a\,c] = 0 \tag{13$_1$}$$

Macht man dasselbe auch mit b und c, so findet man:

$$[b\,\gamma] = Q_{z1}\,[a\,b] + Q_{z2}\,[b\,b] + Q_{z3}\,[b\,c] = 0 \tag{13$_2$}$$

$$[c\,\gamma] = Q_{z1}\,[a\,c] + Q_{z2}\,[b\,c] + Q_{z3}\,[c\,c] = 1 \tag{13$_3$}$$

Diese 3 Gleichungen $[a\,\gamma]=0$, $[b\,\gamma]=0$, $[c\,\gamma]=1$ sind erhalten worden bei der Elimination von x und y, d. h. bei der Bestimmung von z; würde man die Eliminations-Ordnung umstellen (wobei auch andere Coëfficienten $Q_{x1}\ Q_{x2}\ Q_{x3}$, sowie $Q_{y1}\ Q_{y2}\ Q_{y3}$ aufträten), so würde man analoge Gleichungen erhalten, und die Gesamtheit aller solcher Formeln ist:

$$\left.\begin{matrix} [a\,\alpha]=1 & [b\,\alpha]=0 & [c\,\alpha]=0 \\ [a\,\beta]=0 & [b\,\beta]=1 & [c\,\beta]=0 \\ [a\,\gamma]=0 & [b\,\gamma]=0 & [c\,\gamma]=1 \end{matrix}\right\} \tag{13}$$

Wir gehen einen Schritt weiter, und multiplizieren die Gleichungen (12) der Reihe nach mit α_1 α_2 α_3 α_4, das giebt:

$$[\alpha\gamma] = Q_{\varkappa 1}[a\alpha] + Q_{\varkappa 2}[b\alpha] + Q_{\varkappa 3}[c\alpha]$$

d. h. wegen (13):

$$[\alpha\gamma] = Q_{\varkappa 1} \qquad (14_1)$$

Auf ähnlichem Wege, nämlich, wenn man die Gleichungen (12) mit β_1 β_2 β_3 β_4 und dann auch noch mit γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 multipliziert und addiert, erhält man auch:

$$[\beta\gamma] = Q_{\varkappa 2} \qquad [\gamma\gamma] = Q_{\varkappa 3} \qquad (14_2)$$

Setzt man diese (14_1) und (14_2) in (11), so erhält man:

$$-z = [\alpha\gamma][a l] + [\beta\gamma][b l] + [\gamma\gamma][c l] \qquad (15)$$

Setzt man diese (14_1) und (14_2) auch in (10), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [a a][\alpha\gamma] + [a b][\beta\gamma] + [a c][\gamma\gamma] &= 0 \\ [a b][\alpha\gamma] + [b b][\beta\gamma] + [b c][\gamma\gamma] &= 0 \\ [a c][\alpha\gamma] + [b c][\beta\gamma] + [c c][\gamma\gamma] &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Bei diesen Gleichungen (15) und (16) ist die dritte Unbekannte z bevorzugt; durch cyklische Vertauschung erhält man aus (15) und (16) das vollständige System:

Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -x &= [\alpha\alpha][a l] + [\alpha\beta][b l] + [\alpha\gamma][c l] \\ -y &= [\alpha\beta][a l] + [\beta\beta][b l] + [\beta\gamma][c l] \\ -z &= [\alpha\gamma][a l] + [\beta\gamma][b l] + [\gamma\gamma][c l] \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Gewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &[a a][\alpha\alpha] + [a b][\alpha\beta] + [a c][\alpha\gamma] = 1 \qquad [a a][\alpha\beta] + [a b][\beta\beta] + [a c][\beta\gamma] = 0 \\ &[a b][\alpha\alpha] + [b b][\alpha\beta] + [b c][\alpha\gamma] = 0 \qquad [a b][\alpha\beta] + [b b][\beta\beta] + [b c][\beta\gamma] = 1 \\ &[a c][\alpha\alpha] + [b c][\alpha\beta] + [c c][\alpha\gamma] = 0 \qquad [a c][\alpha\beta] + [b c][\beta\beta] + [c c][\beta\gamma] = 0 \\ &\qquad\qquad [a a][\alpha\gamma] + [a b][\beta\gamma] + [a c][\gamma\gamma] = 0 \\ &\qquad\qquad [a b][\alpha\gamma] + [b b][\beta\gamma] + [b c][\gamma\gamma] = 0 \\ &\qquad\qquad [a c][\alpha\gamma] + [b c][\beta\gamma] + [c c][\gamma\gamma] = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Durch Auflösung der Gewichtsgleichungen (18) kann man alle Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w. bestimmen, und zwar die nichtquadratischen, z. B. $[\alpha\beta]$ $[\beta\gamma]$ u. s. w. je doppelt, was als Rechenprobe dient.

Setzt man die so erhaltenen Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s w. in (17), so hat man die sogenannte „unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen", d. h. die Entwicklung der x y z als lineare Funktionen der Absolutglieder $[a l]$ $[b l]$ $[c l]$.

Die Gewichtsgleichungen (18) haben dieselben Coëfficienten $[a a]$ $[a b]$ u. s. w. wie die ursprünglichen Normalgleichungen (2); die Auflösung der Gewichtsgleichungen schliesst sich daher auch der Auflösung (2*) (3*) (4*) an, und giebt:

Gewichtsgleichungen und reduzierte Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{[a a][\alpha\alpha]} + [a b][\alpha\beta] + [a c][\alpha\gamma] - 1 = 0 \\ &\qquad \underline{[b b][\alpha\beta]} + [b c][\alpha\gamma] + 0 = 0 \qquad \underline{[b b.1][\beta\beta]} + [b c.1][\beta\gamma] - 1 = 0 \\ &\qquad\qquad \underline{[c c][\alpha\gamma]} + 0 = 0 \qquad\qquad \underline{[c c.1][\beta\gamma]} + 0 = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[c c.2][\gamma\gamma]} - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Die Richtigkeit dieser Gleichungen (19) überblickt man leicht, wenn man nur immer den allgemeinen Eliminationsgang nach den Formeln (3**) (4**) (5**) (s. oben S. 69) vor Augen hat.

So ist z. B. die letzte Gleichung $[cc.2][\gamma\gamma]-1=0$ in (19) das Analogon zu der Gleichung $[cc.2]z+[cl.2]=0$ in (4*), denn die letzte Gruppe von (18) wird mit (2) oder (2*) identisch, wenn man setzt:

$$[al]=0 \qquad [bl]=0 \qquad [cl]=-1$$

das giebt nach (3**) und nach (4**):

$$[bl.1]=0 \qquad [cl.1]=-1$$
$$[cl.2]=-1$$

womit die Schlussgleichung von (19) speziell nachgewiesen ist

Wir nehmen diese Schlussgleichung von (19) zusammen mit (8) und haben:

$$p_z=\frac{1}{[\gamma\gamma]}=[cc.2] \tag{20}$$

Dieses ist die Verallgemeinerung des Satzes, den wir in der Form $p_y=[bb.1]$ für 2 Unbekannte bereits in (7) § 16. S. 42 gehabt haben.

Da unsere Betrachtung zwar mit *drei* Elementen $x\ y\ z$ geführt, aber dem Gedanken nach nicht an *drei* gebunden ist, heisst dieser Satz nach (20) allgemein:

Wenn man die Normalgleichungen nach der *Gauss*'schen Methode allmählich reduziert, d. h. $[bb.1]$, $[cc.2]$ u. s. w. bildet, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, so ist in dieser letzten Gleichung der Coëfficient der Unbekannten zugleich das Gewicht der Unbekannten.

Diese Gewichtsbestimmungsmethode ist sehr gebräuchlich.

Um zur unabhängigen Bestimmung der Gewichte aller Unbekannten nach dieser Methode zu gelangen, muss man die Elimination wenigstens einmal vollständig umkehren, also etwa zuerst mit der Ordnung $x\ y\ z$ die Unbekannte z und p_z bestimmen, dann mit der Ordnung $z\ y\ x$ die Bestimmung von x und p_x vornehmen, worauf y nebst p_y sich findet durch Umstellung, entweder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von x geblieben sind, oder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von z sich ergeben haben.

Man kann jedesmal hiebei auch einen nicht quadratischen Coëfficienten $[\alpha\beta]$ u. s. w. gelegentlich mitbestimmen, denn wenn z. B. x eliminiert ist, so dass man hat:

$$\underline{[bb.1]y}+[bc.1]z+[bl.1]=0$$
$$\underline{[cc.1]z}+[cl.1]=0$$

so kann man auch rechnen:

$$[bc.2]=[bc.1]-\frac{[bb.1]\,[cc.1]}{[bc.1]}=\frac{1}{[\beta\gamma]} \tag{21}$$

Man beweist dieses gerade so, wie (20) bewiesen wurde, d. h. man betrachtet $[\beta\gamma]$ als denjenigen speziellen Wert von z, welcher in (17) entsteht, wenn $[al]=0$ $[bl]=-1$ und $[cl]=0$ gesetzt wird.

Man könnte in dieser Weise durch mehrfaches Umstellen der Eliminationsordnung alle Gewichts-Coëfficienten nach und nach finden, und bei nur 2 oder 3 Unbekannten macht sich unter Umständen das ganz bequem.

Bei 2 Unbekannten ist überhaupt alles einfach, wie in dem Beispiel § 21. S. 52 gezeigt ist.

Bei 3 Unbekannten kann man so verfahren:

1)	a	b	c	2)	c	b	a
		b	c			b	a
			c				a

giebt z und $[\gamma\gamma]$ nebst $[\beta\gamma]$. giebt x und $[\alpha\alpha]$ nebst $[\alpha\beta]$.

Nun muss man jedenfalls noch einmal umstellen, um y und $[\beta\beta]$ zu erhalten; also:

3) c b oder 4) a b
b b
giebt y und $[\beta\beta]$ nebst $[\beta\gamma]$. giebt y und $[\beta\beta]$ nebst $[\alpha\beta]$.

Da man mit 1), 2) und 3) bereits alle Unbekannten und deren Gewichte hat, kann man statt noch 4) zu bilden, für den letzten noch fehlenden Coëfficienten $[\alpha\beta]$ auch die erste der Gleichungen (19) selbst zu Hilfe nehmen.

Bei mehr als 3 Unbekannten ist aber die Methode der Gleichung (21) höchstens dann zu empfehlen, wenn man nur *einzelne* der Coëfficienten $[\beta\gamma]$ etc. braucht, nach denen man dann die Eliminationsordnung einrichten kann. Braucht man alle Gewichts-Coëfficienten, was z. B. bei der *Bessel*'schen Triangulationsausgleichung der Fall ist, so kann man nicht ohne die allgemeinen Gewichtsgleichungen (18) bzw. (19) auskommen, deren gemeinsame Auflösung wir in § 33. besonders behandeln werden.

§ 29. Gewicht einer Funktion der $x\ y\ z$ nach der Ausgleichung.

Wir betrachten die lineare Funktion:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z \tag{1}$$

Das Gewicht von F kann man aus den *Einzel*gewichten der gemeinsam ausgeglichenen Elemente $x\ y\ z$ nicht unmittelbar bestimmen, weil die Gewichte der $x\ y\ z$ nicht unabhängig sind, man muss vielmehr, wie im Fall von § 17., auf die Beobachtungen selbst zurückgreifen, und F als Funktion derselben darstellen.

Wir benützen wieder die Gleichungen (6) § 28. S. 70:

$$\left.\begin{aligned} -x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Setzt man diese Werte in (1), so erhält man:

$$-F = \left\{\begin{aligned} &+ (f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)\, l_1 \\ &+ (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)\, l_2 \\ &+ (f_1\alpha_3 + f_2\beta_3 + f_3\gamma_3)\, l_3 \\ &+ (f_1\alpha_4 + f_2\beta_4 + f_3\gamma_4)\, l_4 \end{aligned}\right\}$$

Da die l bei Gewichtsberechnungen als unmittelbare Beobachtungsresultate gelten, erhält man das Gewicht P nach (3) § 8. S. 20:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} &\ (f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)^2 \\ &+ (f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)^2 \\ &\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

oder mit Ausführung der Quadrate:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} f_1 f_1 [\alpha\alpha] + 2 f_1 f_2 [\alpha\beta] &+ 2 f_1 f_3 [\alpha\gamma] \\ + \ f_2 f_2 [\beta\beta] &+ 2 f_2 f_3 [\beta\gamma] \\ &+ \ f_3 f_3 [\gamma\gamma] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Gleichung (3) kann man auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = f_1 & (f_1 [\alpha\alpha] + f_2 [\alpha\beta] + f_3 [\alpha\gamma]) \\ + f_2 & (f_1 [\alpha\beta] + f_2 [\beta\beta] + f_3 [\beta\gamma]) \\ + f_3 & (f_1 [\alpha\gamma] + f_2 [\beta\gamma] + f_3 [\gamma\gamma]) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit Zusammenfassung der Coëfficienten von f_1 f_2 f_3:

$$\frac{1}{P} = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 = [q f] \tag{5}$$

wo q_1 q_2 q_3 folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= [\alpha\alpha] f_1 + [\alpha\beta] f_2 + [\alpha\gamma] f_3 \\ q_2 &= [\alpha\beta] f_1 + [\beta\beta] f_2 + [\beta\gamma] f_3 \\ q_3 &= [\alpha\gamma] f_1 + [\beta\gamma] f_2 + [\gamma\gamma] f_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun wird sich zeigen, dass die Gleichung besteht:

$$[a a] q_1 + [a b] q_2 + [a c] q_3 = f_1 \tag{7}$$

denn die Ausführung dieser Funktion nach (6) giebt:

$$\left.\begin{aligned} [a a] q_1 + [a b] q_2 + [a c] q_3 = &([aa][\alpha\alpha] + [ab][\alpha\beta] + [ac][\alpha\gamma]) f_1 \\ &([aa][\alpha\beta] + [ab][\beta\beta] + [ac][\beta\gamma]) f_2 \\ &([aa][\alpha\gamma] + [ab][\beta\gamma] + [ac][\gamma\gamma]) f_3 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die hier auftretenden Coëfficienten (.....) sind aber teils $= 1$, teils $= 0$, wie im vorigen § 28. (18) S. 71 gezeigt wurde. Die Entwicklung (8) giebt also in der That die sehr einfache Beziehung (7), und indem wir dieselbe Betrachtung auch auf f_2 und f_3 ausdehnen, haben wir entsprechend (7) das ganze System:

$$\left.\begin{aligned} [a a] q_1 + [a b] q_2 + [a c] q_3 &= f_1 \\ [a b] q_1 + [b b] q_2 + [b c] q_3 &= f_2 \\ [a c] q_1 + [b c] q_2 + [c c] q_3 &= f_3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Das sind Gleichungen von derselben Form, wie die ursprünglichen Normalgleichungen, man kann sie daher auch ebenso wie jene weiter behandeln:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a a] q_1} + [a b] q_2 + [a c] q_3 - f_1 &= 0 \\ \underline{[b b] q_2} + [b c] q_3 - f_2 &= 0 \\ \underline{[c c] q_3} - f_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{[bb.1] q_2} + [bc.1] q_3 - [f_2.1] &= 0 \\ \underline{[cc.1] q_3} - [f_3.1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

$$\underline{[cc.2] q_3} - [f_3.2] = 0 \tag{10''}$$

Die Schlussglieder haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} [f_2 . 1] = f_2 - \frac{[a b]}{[a a]} f_1 \qquad [f_3 . 1] &= f_3 - \frac{[a c]}{[a a]} f_1 \\ [f_3 . 2] &= [f_3 . 1] - \frac{[b c . 1]}{[b b . 1]} [f_2 . 1] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Schlussglieder kann man der gewöhnlichen Elimination (2*) bis (5*) § 28. S. 69 anhängen.

Denkt man sich aus den Gleichungen (9) bis (10″) die q_1 q_2 q_3 numerisch bestimmt, und in (5) eingesetzt, so hat man den gesuchten Wert $\frac{1}{P}$.

Hieran schliesst sich aber ein noch einfacheres Verfahren an: Man setze die durch (9) bestimmten f_1 f_2 f_3 in (5), und erhält damit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = [a a] q_1^2 &+ 2 [a b] q_1 q_2 + 2 [a c] q_1 q_3 \\ &+ [b b] q_2^2 + 2 [b c] q_2 q_3 \\ &+ [c c] q_3^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Auf diesen Ausdruck (12) kann man die allgemeine Entwicklung (20) § 27. S. 68 anwenden, nämlich:

$$\frac{1}{P} = \frac{([aa]\,q_1 + [ab]\,q_2 + [ac]\,q_3)^2}{[aa]} + \frac{([bb\,.\,1]\,q_2 + [bc\,.\,1]\,q_3)^2}{[bb\,.\,1]} + \frac{([cc\,.\,2]\,q_3)^2}{[cc\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung von (10), (10′) und (10″):

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]} \quad (13)$$

Dieses ist theoretisch die übersichtlichste Formel für das Funktionsgewicht.

Ob man im einzelnen Falle numerisch hiernach, d. h. nach (10) (10′) (10″) und (13) rechnen will, oder ob man die ursprünglichen Formeln (3) oder (5) anwenden will, wird von den Umständen abhängen.

§ 30.*) Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Weniger zum unmittelbaren Gebrauch als zur Vorbereitung der späteren Theorie der Fehlerellipse behandeln wir noch folgenden Fall im Anschluss an § 29.:

Man habe zwei Funktionen:

$$X = f_1\,x + f_2\,y + f_3\,z \qquad Y = f_1'\,x + f_2'\,y + f_3'\,z \quad (1)$$

Diese zwei Funktionen sollen nach dem vorigen § 29. (13) (s. oben) behandelt worden sein, und haben folgende Gewichte erhalten:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{f_1^2}{[aa]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]} \qquad \frac{1}{P_y} = \frac{f_1'^2}{[aa]} + \frac{[f_2'\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} + \frac{[f_3'\,.\,2]}{[cc\,.\,2]} \quad (2)$$

Nun stellt man noch eine Funktion von X und von Y auf:

$$(F) = r\,X + r'\,Y \quad (3)$$

deren Gewicht ebenfalls bestimmt werden soll.

Hiezu hat man jedenfalls den Weg, dass man vermöge (1) und (3), (F) in x und y ausdrückt und eine Funktion der x und y herstellt, nämlich:

$$(F) = (r\,f_1 + r'\,f_1')\,x + (r\,f_2 + r'\,f_2')\,y + (r\,f_3 + r'\,f_3')\,z \quad (4)$$

Das Gewicht dieser Funktion von x y und z ist:

$$\frac{1}{(P)} = \frac{(r\,f_1 + r'\,f_1')^2}{[aa]} + \frac{[(r f_2 + r' f_2')\,.\,1]^2}{[bb\,.\,1]} + \frac{[(r f_3 + r' f_3')\,.\,2]^2}{[cc\,.\,2]} \quad (5)$$

Ausser diesem unmittelbar sich darbietenden Wege zur Berechnung des Gewichtes (P) der Funktion (3) giebt es aber noch einen zweiten Weg durch Vermittlung der Gewichte P_x und P_y, welche man nach (2) schon hat.

Wir betrachten die Bestandteile von (2) und (5) nach dem Entstehungsgesetz (11) § 29. S. 74:

$$f_1 = f_1 \qquad\qquad f_1' = f_1'$$

$$[f_2\,.\,1] = f_2 - \frac{[ab]}{[aa]} f_1 \qquad\qquad [f_2'\,.\,1] = f_2' - \frac{[ab]}{[aa]} f_1'$$

$$[f_3\,.\,2] = f_3 - \frac{[ac]}{[aa]} f_1 - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} [f_2\,.\,1] \qquad [f_3'\,.\,2] = f_3' - \frac{[ac]}{[aa]} f_1' - \frac{[bc\,.\,1]}{[bb\,.\,1]} [f_2\,.\,1]$$

---

*) Die Betrachtungen von § 30. bis § 34. und das Beispiel § 35. können beim ersten Studium der Methode der kleinsten Quadrate übergangen und nach Bedürfnis nachgeholt werden.

$$r f_1 + r' f_1' = r f_1 + r_1' f_1'$$

$$[(r f_2 + r' f_2').1] = (r f_2 + r' f_2') - \frac{[a b]}{[a a]}(r f_1 + r f_1')$$

$$[(r f_3 + r' f_3').2] = (r f_3 + r' f_3') - \frac{[a c]}{[a a]}(r f_2 + r' f_2') - \frac{[b c.1]}{[b b.1]}[(r f_2 + r' f_2').1]$$

Man hat also die sehr einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} r f_1 + r' f_1' &= r f_1 + r' f_1' \\ [(r f_2 + r' f_2').1) &= r[f_2.1] + r'[f_2'.1] \\ [(r f_3 + r' f_3').2] &= r[f_3.2] + r'[f_3'.2] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Setzt man dieses in (5) ein und quadriert, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(P)} = r^2 &\left\{\frac{f_1^2}{[a a]} + \frac{[f_2'.1]^2}{[b b.1]} + \frac{[f_3'.2]^2}{[c c.2]}\right\} \\ + r'^2 &\left\{\frac{f_1^2}{[a a]} + \frac{[f_2'.1]^2}{[b b.1]} + \frac{[f_3'.2]^2}{[c c.2]}\right\} \\ + 2 r r' &\left\{\frac{f_1 f_1'}{[a a]} + \frac{[f_2.1][f_2'.1]}{[b b.1]} + \frac{[f_3.2][f_3'.2]}{[c c.2]}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + r'^2 \frac{1}{P_y} + 2 r r' \frac{1}{P_{xy}} \tag{8}$$

Dabei haben $\frac{1}{P_x}$ und $\frac{1}{P_y}$ die bereits in (2) angegebenen Bedeutungen, und $\frac{1}{P_{xs}}$ lässt sich aus (7) leicht ableiten:

$$\frac{1}{P_{xy}} = \frac{f_1 f_1'}{[a a]} + \frac{[f_2.1][f_2'.1]}{[b b.1]} + \frac{[f_3.2][f_3'.2]}{[c c.2]} \tag{9}$$

In Worten kann man dieses so ausdrücken:

Wenn für zwei Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in den Formeln (2) bestimmt sind, und wenn es sich dann abermals um eine Funktion (F) von den Funktionen X und Y handelt, so braucht man deren Gewicht (P) nicht von Neuem zu berechnen, sondern man kann es nach (9) und (8) aus den schon berechneten Gewichten P_x und P_y ableiten.

Wir werden bei der Fehlerellipse von diesem Satze Gebrauch machen, und zwar mit der Vereinfachung:

$$(F) = X + Y, \quad \text{d. h. } r = r' = 1. \tag{10}$$

Hiefür kann man das vorstehende in folgende Regel fassen:

Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x} = [\alpha \alpha] &= \frac{A_0 A_0}{[a a]} + \frac{A_1 A_1}{[b b.1]} + \frac{A_2 A_2}{[c c.2]} + \dots \\ \frac{1}{P_y} = [\beta \beta] &= \frac{B_0 B_0}{[a a]} + \frac{B_1 B_1}{[b b.1]} + \frac{B_2 B_2}{[c c.2]} + \dots \\ \text{dann berechnet man:} \quad [\alpha \beta] &= \frac{A_0 B_0}{[a a]} + \frac{A_1 B_1}{[b b.1]} + \frac{A_2 B_2}{[c c.2]} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und damit ist: $\frac{1}{(P)} = [\alpha \alpha] + [\beta \beta] + 2[\alpha \beta]$.

§ 31. Partielle Elimination.

Im Anschluss an die Entwicklungen des § 26., betreffend die „reduzierten Fehlergleichungen", wollen wir noch einige weitere Betrachtungen anstellen, welche später von Nutzen sein werden.

Zunächst wollen wir die Entwicklungen von § 26. zum Teil wiederholen und zusammenfassen:

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z}_{\text{Anzahl } = u.} + l_n \end{array} \right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\text{Anzahl} = u \left\{ \begin{array}{r} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Erstmals reduzierte Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{Anzahl} \\ = u - 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} \underline{[bb.1]}\,y + [bc.1]\,z + [bl.1] = 0 \\ \underline{[cc.1]}\,z + [cl.1] = 0 \\ \underline{[ll.1]} \end{array} \text{ oder } \begin{array}{r} \underline{[b'b']}\,y + [b'c']\,z + [b'l'] = 0 \\ \underline{[c'c']}\,z + [c'l'] = 0 \\ \underline{[l'l']} \end{array} \right\} \tag{3}$$

Hiebei ist:

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \tag{4}$$

Auf das System (3) kann man auch dadurch kommen, dass man n reduzierte (fingierte) Fehlergleichungen schreibt:

Reduzierte Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = b_1'\,y + c_1'\,z + l_1' \\ v_2 = b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = \underbrace{b_n'\,y + c_n'\,z}_{\text{Anzahl } = u - 1} + l_n \end{array} \right\} \tag{5}$$

Alles dieses in Worte gefasst, giebt den Satz:

Wenn man statt der n Fehlergleichungen (1) die n reduzierten Fehlergleichungen (5) anschreibt, und aus denselben mit gleichen Gewichten wie bei (1), in üblicher Weise Normalgleichungen (3) bildet, so erhält man daraus dieselben Unbekannten y und z, und auch alle Gewichte und mittleren Fehler gerade so wie aus den ursprünglichen Fehlergleichungen (1). Man muss jedoch bei der Berechnnng des mittleren Fehlerquadrats

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n - u} \tag{6}$$

im Nenner $n - u$ in der Zahl u der Unbekannten das zuerst eliminierte x mitzählen, oder man darf in (6) nicht etwa den Nenner $= n - (u - 1)$ nach (5) nehmen.

Man kann aus dem Vorstehenden auch noch folgenden, allgemein gültigen Satz ableiten:

Wenn man eine Unbekannte x bereits in den *Fehlergleichungen*, mit Hilfe der Beziehungen (4) eliminiert, und damit reduzierte Fehlergleichungen (5) aufstellt, so bekommt man daraus *dasselbe* Normalgleichungssystem (3), welches man auf dem gewöhnlichen Weg durch Elimination von x aus den Normalgleichungen erhalten haben würde.

Wir betrachten noch folgenden Fall:

Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_1 z \ldots + a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= c_2 z \ldots + a_2 x + b_2 y + l_2 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= c_n z \ldots + a_n x + b_n y + l_n \end{aligned}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[c\,c]} z + [c\,a]\,x + [c\,b]\,y + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} & \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Eine zweite Gruppe von Beobachtungen gebe:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ldots d_{n+1}\,t + a_{n+1}\,x + b_{n+1}\,y + l_{n+1} \\ v_{n+2} &= \ldots d_{n+2}\,t + a_{n+2}\,x + b_{n+2}\,y + l_{n+2} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{(d\,d)}\,t + (d\,a)\,x + (d\,b)\,y + (d\,l) &= 0 \\ \underline{(a\,a)}\,x + (a\,b)\,y + (a\,l) &= 0 \\ \underline{(b\,b)}\,y + (b\,l) &= 0 \\ \underline{(l\,l)} & \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Unbekannten x und y kommen in beiden Gruppen vor, dagegen z nur in der ersten, t nur in der zweiten Gruppe.

Nun soll z aus den Normalgleichungen von (7), und t aus den Normalgleichungen von (8) eliminiert werden. Dieses giebt:

$$\text{aus (7):} \quad [a\,a\,.\,1]\,x + [a\,b\,.\,1]\,y + [a\,l\,.\,1] = 0 \qquad (9)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{aus (8):} \quad (a\,a\,.\,1)\,x + (a\,b\,.\,1)\,y + (a\,l\,.\,1) = 0 \qquad (10)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Diese beiden Gleichungen nehmen wir so zusammen:

$$([a\,a\,.\,1] + (a\,a\,.\,1))\,x + ([a\,b\,.\,1] + (a\,b\,.\,1))\,y + ([a\,l\,.\,1] + (a\,l\,.\,1)) = 0 \qquad (11)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dieses ist genau dieselbe erste Normalgleichung, welche man bekommen haben würde, wenn man aus allen Fehlergleichungen von (7) und (8) *zusammen* genommen Normalgleichungen gebildet und daraus z und t eliminiert hätte.

Um dieses zu beweisen, bilden wir das Gesamtnormalgleichungssystem für die Fehlergleichungen (7) und (8) unmittelbar:

$$\begin{aligned} &\underline{[c\,c]}\,z \quad \ldots \quad + [c\,a]\,x \quad + [c\,b]\,y \quad + [c\,l] = 0 \\ &\qquad \underline{(d\,d)\,t} \quad + (d\,a)\,x \quad + (d\,b)\,y \quad + (d\,l) = 0 \\ &\qquad ([a\,a] + (a\,a))\,x + ([a\,b] + (a\,b))\,y + ([a\,l] + (a\,l)) = 0 \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

erstmals reduziert:

$$\left((d\,d) - \frac{0}{[c\,c]}\,0\right) t + \left((d\,a) - \frac{0}{[c\,c]}\,[c\,a]\right) x + \ldots$$
$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}\,[c\,a]\right) x + \ldots$$

nochmals reduziert:

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}\,[c\,a] - \frac{(d\,a)}{(d\,d)}\,(d\,a)\right) x + \ldots \qquad (12)$$

Der Coëfficient von x in (11) enthält in der That dieselben Bestandteile wie der Coëfficient von x in (12), und da es mit allen anderen Coëfficienten sich ähnlich verhält, so ist damit der bei (11) ausgesprochene Satz bewiesen.

Nun kann man auch noch einen Schritt weiter gehen, und mittelst des bei (5) bewiesenen Satzes über reduzierte Fehlergleichungen zu dem Schluss kommen:

Wenn einzelne Unbekannte z und t wie bei (7) und (8) nur in einem *Teil* der Fehlergleichungen vorkommen, so darf man für diese Partialgruppen von Fehlergleichungen reduzierte Fehlergleichungen von der Form (5) bilden und dann mit der Gesamtheit

aller reduzierten Fehlergleichungen weiterrechnen, wie wenn es Originalfehlergleichungen wären.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers sind jedoch die anfänglich eliminierten Unbekannten (z und t) in der Zahl u aller Unbekannten mitzuzählen.

§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder.

Wir haben in § 25. S. 63 angenommen, dass die Endgleichungen von den Normalgleichungen durch Vermittlung der allmählich reduzierten Gleichungen (4) (5) (6) S. 63 erlangt werden. Obgleich alle hiebei vorkommenden Beträge von der Form $-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$, $-\frac{[bc.1]}{[bc.1]}[bc.1]$ u. s. w. jedenfalls ausgerechnet werden müssen, kann man doch wenigstens das *allmähliche* Zusammensetzen dieser Beträge ersparen und durch eine *Gesamt*summierung ersetzen, so dass von den Gleichungen (4) und (5) § 25. S. 63 immer nur die erste jeder Gruppe gebildet wird.

In gleicher Weise, wie $[ll.3]$ in (8) § 27. S. 67 in seine Bestandteile rückwärts zerlegt wurde, kann man dieses mit allen anderen Coëfficienten thun, so zeigt z. B. ein Blick auf (4**) und (5**) § 28. S. 69:

$$[cl.2] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1] \tag{1}$$

und nach diesem Beispiel ist folgendes Schema für 4 Unbekannte gebildet:

A	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$
	a_2	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$
	α_1	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$
	B'	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bd.1]$	$[bl.1]$
		a_3	$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$
		α_2	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[al]$
		β_1	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]$
		C'	$[cc.2]$	$[cd.2]$	$[cl.2]$
			a_4	$[dd]$	$[dl]$
			α_3	$-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[al]$
			β_2	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bl.1]$
			γ_1	$-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cl.2]$
			D'''	$[dd.3]$	$[dl.3]$

Nach diesem Schema ist im Folgenden das Zahlenbeispiel von § 25. S. 64 von 4 Gleichungen, nebst Summenproben und Fehlersummengliedern $[ll]$ u. s. w. nochmals behandelt, und zwar sind alle Beträge $\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ u. s. w. mit dem Rechenschieber berechnet, so dass keine Zahl mehr zu schreiben war, als hier hergesetzt ist.

	x a	y b	z c	t d	l	s	Probe
A	+ 459	— 308	— 389	+ 244	— 507	+ 501	
		+ 464 — 208	+ 408 — 262	— 269 + 164	+ 695 — 341	— 990 + 337	
B'		+ 256	+ 146	— 105	+ 354	— 653	— 2
			+ 676 — 330 — 83	— 331 + 207 + 60	+ 653 — 430 — 202	—1017 + 425 + 378	
C'			+ 263	— 64	+ 21	— 219	+ 1
				+ 469 — 130 — 43 — 15	— 283 + 270 + 145 + 5	+ 170 — 267 — 268 — 58	
D'''				+ 281	+ 137	— 418	0
					+1129 — 560 — 490 — 2 — 66	—1687 + 554 + 902 + 17 + 203	
					+ 11	— 11	0

$$t = -\frac{+137}{+281} = -0{,}486$$

Die zwischen Horizontallinie stehenden Zahlen geben das Endgleichungssystem (10) §. 25. S. 63.

Ob durch die vorstehende Eliminations-Anordnung ein rechnerischer Gewinn im Vergleich mit § 25. S. 64 erzielt wird, kommt namentlich auf die Zahl der Unbekannten an. Bei wenigen Unbekannten ist es nicht der Fall, dagegen bei zahlreichen Unbekannten ist diese Anordnung nützlich, wenn die Additionen mit wechselnden Zeichen bequem eingerichtet werden.

Diese Anordnung ist bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch (mit Logarithmen), jedoch durchaus mit Subtraktion in Form von dekadischen Ergänzungen, so dass der Schluss obiger Tabelle so geschrieben wird:

+ 1129 × 9440 × 9510 × 9998 × 9934	× 8313 554 902 17 203
40011 = 11	× 9989 = — 11

Das Kreuz × ist dabei Zeichen für dekadische Ergänzung, zum Beispiel: × 8313 = 8313 — 10000 = — 1687.

(Anmerkung. Die obenstehende Elimination, ebenso wie S. 64, ist nur mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht, weshalb die letzte Stelle nicht überall scharf ist.)

§ 33. Gemeinsame Bestimmung aller Unbekannten $x\ y\ z \ldots$ und aller Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w.

Wir nehmen die Endgleichungen (9) § 25. S. 63 nochmals vor:

Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} A &= [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [al] = 0 \\ B' &= [bb.1]y + [bc.1]z + [bd.1]t + [bl.1] = 0 \\ C'' &= [cc.2]z + [cd.2]t + [cl.2] = 0 \\ D''' &= [dd.3]t + [dl.3] = 0 \\ & [ll.4] = [vv] \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z, und so fort aus der 2ten und 1ten Gleichung auch y und x. Dieses ist ein Verfahren, welches numerisch häufig angewendet wird, wie schon bei (10) § 25. S. 63 bemerkt wurde.

Nun kann man aber die fragliche Rückwärtssubstitution auch allgemein algebraisch ausführen, worauf sich ein übersichtliches Schema zur numerischen Rechnung gründen lassen wird.

Wenn man ausser den bereits bei (1) vorkommenden Klammern $[bb.1]$ u. s. w. noch einige andere ähnlich gebaute Coëfficienten einführt, welche wir im Folgenden durch *runde* Klammern $(ac.1)$ u. s. w. von den früheren unterscheiden wollen, so bekommt man folgendes Gleichungssystem, von dessen Richtigkeit man sich am besten rückwärts dadurch überzeugt, dass man die Ausdrücke (3) in (2) einsetzt, und die Resultate mit (1) vergleicht.

$$\left.\begin{array}{rl} -[aa]x &= [al] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[ab] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}(ac.1) - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}(ad.2) \\ -[bb.1]y &= [bl.1] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}[bc.1] - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}(bd.2) \\ -[cc.2]z &= [cl.2] - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}[cd.2] \\ -[dd.3]t &= [dl.3] \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dabei haben die neu eingeführten, durch runde Klammern unterschiedenen Coëfficienten folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{array}{rl} (ac.1) &= [ac] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[ab] \\ (ad.1) &= [ad] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}[ab] \\ (al.1) &= [al] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]}[ab] \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (ad.2) = (ad.1) - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}(ac.1) & (bd.2) = [bd.1] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]}[bc.1] \\ (al.2) = (al.1) - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}(ac.1) & (bl.2) = [bl.1] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}[bc.1] \end{array}\right\} \quad (4)$$

Wir fahren nun noch weiter fort, und setzen:

$$(al.3) = (al.2) - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}(ad.2), \; (bl.3) = (bl.2) - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}(bd.2), \; (cl.3) = [cl.2] - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}[cd.2] \quad (5)$$

und damit kann man $x\ y\ z\ t$ kurz so ausdrücken:

$$x = -\frac{(a\,l\,.\,3)}{[a\,a]} \qquad y = -\frac{(b\,l\,.\,3)}{[b\,b\,.\,1]} \qquad z = -\frac{(c\,l\,.\,3)}{[c\,c\,.\,2]} \qquad t = -\frac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]} \tag{6}$$

Es würde wenig Wert haben, alle diese Formeln aufzustellen, wenn es nicht ein einfaches Schema gäbe, nach welchem dieselben mechanisch ausgerechnet werden können. Dieses ist aber der Fall, wie folgendes zeigt:

$$\left.\begin{array}{cccccc|lllll}
 & [aa]_3 & [ab]_0 & [ac]_0 & [ad]_0 & [al]_0 & & & & & \\
 & & [bb] & [bc] & [bd] & [bl] & & & & & \\
A & & & [cc] & [cd] & [cl] & & & & & \\
 & & & & [dd] & [dl] & & & & & \\
 & & & & & [ll] & & & & & \\
\hline
 & & [bb.1]_3 & [bc.1]_1 & [bd.1]_1 & [bl.1]_1 & [ab]_0 & & & & \\
B & & & [cc.1] & [cd.1] & [cl.1] & [ac]_0 & & B' & & \\
 & & & & [dd.1] & [dl.1] & [ad]_0 & & & & \\
 & & & & & [ll.1] & [al]_0 & & & & \\
\hline
 & & & [cc.2]_3 & [cd.2]_2 & [cl.2]_2 & (ac.1) & [bc.1]_1 & & & \\
C & & & & [dd.2] & [dl.2] & (ad.1) & [bd.1]_1 & C' & & \\
 & & & & & [ll.2] & (al.1) & [bl.1]_1 & & & \\
\hline
D & & & & [dd.3]_3 & [dl.3]_3 & (ad.2) & (bd.2) & [cd.2]_2 & D' & \\
 & & & & & [ll.3] & (al.2) & (bl.2) & [cl.2]_2 & & \\
\hline
 & & & & L & [ll.4] & (al.3) & (bl.3) & (cl.3) & [dl.3]_3 & \text{Zähler} \quad L' \\
 & & & & & & [aa]_3 & [bb.1]_3 & [cc.2]_3 & [dd.3]_3 & \text{Nenner} \\
\hline
 & & & & & & -x & -y & -z & -t & \text{Quotient}
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Folgendes ist der Gang der Rechnung:

1. Die Abteilung A wird mit den gegebenen Coëfficienten ausgefüllt.
2. Die ganze Abteilung B wird in üblicher Weise berechnet nach der Regel: $[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w.
3. Man füllt die Abteilung B' aus durch Heruntersetzen der mit $_0$ bezeichneten Grössen von A.
4. Man berechnet C und die erste Columne von C' wieder ganz nach der alten Regel, welcher sich auch die drei neuen Grössen nach den früher angegebenen Formeln (S) anschliessen.
5. Man ergänzt die Abteilung C' durch Heruntersetzen der mit $_1$ bezeichneten Klammern von B.
6. Man bildet D nebst den zwei ersten Columnen von D' wieder nach der alten Regel, welche für $[l\,l\,.\,3]$ sowie $(a\,l\,.\,2)$ u. s. w. *gemeinsam* ist [vgl. (4)].
7. Man setzt wieder die $[\dots]_2$ von C nach D' hinunter.
8. L und die Zähler in L' werden wieder nach der alten Regel [s. o. (5)] gebildet.
9. Die Nenner $[\dots]_3$ werden von $A\ B\ C\ D$ nach L' hinuntergesetzt.
10. Die Quotientenbildung in L ergiebt die Unbekannten nach den Formeln (6).

Zahlenbeispiel mit 3 Unbekannten. *)

$$\left.\begin{array}{rrrrl} +\underline{17,50}\,x - & 6,50\,y - & 6,50\,z - & 2,14 & = 0 \\ & +\underline{17,50}\,y - & 6,50\,z - & 13,96 & = 0 \\ & & +\underline{20,50}\,z + & 5,40 & = 0 \\ & & & +\underline{100,34} & \end{array}\right\} \qquad (8)$$

a	b	c	l			
+ 17,50	— 6,50	— 6,50	— 2,14			
	+ 17,50	— 6,50	— 13,96			
	— 2,41	— 2,41	— 0,79			
		+ 20,50	+ 5,40			
		— 2,41	— 0,79			
			+ 100,34			
			— 0,26			
	+ 15,09	— 8,91	— 14,75	— 6,50*		
		+ 18,09	+ 4,61	— 6,50*		
		— 5,26	— 8,71	— 3,84		
			+ 100,08	— 2,14*		
			— 14,42	— 6,35		
		+ 12,83	— 4,10	— 10,34	— 8,91*	
			+ 85,66	— 8,49	— 14,75*	
			— 1,31	— 3,30	— 2,85	
			+ 84,35	— 11,79	— 17,60	— 4,10*
			= [v v]	— 17,50*	— 15,09*	— 12,83* neg. Nenner
				+ 0,67	+ 1,17	+ 0,32
				= x	= y	= z

(9)

Die Subtrahenden von der Form $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$ u. s. w. sind hier zur Unterscheidung mit *kleineren* Zahlen gedruckt; dieselben sind durchaus mit dem Rechenschieber berechnet.

Alle von links nach rechts hinüber gesetzten Zahlen sind rechts mit * bezeichnet.

Wenn es sich nun weiter darum handelt, auch alle Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. zu bestimmen, so hat man nach (19) § 28. S. 71 an Stelle der Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ $[c\,l]$ die Werte -1 0 0 zu setzen u. s. w., und die Elimination in den hierauf bezüglichen Teilen zu wiederholen, d. h. wir bekommen folgendes:

*) Dieses Zahlenbeispiel entspricht der Stationsausgleichung auf der Station Lautern, s. die königl. preuss. Landes-Triangulation Hauptdreiecke I. Teil 2. Aufl. Berlin 1870, S. 58.

a	*b*	*c*					
+ 17,50	— 6,50	— 6,50	— 1,00				
	+ 17,50	— 6,50	0,00				
	— 2,41	— 2,41	— 0,37				
		+ 20,50	0,00				
		— 2,41	— 0,37				
	+ 15,09	— 8,91	— 0,37	— 6,50*			
		+ 18,09	— 0,37	— 6,50*			
		— 5,26	— 0,22	— 3,84			
				— 1,00*			
				— 0,16			
		+ 12,83	— 0,59	— 10,34	— 8,91*		
				— 1,16	— 0,37*		
				— 0,48	— 0,41		
				— 1,64	— 0,78	— 0,59*	
				— 17,50*	— 15,09*	— 12,83	
				+ 0,094	+ 0,052	+ 0,046	
				= [$\alpha\alpha$]	= [$\alpha\beta$]	= [$\alpha\gamma$]	(10)
	b	*c*					
	+ 15,09	— 8,91	— 1,00				
		+ 18,09	0,00				
		— 5,26	— 0,59				
		+ 12,83	— 0,59	— 8,91*			
				— 1,00*			
				— 0,41			
				— 1,41	— 0,59*		
				— 15,09	— 12,83		
				+ 0,093	+ 0,046		
				= [$\beta\beta$]	= [$\beta\gamma$]		(11)
		c					
		+ 12,83	— 1,00	— 1,00*			
				— 12,83*			
				+ 0,078			
				= [$\gamma\gamma$]			(12)

Anmerkung zur 4ten Spalte: Statt der Absolutglieder — 1,00 , — 1,00 , — 1,00 kann man auch — 10,00 , — 10,00 , — 10,00 schreiben, und dann bekommt man die 10fachen Werte von [$\alpha\alpha$] , [$\alpha\beta$] u. s. w. Eine solche Maassänderung ist oft für die Schärfe der Rechnung nützlich.

Wir haben das Schema konsequent bis zu [$\gamma\gamma$] fortgesetzt, obgleich die Reciproke von [$\gamma\gamma$], nämlich 12,83, in der Form [$cc.2$], schon in der Berechnung von $x\ y\ z$ bei (9) enthalten ist.

Damit haben wir *Alles* erhalten, was aus den Normalgleichungen (8) für irgend welche Ausgleichungszwecke überhaupt abzuleiten ist, nämlich in Zusammenstellung:

$$x = +\,0{,}67 \qquad y = +\,1{,}17 \qquad z = +\,0{,}32 \qquad [vv] = 84{,}34 \qquad (13)$$

$$\left.\begin{array}{lll} [\alpha\alpha] = +0{,}094 & [\alpha\beta] = +0{,}052 & [\alpha\gamma] = +0{,}046 \\ & [\beta\beta] = +0{,}093 & [\beta\gamma] = +0{,}046 \\ & & [\gamma\gamma] = +0{,}078 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Zum Schlusse dieser Betrachtungen wollen wir auch noch die sämtlichen algebraischen Formeln für die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w. anschreiben.

Nach § 28. (2*) und (19), S. 69—70, sind $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\alpha\gamma]$ u. s. w. diejenigen Werte, welche x y z . . . annehmen, wenn in den Normalgleichungen gesetzt wird:

$$[al] = -1 \qquad [bl] = 0 \qquad [cl] = 0 \qquad [dl] = 0$$

In ähnlicher Weise erhält man auch alle anderen Coëfficienten.

Da die Ausführung aller dieser Substitutionen keinerlei Schwierigkeiten verursacht, schreiben wir sofort die Resultate:

$$[\alpha\alpha] = \left([aa] + \frac{[ab][ab]}{[bb.1]} + \frac{(ac.1)(ac.1)}{[cc.2]} + \frac{(ad.2)(ad.2)}{[dd.3]}\right)\frac{1}{[aa][aa]}$$

$$[\alpha\beta] = \left(-[ab] + \frac{[bc.1](ac.1)}{[cc.2]} + \frac{(bd.2)(ad.2)}{[dd.3]}\right)\frac{1}{[aa][bb.1]}$$

$$[\alpha\gamma] = \left(-(ac.1) + \frac{[cd.2](ad.2)}{[dd.3]}\right)\frac{1}{[aa][cc.2]}$$

$$[\alpha\delta] = -(ad.2)\frac{1}{[aa][dd.3]}$$

$$[\beta\beta] = \left([bb.1] + \frac{[bc.1][bc.1]}{[cc.2]} + \frac{(bd.2)(bd.2)}{[dd.3]}\right)\frac{1}{[bb.1][bb.1]}$$

$$[\beta\gamma] = \left(-[bc.1] + \frac{[cd.2](bd.2)}{[dd.3]}\right)\frac{1}{[bb.1][cc.2]}$$

$$[\beta\delta] = -(bd.2)\frac{1}{[bb.1][dd.3]}$$

$$[\gamma\gamma] = \left([cc.2] + \frac{[cd.2][cd.2]}{[dd.3]}\right)\frac{1}{[cc.2][cc.2]}$$

$$[\gamma\delta] = -[cd.2]\frac{1}{[cc.2][dd.3]}$$

$$[\delta\delta] = \frac{1}{[dd.3]}.$$

§ 34. Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Normalgleichungen.

Man kann die Frage aufwerfen, ob die Auflösung der Normalgleichungen immer möglich ist.

Wir betrachten zuerst den besonderen Fall, dass die Anzahl der Fehlergleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist, und nehmen nur 2 Elemente an:

Fehlergleichungen: *Normalgleichungen:*

$$\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & [aa]x + [ab]y + [al] = 0 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & [ab]x + [bb]y + [bl] = 0 \end{array} \qquad (1)$$

Reduzierte Normalgleichung: $$[bb.1]y + [bl.1] = 0 \qquad (2)$$

Fehlerquadratsumme: $$[vv] = [ll.2] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} \qquad (3)$$

In diesem einfachen Falle ist aber:

$$[aa] = a_1^2 + a_2^2 \qquad [ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad [al] = a_1 l_1 + a_2 l_2$$
$$[bb] = b_1^2 + b_2^2 \qquad [bl] = b_1 l_1 + b_2 l_2$$
$$[ll] = l_1^2 + l_2^2$$

Setzt man dieses in (2) ein, so erhält man nach kurzer Um-Ordnung:

$$[bb.1] = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} \qquad [bl.1] = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 l_2 - a_2 l_1)}{a_1^2 + a_2^2} \tag{4}$$

folglich wird
$$y = -\frac{[bl.1]}{[bb.1]} = -\frac{(a_1 l_2 - a_2 l_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \tag{5}$$

Das ist *derselbe* Wert y, den man auch unmittelbar aus den Fehlergleichungen mit $v_1 = 0$ und $v_2 = 0$ erhalten würde. Die Normalgleichungen bilden also hier einen Umweg, den man aber unter Umständen deswegen betritt, weil dabei das Gewicht von y, $p_y = [bb.1]$ erhalten wird, welches die Fehlergleichungen an und für sich nicht geben würden.

Gehen wir nun weiter zu der Fehlerquadratsumme $[vv]$ nach (3), so zeigt sich bald, dass diese gleich Null wird, denn die Ausrechnung giebt:

$$[vv] = [ll.2] = l_1^2 + l_2^2 - \frac{(a_1 l_1 + a_2 l_2)^2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{(a_1 l_2 - a_2 l_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} = 0 \tag{6}$$

Wollte man ferner einen mittleren Gewichtseinheitsfehler berechnen, so würde man erhalten:
$$m^2 = \frac{[ll.2]}{2-2} = \frac{0}{0} \tag{7}$$

Denken wir uns, zur Veranschaulichung, unter den 2 Fehlergleichungen etwa 2 lineare Bestimmungen eines Punktes mit den Coordinaten x und y, so erhalten die Resultate (4) bis (7) folgende Deutungen:

Bei 2 Strahlen ist eine Ausgleichung zur Punktbestimmung nicht nötig, wenn man aber trotzdem die Ausgleichungsformeln anwendet, so geben sie denselben Schnittpunkt $x\ y$, den man auch ohne Ausgleichung erhalten hätte, mit bestimmten Gewichten $p_y = [bb.1]$ und $p_x = [aa.1]$, aber ohne einen bestimmten mittleren Gewichtseinheitsfehler m.

Hat man aber die Kenntnis eines solchen Wertes m von irgend anderwärts, so kann man auch mittlere Coordinatenfehler berechnen:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{[bb.1]}} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{[aa.1]}}$$

Unmöglich wird die Bestimmung von y und x dann, wenn die Coëfficienten $a_1\ b_1$ $a_2\ b_2$ in (1) gleiches Verhältnis haben:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \text{also} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \tag{8}$$

d. h. wenn die betreffenden Strahlen parallel werden.

Dagegen wird die Bestimmung von x und y wieder möglich, wenn zu zweien Fehlergleichungen mit konstantem Verhältnis $b : a$ eine dritte mit anderem Verhältnis $b_3 : a_3$ hinzutritt, oder allgemein, wenn bei beliebig vielen Fehlergleichungen, mit 2 Unbekannten, wenigstens 2 Fehlergleichungen sind, deren Coëfficientenverhältnisse $b : a$ nicht gleich sind. Denn wenn *alle* Verhältnisse $b : a$ einander gleich wären, so würde auch $\frac{[ab]}{[aa]} = \frac{b}{a}$, also:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb] - \frac{b}{a}[ab] = [bb] - [bb] = 0.$$

Bei nur 2 Unbekannten x und y lassen sich alle diese Verhältnisse leicht überblicken; für irgend welche Zahl von Unbekannten hat schon *Gauss* in der „Theoria combinationis“ art. 23. Betrachtungen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung angestellt.

In neuerer Zeit ist diese Frage durch die Determinantentheorie theoretisch noch klarer gemacht worden in folgender Weise: *)

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Normalgleichungen eine und nur eine Auflösung zulassen, besteht darin, dass die aus den Coëfficienten der in diesen Gleichungen vorkommenden Unbekannten zusammengesetzte Determinante von Null verschieden sei.

Diese Determinante entsteht aus dem System der Coëfficienten der Unbekannten in den Bedingungsgleichungen durch Komposition mit sich selbst. Sie ist daher gleich (nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten) der Summe der Quadrate derjenigen Determinanten, welche man erhält, indem man aus dem System der Fehlergleichungen auf alle möglichen verschiedenen Weisen jedesmal so viel Gleichungen herausgreift, als Unbekannte zu bestimmen sind, und die Coëfficienten der Unbekannten in den herausgegriffenen Gleichungen zu einer Determinante zusammenstellt. Ist von diesen letzteren Determinanten auch nur eine von Null verschieden, so ist die Determinante der Coëfficienten der Unbekannten in den Normalgleichungen ebenfalls von Null verschieden.

Das System der Normalgleichungen hat daher jedesmal dann eine und nur eine Lösung, wenn sich aus den Fehlergleichungen auch nur eine einzige Gruppe von Gleichungen absondern lässt, welche eben so viele Gleichungen enthält, als Unbekannte vorhanden sind, und die Eigenschaft hat, eine und nur eine Lösung zu besitzen.

§ 35. Determinantenformeln für 3 Elemente.

(Ohne Zusammenhang mit unserem allgemeinen Entwicklungsgang.)

Man kann bei 3 Elementen $x\ y\ z$ immer noch die Auflösungsformeln für $x\ y\ z$ und die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w. in einigermassen geschlossener Form angeben, ähnlich wie bei 2 Unbekannten, namentlich wenn man *Determinanten* anwendet, welche selbst ja auch bei 3 Elementen noch übersichtliche Ausrechnung gestatten.

Praktische Bedeutung haben die nachfolgenden Formeln kaum, denn die numerische Auswertung der Unbekannten und ihrer Gewichte geschieht immer am besten auf dem Wege der allmählichen Elimination.

Wenn folgende Fehlergleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + l_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

so sind die zugehörigen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

*) Diese Darstellung, und allgemeine Orientierung über Determinanten, verdanke ich Herrn Professor Dr. *v. Mangoldt* in Aachen, früher in Hannover.

Durch allmähliche Elimination findet man hieraus:

$$\left.\begin{array}{l}[bb.1]\,y+[bc.1]\,z+[bl.1]=0\\ [bc.1]\,y+[cc.1]\,z+[cl.1]=0\end{array}\right\} \qquad (3)$$

$$[cc.2]\,z+[cl.2]=0 \qquad (4)$$

Andererseits kann man die Determinantentheorie anwenden:

$$D=\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}=\left.\begin{array}{l}+[aa]\,[bb]\,[cc]-[ac]\,[bb]\,[ac]\\ +[ab]\,[bc]\,[ac]-[aa]\,[bc]\,[bc]\\ +[ac]\,[ab]\,[bc]-[ab]\,[ab]\,[cc]\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Analog sei:

$$D_x=\begin{vmatrix}[al] & [ab] & [ac]\\ [bl] & [bb] & [bc]\\ [cl] & [bc] & [cc]\end{vmatrix} \quad D_y=\begin{vmatrix}[aa] & [al] & [ac]\\ [ab] & [bl] & [bc]\\ [ac] & [cl] & [cc]\end{vmatrix} \quad D_z=\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [al]\\ [ab] & [bb] & [bl]\\ [ac] & [bc] & [cl]\end{vmatrix} \qquad (6)$$

Dann werden x y und z so bestimmt:

$$x=-\frac{D_x}{D} \qquad y=-\frac{D_y}{D} \qquad z=-\frac{D_z}{D} \qquad (7)$$

Zwischen (4) und (5) und (6) bestehen einfache Beziehungen, es ist nämlich:

$$[cc.2]=\frac{D}{[aa]\,[bb]-[ab]\,[ab]} \qquad [cl.2]=\frac{D_z}{[aa]\,[bb]-[ab]\,[ab]} \qquad (8)$$

wo der Nenner $[aa]\,[bb]-[ab]\,[ab]$ die schon früher in § 16. benützte Coëfficienten-Determinante zweiter Ordnung ist.

$[cc.2]$ ist zugleich die Reciproke des Gewichts-Coëfficienten $[\gamma\gamma]$. Alle Gewichts-Coëfficienten lassen sich ähnlich darstellen:

$$\left.\begin{array}{lll}[\alpha\alpha]=\dfrac{[bb][cc]-[bc][bc]}{D} & [\alpha\beta]=-\dfrac{[ab][cc]-[ac][bc]}{D} & [\alpha\gamma]=-\dfrac{[ac][bb]-[ab][bc]}{D}\\ & [\beta\beta]=\dfrac{[aa][cc]-[ac][ac]}{D} & [\beta\gamma]=-\dfrac{[bc][aa]-[ab][ac]}{D}\\ & & [\gamma\gamma]=\dfrac{[aa][bb]-[ab][ab]}{D}\end{array}\right\} \qquad (9)$$

Auch die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler, $[ll.2]$, kann man dreifach durch Determinanten darstellen:

$$[ll.2]=\frac{\begin{vmatrix}[ll] & [lb] & [lc]\\ [lb] & [bb] & [bc]\\ [lc] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[bb] & [bc]\\ [bc] & [cc]\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}[aa] & [al] & [ac]\\ [al] & [ll] & [lc]\\ [ac] & [lc] & [cc]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa] & [ac]\\ [ac] & [cc]\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [al]\\ [ab] & [bb] & [bl]\\ [al] & [bl] & [ll]\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}[aa] & [ab]\\ [ab] & [bb]\end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Die Richtigkeit aller vorstehenden Formeln kann man sofort einsehen, wenn man die Determinanten zweiten und dritten Grades in bekannter Weise entwickelt. Über die Gültigkeit analoger Formeln für mehr als 3 Elemente verweisen wir auf *Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 1. Teil S. 253 u. ff., und entnehmen von dort auch noch, dass die Coëfficienten-Determinante D ausser der ursprünglichen Form (5) noch folgende andere leicht zu begründende Formen hat:

$$D=\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ 0 & [bb.1] & [bc.1]\\ 0 & [bc.1] & [cc.1]\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ 0 & [bb.1] & [bc.1]\\ 0 & 0 & [cc.2]\end{vmatrix}=[aa].[bb.1].[cc.2]$$

Auch für die Gewichts-Coëfficienten bestehen noch manche andere Formen:

$$[\gamma\gamma] = \frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & 0 \\ [ab] & [bb] & 0 \\ [ac] & [bc] & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & 0 \\ 0 & [bb.1] & 0 \\ 0 & [bc.1] & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{[aa] \begin{vmatrix} [bb.1] & 0 \\ [bc.1] & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

Die erste dieser 3 Formen giebt aufgelöst daselbe wie (9).

Man kann solche Formeln vielleicht gelegentlich als Rechenproben benützen.

Die Determinanten sind symbolische Bezeichnungen, ähnlich wie unsere $[bb.1]$ $[cc.2]$ u. s. w., und so lange diese besonders der Methode der kleinsten Quadrate angepasste Symbolik ausreicht, ist kein Grund vorhanden, eine andere, für numerische Berechnung weniger geeignete Symbolik anzuwenden.

Die Benützung allgemeiner Determinantensätze zu Betrachtungen von solcher Art wie am Schluss von § 34. ist dagegen sehr nützlich.

§ 36. Interpolationsausgleichung einer periodischen Erscheinung.

Als Abschluss der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nehmen wir hier ein Beispiel mit periodischer Form der Ausgleichungsfunktion, welche z. B. bei meteorologischen Beobachtungen, bei Pegelbeobachtungen am Meeresufer, oder bei anderen periodischen Erscheinungen Anwendung finden kann.

Als periodische Funktion nehmen wir die folgende:

$$F = (F) + r_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + r_2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + r_3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots \quad (1)$$

wobei φ unabhängige Veränderliche, etwa der Zeit entsprechend, ist. Die Konstanten $r_0\ r_1\ r_2\ r_3 \ldots \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ sollen so bestimmt werden, dass die Funktionswerte sich gegebenen Beobachtungen möglichst gut anschliessen, d. h. dass die Quadratsumme der Abweichungen der Funktionswerte F von den Beobachtungen ein Minimum werde.

Zum Zweck der Ausgleichung muss man die Funktion (1) in Bezug auf die zu ermittelnden Unbekannten linear machen, und zwar geschieht dieses einfach durch Auflösung:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \varphi) &= \sin\alpha_1 \cos\varphi + \cos\alpha_1 \sin\varphi \\ \sin(\alpha_2 + 2\varphi) &= \sin\alpha_2 \cos 2\varphi + \cos\alpha_2 \sin 2\varphi \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \sin\alpha_1 = y_1 & r_1 \cos\alpha_1 = x_1 \\ r_2 \sin\alpha_2 \quad y_2 & r_2 \cos\alpha_2 = x_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

und damit nimmt die Funktion (1) folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} F' = (F) &+ y_1 \cos\varphi + y_2 \cos 2\varphi + y_3 \cos 3\varphi + \ldots \\ &+ x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + x_3 \sin 3\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Man führt also statt der Unbekannten r und α die neuen Unbekannten y und x ein, und wenn diese ermittelt sind, kann man jederzeit wieder zu r und α zurückkehren, indem man die Gleichungen (2) nach den Unbekannten r und α auflöst.

Wir setzen folgende Beobachtungen voraus:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Amplitude } \varphi = & 0 & i & 2i & 3i\ldots & (n-1)i \\ \text{Beobachtung} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3\ldots & F_{n-1} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dabei ist i das Intervall der Amplitude φ, und zwar sollen die Beobachtungen sich gleichförmig auf *eine* Periode verteilen, d. h.

$$n\,i = 360^\circ. \tag{5}$$

Man bildet nun aus (3) die den n Beobachtungen F entsprechenden n Fehlergleichungen, deren allgemeine Form diese ist:

$$v = (F) + y_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi + y_2 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots - F \tag{6}$$

Die n Fehlergleichungen gehen hieraus hervor, wenn man für φ der Reihe nach die Werte 0, i, $2i \ldots$ und für F entsprechend die Werte $F_0\ F_1\ F_2 \ldots$ einsetzt. Wir bilden die Tabelle der Coëfficienten der Fehlergleichungen, und um die Bezeichnungen festzusetzen, schreiben wir zu (6) noch die entsprechende Gleichung:

$$v = a(F) + b\,y_1 + c\,x_1 + d\,y_2 + e\,x_2 + \ldots + l \tag{7}$$

Die Tabelle der Coëfficienten $a\ b\ c \ldots$ und der Absolutglieder l ist:

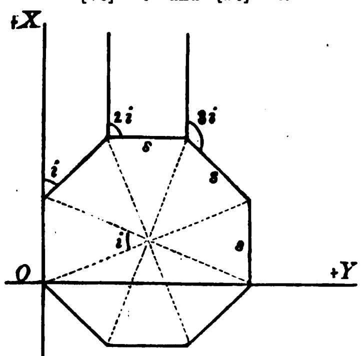
a	b	c	d	e	...	l
$+1$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	...	$-F_0$
$+1$	$\cos i$	$\sin i$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$(3i)$	$-F_1$
$+1$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$(6i)$	$-F_2$
$+1$	$\cos 3i$	$\sin 3i$	$\cos 6i$	$\sin 6i$	$(9i)$	$-F_3$
$+1$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$\cos 8i$	$\sin 8i$	...	$-F_4$
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

(8)

Wenn man nun die Summen-Coëfficienten $[aa]\ [ab] \ldots$ bildet, so bemerkt man bald, dass dieselben wegen der symmetrischen Anordnung der Beobachtungen höchst einfach werden. Die Coëfficienten sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{lllll}
[aa] = n & [ab] = 0 & [ac] = 0 & [ad] = 0 & [ae] = 0 \\
 & [bb] = \frac{n}{2} & [bc] = 0 & [bd] = 0 & [be] = 0 \\
 & & [cc] = \frac{n}{2} & [cd] = 0 & [ce] = 0 \\
 & & & [dd] = \frac{n}{2} & [de] = 0 \\
 & & & & [ee] = \frac{n}{2}
\end{array}\right\} \tag{9}$$

Fig. 8.
Geometrische Darstellung der Gleichungen $[ab] = 0$ und $[ac] = 0$.



Die Begründung dieser Formeln kann durch eine geometrische Betrachtung nach Fig. 8. ge schehen: Die Gleichung (5), $n\,i = 36\ ^\circ$, entspricht der Konstruktion eines regelmässigen Vielecks von n Seiten, dessen Projektionen auf 2 Achsen nach Fig. 8. sind:

Projektion auf x:

$$s + s\cos i + s\cos 2i + s\cos 3i + \ldots$$

Projektion auf y:

$$0 + s\sin i + s\sin 2i + s\sin 3i + \ldots$$

Die Projektionen eines geschlossenen Vielecks auf 2 Achsen sind aber algebraisch = Null, es sind daher durch diese Projektionen die beiden Gleichungen der Gruppe (9) bewiesen: $[ab] = 0$ und $[ac] = 0$.

Ganz ebenso verhält es sich mit den übrigen Produktsummen $[a\,d] = 0$, $[a\,e] = 0$ u. s. w., denn hier handelt es sich nur um *mehrfaches* Durchlaufen von Polygonen mit Centriwinkeln $2\,i$, $3\,i$ u. s. w., und ähnlich verhält es sich auch mit $[b\,c]$, $[b\,d]$ u. s. w.; man überzeugt sich, dass jedem Glied $\sin(\ldots)\cos(\ldots)$ immer ein Glied gegenübersteht von der Form $\sin(\ldots \pm 180°)\cos(\ldots)$. Bei den Quadratsummen $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. findet man immer Gruppierung $\sin^2(\ldots) + \cos^2(\ldots)$.

Indem wir hiernach die Coëfficienten (9) als erledigt betrachten, gehen wir zur Auflösung der Normalgleichungen über, welche sind:

$$\left.\begin{array}{ll} [a\,a]\,y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & + [a\,l] = 0 \\ \quad [b\,b]\,y_1 \ldots\ldots & + [b\,l] = 0 \\ \qquad [c\,c]\,x_1 & + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{9a}$$

Jede Normalgleichung enthält also nur *eine* Unbekannte, und Elimination ist gar nicht nötig. Indem wir nun auch die Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ ... nach (8) bilden, erhalten wir folgende Auflösung der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} n\,(F) = -[a\,l] \quad [F] \\ \frac{n}{2} y_1 \;=\; -[b\,l] = (F_0 + F_1 \cos i + F_2 \cos 2\,i + F_3 \cos 3\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2} x_1 \;=\; -[c\,l] = (\ldots \quad F_1 \sin i + F_2 \sin 2\,i + F_3 \sin 3\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2} y_2 \;=\; -[d\,l] = (F_0 + F_1 \cos 2\,i + F_2 \cos 4\,i + F_3 \cos 6\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2} x_2 \;=\; -[e\,l] = (\ldots \quad F_1 \sin 2\,i + F_2 \sin 4\,i + F_3 \sin 6\,i + \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Die erste Gleichung $n\,(F) = [F]$ sagt aus, dass (F) das arithmetische Mittel aller Beobachtungen F ist, und es scheint nun passend, alle Beobachtungen von diesem Mittel an zu zählen, und zu setzen:

$$\left.\begin{array}{l} F_0 = (F) + f_0 \\ F_1 = (F) + f_1 \\ F_2 = (F) + f_2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{11}$$

hiebei ist:
$$[f] = 0 \tag{12}$$

Man darf nun auch in (10) überall f statt F schreiben, denn es wird z. B. durch Substitution von (11) in y_1:

$$y_1 = \frac{2}{n}(f_0 + f_1 \cos i + f_2 \cos 2\,i + \ldots) + \frac{2}{n}(F)(1 + \cos i + \cos 2\,i + \ldots)$$

Die Klammer des zweiten Gliedes ist aber $= [a\,b] = 0$, folglich:

$$y_1 = \frac{2}{n}(f_0 + f_1 \cos i + f_2 \cos 2\,i + f_3 \cos 3\,i + \ldots) \tag{13}$$

und ähnlich verhält es sich mit x_1 y_2 x_2 ...

Man kann noch die Summe $[v\,v]$ und den mittleren Fehler m einer Beobachtung angeben. Da nach (9) alle Produktsummen $[a\,b]$, $[a\,c]$ ... gleich Null sind, so werden auch alle $[b\,c\,.\,1]$, $[c\,d\,.\,2]$ u. s. w. gleich Null, und damit reduziert sich die Formel (8) § 27. S. 67 auf die einfache Gestalt:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} \ldots$$

Wegen (10) und (9) hat man hier:

$$\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} = n\,(F)^2$$

$$\frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} = \frac{n}{2}\,y_1^2 \qquad \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} = \frac{n}{2}\,x_1^2$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}\,(y_1^2 + x_1^2) - \frac{n}{2}\,(y_2^2 + x_2^2) - \ldots \tag{14}$$

Wegen (2) ist $\quad y_1^2 + x_1^2 = r_1^2 \qquad y_2^2 + x_2^2 = r_2^2 \ldots$

also

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}\,[r\,r] \tag{15}$$

Das Anfangsglied $[l\,l]$ ist nach (8) zunächst:

$$[l\,l] = [F\,F]$$

Aus (11) folgt:

$$[F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2 + 2\,(F)\,[f] \tag{16}$$

oder weil nach (12) $[f] = 0$ ist:

$$[l\,l] = [F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2$$

Dieses in (15) gesetzt giebt:

$$[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}\,[r\,r] \tag{17}$$

Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} \tag{18}$$

wobei u die Anzahl der Konstanten in der Interpolationsformel ist, z. B. in (1) ist $u = 7$; wenn man dagegen schon bei den Gliedern mit 2φ abbricht, wie in (14), so ist $u = 5$.

Wir stellen noch besondere Formeln auf für den häufig vorkommenden Fall $n = 12$, also nach (5), $i = 30°$. In diesem Falle wird nach (13):

$$6\,y_1 = f_0 + f_1 \cos 30° + f_2 \cos 60° + f_3 \cos 90° + f_4 \cos 120° + f_5 \cos 150°$$
$$+ f_6 \cos 180° + f_7 \cos 210° + f_8 \cos 240° + f_9 \cos 270° + f_{10} \cos 300° + f_{11} \cos 330°$$

Da aber alle hier vorkommenden goniometrischen Funktionen sich auf $\sin 30° = 0{,}5$ und $\cos 30° = 0{,}8660$ reduzieren lassen, so erhält man:

$$6\,y_1 = (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 - f_{10}) \sin 30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11}) \cos 30°$$

Alle derartigen Formeln für $n = 12$, entsprechend einer Funktion (1), welche bis $4\,\varphi$ fortgesetzt wird, erhält man aus (10), mit Rücksicht auf die Ersetzung der F durch f, wie bei (13). Die Resultate sind:

$$\left.\begin{aligned} 6\,y_1 &= (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 + f_{10}) \sin 30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11}) \cos 30° \\ 6\,x_1 &= (f_3 - f_9) + (f_1 + f_5 - f_7 - f_{11}) \sin 30° + (f_2 + f_4 - f_8 - f_{10}) \cos 30° \end{aligned}\right\} \tag{19$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} 6\,y_2 &= (f_0 - f_3 + f_6 - f_9) + (f_1 - f_2 - f_4 + f_5 + f_7 - f_8 - f_{10} + f_{11}) \sin 30° \\ 6\,x_2 &= (f_1 + f_2 - f_4 - f_5 + f_7 + f_8 - f_{10} - f_{11}) \cos 30° \end{aligned}\right\} \tag{19$_2$}$$

$$\left.\begin{aligned} 6\,y_3 &= (f_0 - f_2 + f_4 - f_6 + f_8 - f_{10}) \\ 6\,x_3 &= (f_1 - f_3 + f_5 - f_7 + f_9 - f_{11}) \end{aligned}\right\} \tag{19$_3$}$$

$$\left.\begin{aligned} 6\,y_4 &= (f_0 + f_3 + f_6 + f_9) - (f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 + f_{10} + f_{11}) \sin 30° \\ 6\,x_4 &= (f_1 - f_2 + f_4 - f_5 + f_7 - f_8 + f_{10} - f_{11}) \cos 30° \end{aligned}\right\} \tag{19$_4$}$$

Man kann auch für andere Fälle die Coëfficienten $\sin i \quad \sin 2i \quad \sin 3i \ldots$ $\cos i \quad \cos 2i \quad \cos 3i \ldots$ ein für allemal berechnen, z. B. für $n = 73$, $i = 4° 55' 53''$ (5tägige Mittel, $n = 365 : 5$) sind die Logarithmen solcher Coëfficienten mitgeteilt in: „Des anomalies de la température observées à Genève par Plantamour, Genf und Basel 1867“ S. 20 und 21, wobei jedoch die Amplitude φ anders gezählt ist, so dass die Formeln und die zugehörigen Coëfficienten nicht unmittelbar mit den unsrigen übereinstimmen.

Zu einem Zahlenbeispiel für die Formeln (19) nehmen wir die 6jährigen Barometermittel von 1868—1873, welche auf der libyschen Expedition, von Ismael-Bey in Kairo mitgeteilt wurden (Phys. Geogr. und Meteorol. der lib. Wüste S. 144). Die 6jährigen Mittel für die einzelnen Monate gehen in unsere Rechnung als Beobachtungen F ein, wie folgende Tabelle zeigt:

φ	Monat	Beobachtet			Ausgeglichen		Widersprüche	
		F	$f = F - 758{,}26$	f^2	f'	F'	v	v^2
		mm	mm		mm	mm	mm	
0°	Januar . . 0.	761,70	+ 3,44	11,83	+ 3,95	762,21	+ 0,51	0,26
30°	Februar . . 1.	761,74	+ 3,48	12,11	+ 2,80	761,06	− 0,68	0,46
60°	März . . . 2.	757,62	— 0,64	0,41	+ 0,09	758,35	+ 0,73	0,53
90°	April . . . 3.	758,14	— 0,12	0,01	— 0,72	757,54	— 0,60	0,36
120°	Mai. . . . 4.	757,15	— 1,11	1,23	— 0,77	757,49	+ 0,34	0,12
150°	Juni . . . 5.	755,75	— 2,51	6,30	— 2,52	755,74	— 0,01	0,00
180°	Juli . . . 6.	754,51	— 3,75	14,06	— 4,00	754,26	— 0,25	0,06
210°	August . . 7.	754,40	— 3,86	14,90	— 3,46	754,80	+ 0,40	0,16
240°	September . 8.	757,10	— 1,16	1,35	— 1,52	756,74	— 0,36	0,13
270°	Oktober . . 9.	758,90	+ 0,64	0,41	+ 0,84	759,10	+ 0,20	0,04
300°	November . 10.	760,51	+ 2,25	5,06	+ 2,27	760,53	+ 0,02	0,00
330°	Dezember. . 11.	761,61	+ 3,35	11,22	+ 3,08	761,34	— 0,27	0,07
	Mittel (F) =	758,26	+ 13,16	78,89	+ 13,03	758,26	+ 2,20	2,19
			— 13,15		— 12,99		— 2,17	

Nach (19_1) (19_2) (19_3) (19_4) wird berechnet:

$$6\,y_1 = +20{,}561 \qquad 6\,y_2 = -0{,}270 \qquad 6\,y_3 = +3{,}31 \qquad 6\,y_4 = +0{,}11$$
$$6\,x_1 = -\;2{,}479 \qquad 6\,x_2 = -3{,}603 \qquad 6\,x_3 = +2{,}24 \qquad 6\,x_4 = +1{,}49$$

Nach (2) hat man

$$\tan g\,\alpha_1 = \frac{+20{,}561}{-\;2{,}479} \qquad \alpha_1 = 96° 53'$$

$$r_1 = \frac{1}{6}\,\frac{20{,}561}{\sin \alpha_1} = \frac{1}{6}\,\frac{-2{,}479}{\cos \alpha_1} \qquad r_1 = 3{,}452$$

und in gleicher Weise findet man auch die übrigen α und r, so dass man hat:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 96° 53' & r_1 &= 3{,}452 \\ \alpha_2 &= 184° 17' & r_2 &= 0{,}602 \\ \alpha_3 &= 55° 55' & r_3 &= 0{,}666 \\ \alpha_4 &= 4° 13' & r_4 &= 0{,}249 \end{aligned}$$

Die Interpolationsformel heisst jetzt:

$$\left.\begin{aligned} f' = 3{,}452 \sin(96° 53' + \varphi) + 0{,}602 \sin(184° 17' + 2\varphi) \\ + 0{,}666 \sin(55° 55' + 3\varphi) + 0{,}249 \sin(4° 13' + 4\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

oder die ganze Formel nach (1):

$$F' = 758{,}26 + f'$$

Hiernach sind die ausgeglichenen Werte f' und F' der vorstehenden Tabelle berechnet.

Durch Vergleichung der beobachteten und der ausgeglichenen Funktionswerte F oder f erhält man die Widersprüche v, deren Quadratsumme sich in der vorstehenden Tabelle (S. 93) durch unmittelbare Rechnung $[vv] = 2{,}19$ ergiebt. Zur durchgreifenden Kontrolierung der ganzen Ausgleichungsrechnung bestimmt man diese Summe auch noch nach (17):

$$\begin{array}{ll} r_1 = 3{,}452 & r_1^2 = 11{,}916 \\ r_2 = 0{,}602 & r_2^2 = 0{,}362 \\ r_3 = 0{,}666 & r_3^2 = 0{,}444 \\ r_4 = 0{,}249 & r_4^2 = 0{,}062 \end{array} \Bigg\} \quad \begin{array}{l} [rr] = 12{,}784 \\ 6\,[rr] = 76{,}704 \end{array}$$

$$[vv] = [ff] - \frac{n}{2}[rr] = 78{,}89 - 76{,}70 = 2{,}19$$

was mit der unmittelbaren Ausrechnung von $[vv] = 2{,}19$ vollständig stimmt. Endlich hat man noch den mittleren Fehler einer Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{2{,}19}{12-9}} = \pm\, 0{,}85^{mm} \tag{21}$$

Wenn man nur bis zu den Gliedern mit $3\,\varphi$ gehen will, so hat man lediglich in (20) das letzte Glied wegzulassen, und umgekehrt, wenn man mit der Übereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung nicht zufrieden ist, und deswegen ein weiteres Glied in die Formel aufnehmen will, so fügt man, mit Beibehaltung aller erstmals erhaltenen Resultate, weitere Glieder bei.

Wie viele Glieder man der Interpolationsformel (1) geben soll, ist natürlich nicht allgemein festzusetzen, man kann nur verlangen, dass der mittlere Fehler (18) nach der Ausgleichung, den Abweichungen, welche die Beobachtungen vor der Ausgleichung unter sich zeigten, möglichst entspreche.

Die hier behandelte Interpolationsrechnung ist zuerst von *Bessel* in den astr. Nachr. 6. Band 1828 S. 333—356 in anderer Darstellung mitgeteilt worden.

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen.

Es wurden n Grössen unmittelbar beobachtet, zwischen denen r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, wobei $n > r$; es sollen die wahrscheinlichsten Werte der n Grössen bestimmt werden.

Ein sehr einfacher Fall dieser Art ist z. B. die Messung von 3 Winkeln $x_1\ x_2\ x_3$ in einem Dreieck, wobei eine Bedingungsgleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0$ besteht (bzw. 180° + sphär. Excess), also $n = 3$, $r = 1$.

Wir haben diese Aufgabe bereits in § 10. S. 26—29 auf eine Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel zurückgeführt.

Man kann immer die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, was wir nun zeigen werden.

Wir nehmen an, es seien n unbekannte Grössen $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_n$ zu bestimmen und man habe hiefür die gleich genauen Messungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ gemacht. Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_n x_n = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_0 + \underbrace{r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \ldots + r_n x_n}_{\text{Anzahl} = n} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Setzt man an Stelle der Unbekannten x die Beobachtungswerte l, so sind die Gleichungen (1) nicht mehr befriedigt, sondern sie geben:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots + a_n l_n = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + \ldots + b_n l_n = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + \ldots + c_n l_n = w_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \ldots + r_n l_n = w_n \end{array} \right\} \quad (2)$$

Es sind an den l solche Korrektionen v anzubringen, dass die Widersprüche w wieder verschwinden, z. B. für die erste Gleichung von (2):

$$a_0 + a_1 (l_1 + v_1) + a_2 (l_2 + v_2) + \ldots + a_n (l_n + v_n) = 0$$

Dieses mit der ersten Gleichung von (1) verglichen, giebt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0$$

also das ganze System dieser Art:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n + w_3 = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \underbrace{n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 + \ldots + n_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + w_n = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Hiezu hat man noch die Ausgleichungsbedingung

$$[v v] = \text{Minimum.} \quad (4)$$

Für die Anzahl n der Unbekannten und die Anzahl r der Bedingungsgleichungen ist es wesentlich, dass

$$n > r \quad (6)$$

denn es soll nicht möglich sein, die v schon aus den Gleichungen (3) ohne Benützung von (4) zu bestimmen.

Ausserdem sollen die Bedingungsgleichungen (1) und damit auch (2) und (3) je untereinander unabhängig sein.

Man kann nun die Ausgleichung auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, und zwar dadurch, dass man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (3) eine beliebige Auswahl von r Unbekannten in den $n-r$ übrigen ausdrückt. Man möge erhalten:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} v_1 = A_1 v_{r+1} + B_1 v_{r+2} + \ldots + H_1 v_n \\ v_2 = A_2 v_{r+1} + B_2 v_{r+2} + \ldots + H_2 v_n \\ \vdots \\ v_r = \underbrace{A_r v_{r+1} + B_r v_{r+2} + \ldots + H_r v_n}_{\text{Anzahl} = n - r} \end{array} \right\} \quad (16)$$

Hiezu schreibt man auch noch die als unabhängig ausgewählten $v_{r+1}\ v_{r+2}\ \ldots\ v_n$ selbst:

$$\text{Anzahl} = n - r \left\{ \begin{array}{l} v_{r+1} = v_{r+1} \quad \ldots \quad \ldots \\ v_{r+2} = \ldots \quad v_{r+2} \quad \ldots \\ \vdots \\ v_n \quad = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ v_n}_{\text{Anzahl} = n - r} \end{array} \right\} \tag{7}$$

Nun stellen (6) und (7) zusammen ein System von $r + (n - r)$ d. h. von n Fehlergleichungen mit $n - r$ unabhängigen Unbekannten vor, welche zusammen nach § 25. u. ff. zu behandeln sind. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler m bestimmt sich hiefür nach (19) § 27. S. 68:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(r + (n - r)) - (n - r)}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \tag{8}$$

Ob diese in allgemeinen Gleichungen angedeutete Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an. Wenn die Bedingungsgleichungen einfacher Natur sind, und wenn ihre Anzahl nicht gross ist, so wird dieses Verfahren zu empfehlen sein.

Es war uns zunächst nur darum zu thun, die Verhältnisse im ganzen zu überblicken und zugleich die Fehlerformel (8) zu finden, welche immer gilt, mag man die Ausgleichung durch Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen oder nach der nachher zu behandelnden Korrelaten-Methode ausführen.

Über das *Vorzeichen der Absolutglieder* w, welche nach (1) und (2) die Widersprüche zwischen Beobachtung und Theorie vorstellen, ist noch im allgemeinen zu bemerken, dass dasselbe sich unter allen Umständen nach der Formel bestimmt:

$$\text{Widerspruch } w = \text{Beobachtung} - \text{Theorie}$$

oder

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \tag{9}$$

§ 38. Minimum mit Nebenbedingungen.

Zum Zweck der raschen Erledigung der folgenden Ausgleichungsaufgaben erinnern wir an eine Aufgabe der Analysis, welche lautet: Eine Funktion von n Veränderlichen $x\ y\ z\ \ldots$

$$\Omega = F(x, y, z) \tag{1}$$

soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, wenn die Veränderlichen $x\ y\ z$ nicht unabhängig, sondern durch folgende streng zu erfüllende »*Bedingungsgleichungen*« verbunden sind:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen sei r, und zwar soll $n > r$ sein.

Aus der Minimumsbedingung folgt, dass das totale Differential von Ω gleich Null werden muss, d. h.

$$d\,\Omega = \frac{\partial F}{\partial x} d\,x + \frac{\partial F}{\partial y} d\,y + \frac{\partial F}{\partial z} d\,z = 0 \tag{3}$$

Wären keine Bedingungsgleichungen da, so müssten die Coëfficienten von $dx\ dy\ dz$ einzeln gleich Null gesetzt werden, um den Wert $d\Omega$ allgemein auf Null

zu bringen. Ausser der Gleichung (3) bestehen noch folgende n durch Differentiierung der Bedingungsgleichungen (2) gewonnene Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \\ \frac{\partial \psi}{d x} dx + \frac{\partial \psi}{d y} dy + \frac{\partial \psi}{d z} dz = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Mittelst der Gleichungen (4) kann man nun r einzelne von den Differentialen $dx\ dy\ dz$ in den $n-r$ übrigen ausdrücken und in (3) substituieren, worauf die Coëfficienten der übrigen $n-r$ Differentiale, welche nun unabhängig sind, einzeln gleich Null gesetzt werden müssen. Statt dessen kann man auch die Elimination von r Differentialen, worauf es im wesentlichen ankommt, nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten ausführen, d. h. man multipliziert die Gleichungen (4) mit den vorerst unbestimmten Coëfficienten $k_1\ k_2\ .\ .\ .\ k_n$ (Korrelaten) und addiert sie dann zu (3), wodurch entsteht:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen (5) ist gleich der Anzahl der Veränderlichen $x\ y\ z$ in (1), d. h. $= n$; zieht man noch die r Bedingungsgleichungen (2) selbst zu, so hat man die nötigen $n+r$ unabhängigen Gleichungen zur Bestimmung der r Korrelaten und der n Unbekannten $x\ y\ z$. Die Aufgabe ist hiemit im Prinzip gelöst.

Man kann das Resultat der vorstehenden Untersuchung in folgendem Satz aussprechen:

Wenn eine Funktion $\Omega = F\ (x\ y\ z)$ zu einem Minimum gemacht werden soll mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen:

$$\varphi\,(x, y, z) = 0 \qquad \psi\,(x, y, z) = 0$$

so multipliziert man die letzteren mit Korrelaten k_1, k_2 und addiert sie zu der Minimumsgleichung, d. h. man bildet:

$$\Omega' = F\,(x, y, z) + k_1\,\varphi\,(x, y, z) + k_2\,\psi\,(x, y, z)$$

dann wird das Minimum dieser neuen Funktion in Bezug auf $x\ y\ z$ bestimmt, wie wenn die früheren Bedingungsgleichungen nicht da wären.

§ 39. Bedingte Beobachtungen mit Korrelaten.

Wir nehmen die am Anfang von § 37. S. 95 aufgestellten Gleichungen wieder vor, schreiben aber der Übersicht wegen hier überall nur 4 Symbole, wo im allgemeinen Falle deren n stehen, und 3 statt r.

Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Setzt man an Stelle der wahrscheinlichsten Werte x die Beobachtungswerte $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$, so sind die Gleichungen (1) nicht befriedigt, sondern man erhält:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 &= w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 &= w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 &= w_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Es sind daher an den l solche Korrektionen v anzubringen, dass die Widersprüche w verschwinden, d. h. man setzt:

$$x_1 = l_1 + v_1 \qquad x_2 = l_2 + v_2 \qquad x_3 = l_3 + v_3 \qquad x_4 = l_4 + v_4 \tag{3}$$

und damit giebt die erste Gleichung (1):

$$a_0 + a_1 (l_1 + v_1) + a_2 (l_2 + v_2) + a_3 (l_3 + v_3) + a_4 (l_4 + v_4) = 0$$

Die Vergleichung mit der ersten Gleichung von (2) giebt die folgende erste Gleichung, welcher wir sogleich die beiden andern zufügen:

$$\begin{matrix}\text{Allgemein} \\ \text{Anzahl} = r\end{matrix} \left\{\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 &= 0 \\ \underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4}_{\text{Allgemein Anzahl} = n} + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\}\right. \tag{4}$$

Mit Anwendung der Summenklammern kann man (2) und (4) auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + [a l] &= w_1 \qquad & [a v] &= -w_1 \\ b_0 + [b l] &= w_2 \qquad & [b v] &= -w_2 \\ c_0 + [c l] &= w_3 \qquad & [c v] &= -w_3 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wir bezeichnen die r Gleichungen (4) ebenfalls wieder als Bedingungsgleichungen, denn sie geben die Bedingungen an, welche die v genau erfüllen müssen.

Ausser den Gleichungen (4) hat man zur Bestimmung der v die Fundamentalgleichung:

$$[v v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{Minimum} \tag{6}$$

Um dieses Minimum mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen (4) zu erhalten, lehrt uns die Analysis, nach § 38., so zu verfahren:

Wir multiplizieren die Bedingungsgleichungen (4) mit unbestimmten Coëfficienten $-2 k_1 \quad -2 k_2 \quad -2 k_3$ (die in negativer und 2facher Form gewählt sind, weil sich -2 nachher wieder von selbst tilgt), also:

$$\left.\begin{aligned} -2 a_1 k_1 v_1 - 2 a_2 k_1 v_2 - 2 a_3 k_1 v_3 - 2 a_4 k_1 v_4 - 2 w_1 k_1 &= 0 \\ -2 b_1 k_2 v_1 - 2 b_2 k_2 v_2 - 2 b_3 k_2 v_3 - 2 b_4 k_2 v_4 - 2 w_2 k_2 &= 0 \\ -2 c_1 k_3 v_1 - 2 c_2 k_3 v_2 - 2 c_3 k_3 v_3 - 2 c_4 k_3 v_4 - 2 w_3 k_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Diese Gleichungen werden zur Minimumsbedingung (6) addiert, und dann wird überall nach v geordnet:

$$\left.\begin{aligned} \Omega' = v_1^2 &- 2 v_1 (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3) \\ + v_2^2 &- 2 v_2 (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3) \\ + v_3^2 &- 2 v_3 (a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3) \\ + v_4^2 &- 2 v_4 (a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3) \\ &- 2 \quad (w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Das Minimum von Ω' und die hiezu nötige Differentiierung nach $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ giebt:

$$0 = 2 v_1 - 2 (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3) \text{ u. s. w.}$$

d. h. im ganzen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ v_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \\ v_4 &= a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Setzt man diese Ausdrücke wieder in die Bedingungsgleichungen (4) und ordnet nach $k_1\ k_2\ k_3$, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + w_1 &= 0\\ [ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + w_2 &= 0\\ [ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [cc]\,k_3 + w_3 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Diese Gleichungen heissen Normalgleichungen, ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen.

Gang der Rechnung. Nachdem die Coëfficienten $a\ b\ c$ und die Absolutglieder w der Bedingungsgleichungen (4) bestimmt sind, berechnet man die Coëfficienten $[aa]$, $[ab]$ u. s. w. der Normalgleichungen (10), löst diese nach $k_1\ k_2\ k_3$ auf, und berechnet dann die Korrektionen v nach (9).

Die Zufügung der v zu den Beobachtungen l giebt dann endlich die wahrscheinlichsten Werte x der Unbekannten.

Nachdem alle einzelnen v ausgerechnet sind, findet man auch deren Quadratsumme und den ***mittleren Fehler einer Beobachtung*** (nach (8) § 38. S. 96):

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} \qquad (11)$$

wo r die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist. (In den obigen Formeln ist überall $r = 3$).

§ 40. Ungleiche Gewichte.

Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ haben, so tritt an Stelle von $[vv]$ = Minimum die neue Bedingung:

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + p_4 v_4^2 = \text{Minimum} \qquad (1)$$

und wenn man damit die Rechnung weiter führt, so sieht man bald, dass überall an Stelle von $a\ b\ c$ die Werte $\frac{a}{p}\ \frac{b}{p}\ \frac{c}{p}$ treten, und die wichtigsten Systeme (10) und (9) des vorigen § 39. gehen dann über in:

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] k_3 + w_1 &= 0\\ \left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_3 + w_2 &= 0\\ \left[\frac{ac}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] k_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] k_3 + w_3 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3\\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3\\ v_3 &= \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3\\ v_4 &= \frac{a_4}{p_4} k_1 + \frac{b_4}{p_4} k_2 + \frac{c_4}{p_4} k_3\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Wenn man die Gewichte p nicht überall mitführen will, so kann man alle Coëfficienten $a\ b\ c$ von Anfang an bzw. durch $\sqrt{p}$ dividieren, und dann weiter rechnen, wie wenn alle Gewichte $= 1$ wären.

Die erste Bedingungsgleichung heisst dann so:

$$\frac{a_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \frac{a_3}{\sqrt{p_3}} v_3 \sqrt{p_3} + \frac{a_4}{\sqrt{p_4}} v_4 \sqrt{p_4} + w_1 = 0$$

oder

$$a_1' v_1' + a_2' v_2' + a_3' v_3' + a_4' v_4' + w_1 = 0$$

Die erste Normalgleichung:

$$[a' a'] k_1 + [a' b'] k_2 + [a' c'] k_3 + w_1 = 0$$

Die erste Korrektionsgleichung:

$$v_1' = v_1 \sqrt{p_1} = a_1' k_1 + b_1' k_2 + c_1' k_3$$

hieraus

$$v_1 = \frac{v_1'}{\sqrt{p_1}}$$

$[p\,v\,v]$ giebt sich unmittelbar durch Quadrierung der v', nämlich:

$$[p\,v\,v] = [(\sqrt{p}\,v)^2] = [v'\,v'] \tag{4}$$

Ungleiche Gewichte durch mittlere Fehler a priori.

Wenn die mittleren Fehler m_1 m_2 m_3 m_4 a priori geschätzt sind, was oft vorkommt, so kann man die Gewichte geradezu annehmen:

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2} \qquad p_2 = \frac{1}{m_2^2} \qquad p_3 = \frac{1}{m_3^2} \text{ u. s. w.} \tag{5}$$

und damit nehmen die vorstehenden Formeln folgende Formen an:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{6}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + w_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mittlere Fehler: $m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad \ldots$ (8)

Man bildet aus (7) und (8) die neuen Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= a_1' & m_2 a_2 &= a_2' & m_3 a_3 &= a_3' \\ m_1 b_1 &= b_1' & m_2 b_2 &= b_2' & m_3 b_3 &= b_3' \\ m_1 c_1 &= c_1' & m_2 c_2 &= c_2' & m_3 c_3 &= c_3' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dann werden die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} &[m^2 aa] k_1 + [m^2 ab] k_2 + [m^2 ac] k_3 + w_1 = 0 && [a'a'] k_1 + [a'b'] k_2 + [a'c'] k_3 + w_1 = 0 \\ &[m^2 ab] k_1 + [m^2 bb] k_2 + [m^2 bc] k_3 + w_2 = 0 \quad \text{oder:} && [a'b'] k_1 + [b'b'] k_2 + [b'c'] k_3 + w_2 = 0 \\ &[m^2 ac] k_1 + [m^2 bc] k_2 + [m^2 cc] k_3 + w_3 = 0 && [a'c'] k_1 + [b'c'] k_2 + [c'c'] k_3 + w_3 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1}{m_1} = a_1' k_1 + b_1' k_2 + c_1' k_3 \\ v_2' &= \frac{v_2}{m_2} = a_2' k_1 + b_2' k_2 + c_2' k_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1 &= v_1' m_1 \qquad v_2 = v_2' m_2 \qquad v_3 = v_3' m_3 \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler nach der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{r}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \tag{12}$$

Wenn die mittleren Fehler $m_1\ m_2\ m_3$ [s. o. bei (8)] *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so muss *nach* der Ausgleichung vermöge (12), $m = 1$ werden.

Die Werte $v_1'\ v_2'\ v_3' \ldots$ sind reine Verhältniszahlen, deren mehr oder minder bedeutende Abweichung von 1 einen bequemen Einblick in die Fehlerverteilung und in die Brauchbarkeit der a priori geschätzten $m_1\ m_2\ m_3 \ldots$ giebt.

Wenn die Ausgleichung nicht das erwartete $m = 1$ giebt, sondern wenn aus der Formel (12) etwa $m = M$ hervorgeht, so ist es angezeigt, alle a priori geschätzten mittleren Fehler im Verhältnis $M : m$ zu ändern.

§ 41. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$.

Die Berechnung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers geschieht nach (8) § 37. S. 96, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{1}$$

Wir werden für die Folge in der Regel nur von der Summe $[v\,v]$ reden, weil im Falle ungleicher Gewichte die Summe $[p\,v\,v]$ nach § 40. leicht an die Stelle von $[v\,v]$ gesetzt werden kann.

Nach Vollendung der Ausgleichung kann man die einzelnen v quadrieren und addieren, und hat damit unmittelbar $[v\,v]$.

Statt $[v\,v]$ aus den einzelnen v zu bilden, kann man, wie auch früher bei vermittelnden Beobachtungen, noch andere Wege einschlagen.

Hiezu nehmen wir vor Allem die Ausdrücke für die einzelnen v nach (9) § 39. S. 98 nochmals vor:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ v_2 &= a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ v_3 &= a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\ v_4 &= a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,k_1\,k_1 &+ 2\,[a\,b]\,k_1\,k_2 + 2\,[a\,c]\,k_1\,k_3 \\ &+ \quad [b\,b]\,k_2\,k_2 + 2\,[b\,c]\,k_2\,k_3 \\ &\qquad\qquad + \quad [c\,c]\,k_3\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und vergleicht man dieses mit den Normalgleichungen (10) § 39. S. 99, so hat man sofort:

$$[v\,v] = -k_1\,w_1 - k_2\,w_2 - k_3\,w_3 = -[w\,k] \tag{4}$$

Ausserdem kann man die allgemeine Umformung (20) am Schluss von § 27. S. 68 anwenden, welche für (3) ergiebt:

$$[v\,v] = \frac{([a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3)^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3)^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{([c\,c\,.\,2]\,k_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung der w nach (10) § 39. S. 99:

$$[v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Diese Berechnung kann man ebenso an die Elimination der Normalgleichungen anhängen, wie dieses mit $[v\,v] = [l\,l\,.\,u]$ bei den vermittelnden Beobachtungen geschehen ist, d. h. man fügt den Normalgleichungen das Schlussglied 0 zu, und erhält dann folgendes System der allmählich reduzierten Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rr}
\underline{[a\,a]\,k_1} + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 & \\
\underline{[b\,b]\,k_2} + [b\,c]\,k_3 + w_2 & \underline{[b\,b\,.\,1]\,k_2} + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] \\
\underline{[c\,c]\,k_3} + w_3 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_3} + [w_3\,.\,1] \\
\underline{0} & \underline{[0\,.\,1]} \\
 & \underline{[c\,c\,.\,2]\,k_3} + [w_3\,.\,2] \\
 & \underline{[0\,.\,2]} \\
 & \underline{[0\,.\,3]}
\end{array}$$

Das Schlussglied $[0\,.\,3]$ ist dann $= -[v\,v]$.

§ 42. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Elemente.

Wir betrachten eine Funktion F der ausgeglichenen Beobachtungen x, nämlich:

$$F = f_0 + f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 \tag{1}$$

Die Funktion F (welche z. B. bei einer Triangulierung eine Dreiecksseite vorstellt) kann nicht alle x enthalten, sondern höchstens so viele, als deren unabhängig sind, es muss also immer ein Teil der Coëfficienten f gleich Null sein.

Es wird nun darauf ankommen, F als eine Funktion der Beobachtungen l darzustellen, etwa in dieser Form:

$$F = F_0 + F_1\,l_1 + F_2\,l_2 + F_3\,l_3 + F_4\,l_4 \tag{2}$$

und zwar kommen hierin *alle* l vor.

Indem wir die Gewichte der l als gleich, $= 1$, annehmen, erhalten wir aus (2) das Gewicht von F nach (3) § 8. S. 20 durch die Gleichung:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{1} + \frac{F_2^2}{1} + \frac{F_3^2}{1} + \frac{F_4^2}{1} = \left[F\,F\right] \tag{3}$$

Um eine Beziehung zwischen (1) und (2) zu gewinnen, und zwar vor Allem eine Beziehung zwischen x und l, haben wir nach (3) und (9) § 39. S. 98:

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 = l_1 + v_1 & v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\
x_2 = l_2 + v_2 & v_1 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\
x_3 = l_3 + v_3 & v_3 = a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\
x_4 = l_4 + v_4 & v_4 = a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Damit wird (1) zunächst:

$$\left.\begin{array}{l}
F = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \\
\qquad + f_1\,v_1 + f_2\,v_2 + f_3\,v_3 + f_4\,v_4
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn man auch den zweiten Teil (rechts) von (4) berücksichtigt, und alles Gleichartige in Summenklammern fasst, so wird (5):

$$\left.\begin{array}{l}
F = \quad f_0 + [f\,l] \\
\qquad + [a\,f]\,k_1 + [b\,f]\,k_2 + [c\,f]\,k_3
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Die Korrelaten k müssen eliminiert werden, und dazu dienen die früheren Normalgleichungen (10) § 39. S. 99, welche wir mit Rücksicht auf (5) § 39. S. 98 so schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll}
r_1) & [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + [a\,l] + a_0 = 0 \\
r_2) & [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [b\,l] + b_0 = 0 \\
r_3) & [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [c\,l] + c_0 = 0
\end{array}\right\} \tag{7}$$

Um nun $k_1\;k_2\;k_3$ aus (6) und (7) zu eliminieren, multiplizieren wir die (7) mit vorerst unbestimmt gelassenen neuen Coëfficienten $r_1\;r_2\;r_3$, und addieren hiezu (6).

Denken wir das ausgeführt, so verfügen wir über die zunächst unbestimmt gelassenen $r_1\ r_2\ r_3$ so, dass die Glieder mit $k_1\ k_2\ k_3$ verschwinden, d. h. wir haben die

Übertragungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,r_1+[ab]\,r_2+[ac]\,r_3+[af]&=0\\ [ab]\,r_1+[bb]\,r_2+[bc]\,r_3+[bf]&=0\\ [ac]\,r_1+[bc]\,r_2+[cc]\,r_3+[cf]&=0\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Die Weiterführung der angegebenen Operation mit (6) und (7) giebt, nachdem (8) festgestellt ist, vollends:

$$\left.\begin{aligned}F=\ & f_0+[fl]\\ &+(a_0+[al])\,r_1+(b_0+[bl])\,r_2+(c_0+[cl])\,r_3\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

oder durch Ordnen nach l, wie es (2) verlangt:

$$\left.\begin{aligned}F=\ & f_0+a_0\,r_1+b_0\,r_2+c_0\,r_3\\ &+(f_1+a_1\,r_1+b_1\,r_2+c_1\,r_3)\,l_1\\ &+(f_2+a_2\,r_1+b_2\,r_2+c_2\,r_3)\,l_2\\ &+(f_3+a_3\,r_1+b_3\,r_2+c_3\,r_3)\,l_3\\ &+(f_4+a_4\,r_1+b_4\,r_2+c_4\,r_3)\,l_4\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Damit ist erreicht, was in (2) erstrebt wurde, nämlich die Entwicklung von F als lineare Funktion der l, wobei die Coëfficienten sind:

$$\left.\begin{aligned}F_1&=f_1+a_1\,r_1+b_1\,r_2+c_1\,r_3\\ F_2&=f_2+a_2\,r_1+b_2\,r_2+c_2\,r_3\\ F_3&=f_3+a_3\,r_1+b_3\,r_2+c_3\,r_3\\ F_4&=f_4+a_4\,r_1+b_4\,r_2+c_4\,r_3\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Wir haben nun also folgendes Verfahren:

Nachdem die Coëfficienten $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ der Funktion (1), deren Gewicht bestimmt werden soll, festgestellt sind, bildet man die Summen $[af]\ [bf]\ [cf]$, welche als Absolutglieder an die Normalgleichungen angehängt, die Übertragungsgleichungen (8) geben. Diese löst man nach $r_1\ r_2\ r_3$ auf, setzt diese r in (11), und kann damit alle F ausrechnen, deren Quadrierung nach (3) die gesuchte Gewichts-Reciproke giebt.

In einzelnen Fällen mag dieses Verfahren am Platz sein, jedenfalls ist es insofern anschaulich, als es genau dem Wege der Ausgleichung selbst folgt, denn die Übertragungs-Coëfficienten r treten an Stelle der Korrelaten k, und die F spielen die Rolle der v.

Indessen sind wir gar nicht genötigt, die einzelnen F auszurechnen, um zu $[FF]$ zu gelangen, ebensowenig, als es in § 28. nötig war, die einzelnen $\alpha\ \beta\ \ldots$ aufzufinden, um $[\alpha\alpha]\ [\alpha\beta]\ \ldots$ zu bestimmen, oder in § 27. die einzelnen v zu haben, um $[vv]$ zu erhalten. Genau nach Analogie dieser letzteren Umformung (8) § 27. S. 67 können wir aus (11) und (8) folgendes ableiten:

$$\frac{1}{P}=(FF)=[ff]-\left\{\frac{[af]^2}{[aa]}+\frac{[bf.1]^2}{[bb.1]}+\frac{[cf.2]^2}{[cc.2]}\right\}\qquad(12)$$

Die Ausrechnung hievon wird einfach an die Korrelaten-Elimination angehängt, ebenso wie früher bei (11) § 29. S. 74.

Die Gleichung (12) zeigt deutlich, wie durch den Zutritt der überschüssigen Beobachtungen das Gewicht P gewachsen ist. Es ist nämlich $[ff]$ der reciproke Wert des Gewichtes einer Funktion *nicht* ausgeglichener Beobachtungen, welche zur Berechnung

der Funktion gerade hinreichend wären, alle Glieder der Klammer $\{\ldots\}$ sind positiv, es wird also $\frac{1}{P}$ durch den Zutritt dieser Klammer verkleinert, oder P vergrössert.

Wenn die Beobachtungsgewichte *nicht* alle $= 1$ sind, wie bisher angenommen ist, so treten die schon am Schluss von § 40. erwähnten Änderungen ein, und die Schlussformel wird dann statt (12):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{FF}{p}\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \left\{ \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bf}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{\left[\frac{cf}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]} \right\} \tag{13}$$

Alles, was die Formel (12) bzw. (13) verlangt, kann man auch in eine mechanische Regel fassen, welche so lautet:

Man fügt zu dem System der Bedingungsgleichungen eine fingierte Gleichung mit den Coëfficienten f hinzu, also:

$$\left.\begin{array}{ll} k_1) & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + \ldots + w_1 = 0 \\ k_2) & b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + \ldots + w_2 = 0 \\ k_3) & c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + \ldots + w_3 = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Zusatz} & f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_4 v_4 + \ldots\ldots \quad = 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Nun rechnet man gerade so weiter, wie wenn man statt der Absolutglieder w eine neue Korrelate mit den Coëfficienten $[af]$ $[bf]$ ... $[ff]$ hätte:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{[aa]\,k_1} + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + \ldots [af]\,k' = 0 \\ \underline{[bb]\,k_2} + [bc]\,k_3 + \ldots [bf]\,k' = 0 \\ \underline{[cc]\,k_3} + \ldots [cf]\,k' = 0 \\ \ldots\ldots \\ \underline{[ff]\,k'} = 0 \end{array}\right\} \tag{15}$$

Eliminiert man nun allmählich k_1 k_2 k_3, so bleibt eine Gleichung mit k' übrig, deren Coëfficient $= \frac{1}{P}$ nach (12) ist.

§ 43. Zusammenstellung der Formeln für Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Gemessene Grössen} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \;\ldots & l_n \\ \text{Gewichte} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \;\ldots & p_n \\ \text{Verbesserungen} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \;\ldots & v_n \\ \text{Resultate} & x_1 = l_1 + v_1 & x_2 = l_2 + v_2 & x_3 = l_3 + v_3 & x_4 = l_4 + v_4 \;\ldots & x_n = l_n + v_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Unbekannten x:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \ldots a_n x_n = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \ldots b_n x_n = 0 \\ c_0 + \underbrace{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + \ldots c_n x_n}_{\text{Anzahl} = n} = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

Von hier an schreiben wir immer $n = 4$, $r = 3$ und haben damit:
Widersprüche:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 = w_3 \end{array}\right\} \tag{3}$$

Das Vorzeichen der Widersprüche w bestimmt sich durch die Formel:

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \tag{3*}$$

Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Verbesserungen v:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + w_1 = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + w_2 = 0 \\ \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Diese Normalgleichungen werden nach k_1 k_2 k_3 aufgelöst, dann werden die v berechnet mittelst der Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ p_2 v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ p_3 v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Beim Anschreiben dieser Gleichungen folgt man den Bedingungsgleichungen (4) nach Vertikalreihen.

Indem man die v zu den Beobachtungen l hinzufügt, erhält man die x, nämlich:

$$x_1 = l_1 + v_1 \qquad x_2 = l_2 + v_2 \qquad x_3 = l_3 + v_3 \qquad x_4 = l_4 + v_4 \tag{7}$$

Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{8}$$

Die hiezu nötige Summe $[p\,v\,v]$ kann man unmittelbar aus den einzelnen v berechnen; ausserdem hat man die Kontrolformeln:

$$[p\,v\,v] = -[w\,k] \tag{8*}$$

oder

$$[p\,v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{8**}$$

Man betrachtet nun eine Funktion der ausgeglichenen x:

$$F = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 \tag{9}$$

welche jedoch nicht alle x enthalten kann.

Es soll das Gewicht P dieser Funktion bestimmt werden.

Zu diesem Zweck berechnet man die Summen

$$\left[\frac{a f}{p}\right] \qquad \left[\frac{b f}{p}\right] \qquad \left[\frac{c f}{p}\right] \tag{10}$$

und

$$\left[\frac{f f}{p}\right] \tag{11}$$

Zur Weiterrechnung hat man nun zwei Wege, einen praktisch umständlicheren mit den Übertragungs-Coëfficienten und einen kürzeren durch Eliminationserweiterung.

Die Methode der Übertragungs-Coëfficienten, welche theoretisch übersichtlicher ist, bedarf des Quadratgliedes (11) nicht, sondern bildet aus den ursprünglichen Coëfficienten der Normalgleichungen (5) und den neu berechneten Coëfficienten (10) die Übertragungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{aa}{p}\right]r_1+\left[\frac{ab}{p}\right]r_2+\left[\frac{ac}{p}\right]r_3+\left[\frac{af}{p}\right]&=0\\ \left[\frac{ab}{p}\right]r_1+\left[\frac{bb}{p}\right]r_2+\left[\frac{bc}{p}\right]r_3+\left[\frac{bf}{p}\right]&=0\\ \left[\frac{ac}{p}\right]r_1+\left[\frac{bc}{p}\right]r_2+\left[\frac{cc}{p}\right]r_3+\left[\frac{cf}{p}\right]&=0\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Diese Gleichungen werden nach $r_1\ r_2\ r_3$ aufgelöst, und dann folgt nach Analogie der v in (6):

$$\left.\begin{aligned}F_1&=f_1+a_1r_1+b_1r_2+c_1r_3\\ F_2&=f_2+a_2r_1+b_2r_2+c_2r_3\\ F_3&=f_3+a_3r_1+b_3r_2+c_3r_3\\ F_4&=f_4+a_4r_1+b_4r_2+c_4r_3\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Aus diesen einzelnen F bildet man:

$$\frac{F_1^2}{p_1}+\frac{F_2^2}{p_2}+\frac{F_3^2}{p_3}+\frac{F_4^2}{p_4}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\frac{1}{P} \quad (14)$$

damit hat man die Reciproke des gesuchten Gewichtes P, und den mittleren Fehler M der betrachteten Funktion F:

$$M=m\sqrt{\frac{1}{P}} \quad (15)$$

Bei dem zweiten oben erwähnten Berechnungsgang hängt man die Glieder (10) und (11) an die Elimination der Normalgleichungen an, und bildet der Reihe nach folgende Systeme:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}\left[\frac{aa}{p}\right] & \left[\frac{ab}{p}\right] & \left[\frac{ac}{p}\right] & \left[\frac{af}{p}\right] & & & & & & \\ & \left[\frac{bb}{p}\right] & \left[\frac{bc}{p}\right] & \left[\frac{bf}{p}\right] & \left[\frac{bb}{p}.1\right] & \left[\frac{bc}{p}.1\right] & \left[\frac{bf}{p}.1\right] & & & \\ & & \left[\frac{cc}{p}\right] & \left[\frac{cf}{p}\right] & & \left[\frac{cc}{p}.1\right] & \left[\frac{cf}{p}.1\right] & \left[\frac{cc}{p}.2\right] & \left[\frac{cf}{p}.2\right] & \\ & & & \left[\frac{ff}{p}\right] & & & \left[\frac{ff}{p}.1\right] & & \left[\frac{ff}{p}.2\right] & \\ & & & & & & & \left[\frac{ff}{p}.3\right]=\left[\frac{FF}{p}\right]=\frac{1}{P} & & \end{array}\right\} \quad (16)$$

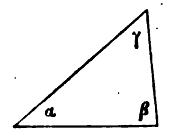
Alle Glieder, in welchen f nicht vorkommt, sind hiebei dieselben, wie die schon bei der Elimination der k aus (5) gebrauchten. Wenn man nach diesem Schema verfährt, so thut man nichts anderes, als was die Formel (13) § 42. S. 104 vorschreibt.

Wenn die Gewichte p in der Form von mittleren Fehlern a priori gegeben sind, so kommen die Formen (5) bis (12) § 40. S. 100 in Anwendung.

§ 44. Ausgleichung der 3 Winkel eines ebenen Dreiecks (Fig. 9.).

Als einfaches Beispiel zur Erläuterung der im vorigen § 43. zusammengestellten Formeln nehmen wir die Ausgleichung der Winkel eines ebenen Dreiecks (welche in § 10. bereits nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels behandelt worden ist).

Fig. 9.
$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=w.$



Die Nummern der Gleichungen entsprechen denen des vorigen § 43.

Gemessene Winkel	l_1	l_2	l_3	(1)
Gewichte . . .	1	1	1	
Verbesserungen . .	v_1	v_2	v_3	
Resultate . . .	$x_1=l_1+v_1$	$x_2=l_2+v_2$	$x_3=l_3+v_3$	

Bedingungsgleichung, bezogen auf die x:

$$-180^\circ + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

Widerspruch:

$$-180^\circ + l_1 + l_2 + l_3 = w \tag{3}$$

Bedingungsgleichung, bezogen auf die v:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \tag{4}$$

Coëfficienten der Bedingungsgleichungen:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \qquad w_1 = w$$

Coëfficienten der Normalgleichungen:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = 3 \qquad \left[\frac{a\,b}{p}\right] = 0 \qquad \left[\frac{a\,c}{p}\right] = 0 \ldots$$

Normalgleichung:

$$3\,k + w = 0 \tag{5}$$

Auflösung der Normalgleichung:

$$k = -\frac{w}{3}$$

Verbesserungen:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \qquad v_2 = -\frac{w}{3} \qquad v_3 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

Ausgeglichene Dreieckswinkel:

$$x_1 = l_1 - \frac{w}{3} \qquad x_2 = l_2 - \frac{w}{3} \qquad x_3 = l_3 - \frac{w}{3} \tag{7}$$

Mittlerer Fehler einer Messung vom Gewicht 1, d. h. eines gemessenen Winkels vor der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{1}} = \frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Es soll das Gewicht P der Funktion

$$F = x_1$$

d. h. das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels bestimmt werden; es sind also die Funktions-Coëfficienten: (9)

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 0$$

$$\left[\frac{a\,f}{p}\right] = 3 \qquad \left[\frac{b\,f}{p}\right] = 0 \qquad \left[\frac{c\,f}{p}\right] = 0 \tag{10}$$

Übertragungsgleichung:

$$3\,r + 1 = 0$$

Auflösung der Übertragungsgleichung: (12)

$$r = -\frac{1}{3}$$

Berechnung der F:

$$F_1 = +\frac{2}{3} \qquad F_2 = -\frac{1}{3} \qquad F_3 = -\frac{1}{3} \tag{13}$$

$$\left[\frac{F\,F}{p}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \tag{14}$$

$$M = \frac{w}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{w}{3}\sqrt{2}. \tag{15}$$

Nun hätte man aber die Funktion F auch auf *anderem* Wege berechnen können, nämlich:

womit:
$$\left.\begin{array}{ccc} & F = 180^\circ - x_2 - x_3 & \\ f_1 = 0 & f_2 = -1 & f_3 = -1 \end{array}\right\} \quad (9^*)$$

$$3r - 2 = 0 \qquad r = +\frac{2}{3} \quad (12^*)$$

$$F_1 = +\frac{2}{3} \qquad F_2 = -\frac{1}{3} \qquad F_3 = -\frac{1}{3} \quad (13^*)$$

wie im ersten Fall bei (13).

Nach der zweiten Methode der Gewichtsberechnung haben wir mit Anwendung auf (9) zuerst das Glied zu berechnen:

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = 1^2 + 0^2 + 0^2 \quad (11)$$

Die Formel (16) S. 106 reduziert sich in unserem Falle, da nur *eine* Bedingungsgleichung da ist, auf:

$$\left[\frac{ff}{p}.1\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{af}{p}\right] \quad (16)$$

sie giebt mit den Coëfficienten von (5) und von (10):

$$\left[\frac{ff}{p}.1\right] = 1 - \frac{1}{3}1 = \frac{2}{3}$$

Dieses stimmt überein mit (13), worauf auch M ebenso wie bei (14) sich ergiebt.

§ 45. Partielle Ausgleichung. *)

Es ist unter Umständen nützlich, die Bedingungsgleichungen einer Ausgleichung nicht alle gemeinsam zu erfüllen, sondern etwa einen Teil derselben zuerst für sich zu behandeln, und die Erfüllung der übrigen Gleichungen durch eine zweite Ausgleichung zu bewirken.

Wir nehmen einen Fall mit 3 Gleichungen und 4 Beobachtungen. Die Verbesserungen, deren Quadratsumme $[\delta\,\delta] =$ Minimum werden soll, seien $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4$.

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 + a_4\delta_4 + w_1 = 0 \\ b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + b_4\delta_4 + w_2 = 0 \\ c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 + c_4\delta_4 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [b\,b.1]\,k_2 + [b\,c.1]\,k_3 + [w_2.1] = 0 \\ [b\,c.1]\,k_2 + [c\,c.1]\,k_3 + [w_3.1] = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ \delta_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ \delta_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \\ \delta_4 = a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 \end{array}\right\} \quad (4)$$

*) Beim ersten Studium können § 45.—47. übergangen werden.

Dieses ist der normale Rechnungsgang der vollständigen Ausgleichung, ohne Trennung der Bedingungsgleichungen.

Wir wollen aber nun annehmen, man sei aus irgend einem Grunde veranlasst, die erste Bedingungsgleichung zuerst für sich zu behandeln.

Mit einer Korrelate k_1' giebt die erste Bedingungsgleichung die eine Normalgleichung:

$$[a\,a]\,k_1' + w_1 = 0 \qquad k_1' = -\frac{1}{[a\,a]}\,w_1 \tag{5}$$

und die entsprechenden Korrektionen, welche wir, zum Unterschied von den vollständigen Korrektionen δ, mit u bezeichnen wollen, sind:

$$u_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 \qquad u_2 = -\frac{a_2}{[a\,a]}\,w_1 \qquad u_3 = -\frac{a_3}{[a\,a]}\,w_1 \qquad u_4 = -\frac{a_4}{[a\,a]}\,w_1 \tag{6}$$

Wir führen sogleich auch die zweiten Korrektionen v ein, so dass ist:

$$\delta_1 = u_1 + v_1 \qquad \delta_2 = u_2 + v_2 \qquad \delta_3 = u_3 + v_3 \qquad \delta_4 = u_4 + v_4 \tag{7}$$

Setzt man diese Ausdrücke (6) und (7) in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (1), so entstehen neue Bedingungsgleichungen, welche sich nur noch auf die v beziehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + 0 \quad &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Ausrechnung mit den u nach (6) giebt hiebei:

$$\left.\begin{aligned} [w_2\,.\,1] &= w_2 - b_1 \frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 - b_2 \frac{a_2}{[a\,a]}\,w_2 - \ldots = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,w_1 \\ [w_3\,.\,1] &= w_3 - c_1 \frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 - c_2 \frac{a_2}{[a\,a]}\,w_2 - \ldots = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,w_2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

d. h. diese Glieder sind dieselben, wie in (3).

Das System (8) für sich allein behandelt würde folgende Ausgleichung geben:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1'' + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + 0 \quad &= 0 \\ [a\,b]\,k_1'' + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [a\,c]\,k_1'' + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10*}$$

k_2 und k_3 sind dieselben Korrelaten wie in (3), dagegen ist k_1'' gegen früher geändert. Die Weiterrechnung giebt nach (8) für v_1:

$$v_1 = a_1\,k_1'' + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{11}$$

Hiezu nehmen wir nach (6) und (4):

$$u_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 \tag{12}$$

$$\delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{13}$$

(11) und (12) zusammen geben:

$$u_1 + v_1 = a_1\left(k_1'' - \frac{1}{[a\,a]}\,w_1\right) + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{14}$$

Die Vergleichung von (2) und (10) giebt aber:

$$[a\,a]\,k_1 + w_1 = [a\,a]\,k_1''$$

und damit geht (14) in (13) über:

$$u_1 + v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 = \delta_1 \tag{15}$$

Dasselbe gilt auch für $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$, und wir haben nun folgenden Satz:

Wenn man eine Bedingungsgleichung a. von (1) zuerst für sich behandelt, und daraus erste Verbesserungen u ableitet, und wenn man dann die erstmals verbesserten Beobachtungen, wie wenn sie Originalmessungen wären, nochmals mit Rücksicht auf alle Bedingungsgleichungen ausgleicht, so bekommt man dieselben Schlusswerte, wie wenn man alle Gleichungen zusammen in *einer* Ausgleichung behandelt hätte.

Dieser Satz gilt für beliebig viele Gleichungen in beliebigen Trennungen.

In dieser Form kann dieser Satz (suppl. theoriae combinationis art. 18. und 19.) z. B. auf Triangulierungen angewendet werden, indem man die leicht erfüllbaren Winkelsummengleichungen zuerst für sich behandelt (vgl. *Nell*, Schleiermachers Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetz, Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 1 u. ff.).

Eine Verfeinerung der partiellen Ausgleichung kann man noch erzielen durch Einführung *reduzierter Bedingungsgleichungen*, zu welchen wir nun übergehen.

Wir schreiben zunächst willkürlich:

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} b_1' v_1 + b_2' v_2 + b_3' v_3 + b_4' v_4 + [w_2 . 1] = 0 \\ c_1' v_2 + c_2' v_2 + c_3' v_3 + c_4' v_4 + [w_3 . 1] = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Dabei sind die Coëfficienten b' c' dieselben Werte, welche wir schon in § 26. als Coëfficienten der reduzierten Fehlergleichungen kennen gelernt haben, nämlich:

$$b' = b - \frac{[ab]}{[aa]} a \qquad c' = c - \frac{[ac]}{[aa]} a \tag{17}$$

$$[b'b'] = [bb.1] \qquad [b'c'] = [bc.1] \qquad [c'c'] = [cc.1]$$

Die Absolutglieder von (16) sind dieselben wie in (3) und (10), nämlich:

$$[w_2 . 1] = w_2 - \frac{[ab]}{[aa]} w_1 \qquad [w_3 . 1] = w_3 - \frac{[ac]}{[aa]} w_1 \tag{18}$$

Die reduzierten Bedingungsgleichungen (16) geben daher dasselbe Normalgleichungssystem (3), das wir früher schon als System reduzierter Normalgleichungen kennen gelernt haben.

Denkt man sich dieses System nach k_2 und k_3 aufgelöst, und rechnet ganz formell mit den reduzierten Bedingungsgleichungen (16) weiter, so erhält man:

$$v_1 = b_1' k_2 + c_1' k_3 \quad v_2 = b_2' k_2 + c_2' k_3 \quad v_3 = b_3' k_2 + c_3' k_3 \quad v_4 = b_4' k_2 + c_4' k_3 \tag{19}$$

und wir behaupten nun, dass diese v mit den schon oben bei (6) gegebenen u zusammen, *dieselben* Korrektionen δ geben, welche man bei der ungetrennten Ausgleichung nach (4) erhalten würde. Um dieses zu beweisen, betrachten wir den ersten Wert δ_1 von (4):

$$\delta_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \tag{20}$$

k_1 soll durch die erste Normalgleichung von (2) eliminiert werden, nämlich:

$$k_1 = -\frac{[ab]}{[aa]} k_2 - \frac{[ac]}{[aa]} k_3 - \frac{1}{[aa]} w_1$$

Dieses in (20) gesetzt giebt, nach w k_2 k_3 geordnet,

$$\delta_1 = -\frac{a_1}{[aa]} w_1 + \left(b_1 - \frac{[ab]}{[aa]} a_1\right) k_2 + \left(c_1 - \frac{[ac]}{[aa]} a_1\right) k_3 \tag{21}$$

Das erste Glied hievon ist $= u_1$ nach (6), und das übrige stimmt mit (19), es ist also in Übereinstimmung mit (7):

$$\delta_1 = u_1 + v_1 \quad \text{und ebenso} \quad \delta_2 \; \delta_3 \; \delta_4 \tag{22}$$

Wir haben also jetzt bewiesen, dass die erste Bedingungsgleichung a. von (1) mit den Korrektionen u, und die zwei *reduzierten* Gleichungen (16) mit den Korrektionen v dasselbe leisten, wie die Gesamtausgleichung von (1).

Wir wollen das gefundene Resultat noch für den einfachen Fall zurechtlegen, dass alle Coëfficienten $a = 1$ sind.

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n + w_1 = 0 \\ b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + \ldots + b_n\delta_n + w_2 = 0 \\ c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 + \ldots + c_n\delta_n + w_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (23)$$

Die erste Gleichung allein giebt:

$$\text{erste Korrektionen} \quad u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n = -\frac{w_1}{n} \quad (24)$$

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} b_1'\,v_1 + b_2'\,v_2 + b_3'\,v_3 + \ldots + b_n'\,v_n + w_2' = 0 \\ c_1'\,v_1 + c_2'\,v_2 + c_3'\,v_3 + \ldots + c_n'\,v_n + w_3' = 0 \end{array}\right\} \quad (25)$$

wobei

$$b_1' = b_1 - \frac{[b]}{n} \qquad b_2' = b_2 - \frac{[b]}{n} \ldots \qquad w_2' = w_2 - \frac{[b]}{n}w_1$$

$$c_1' = c_1 - \frac{[c]}{n} \qquad c_2' = c_2 - \frac{[c]}{n} \ldots \qquad w_3' = w_3 - \frac{[c]}{n}w_1$$

$$\text{Probe:} \quad [b'] = 0 \qquad [c'] = 0$$

Die zwei Gleichungen (25) werden wie Originalgleichungen mit gleichgewichtigen v weiter behandelt, und geben die zweiten Korrektionen v.

§ 46. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Ebenso wie früher bei vermittelnden Beobachtungen betrachten wir nun den Fall, dass man für 2 Funktionen die Gewichte berechnet habe und daraus auch das Gewicht einer neuen Funktion dieser Funktionen bestimmen will.

Der wichtigste Fall dieser Art besteht darin, dass man die Coordinaten X und Y und die Coordinatengewichte P_x und P_y eines Triangulierungspunktes berechnet hat, und damit irgend eine weitere Genauigkeitsfrage, z. B. Lage und Grösse einer Fehler-Ellipse, oder Distanz und Azimut beantworten will.

Die 2 ursprünglich betrachteten Funktionen seien:

$$X = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + \ldots \qquad Y = f_1'x_1 + f_2'x_2 + f_3'x_3 + f_4'x_4 \quad (1)$$

und die zugehörigen Funktionsgewichte seien nach § 42. berechnet:

$$\frac{1}{P_x} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} - \ldots \qquad \frac{1}{P_y} = [f'f'] - \frac{[af']^2}{[aa]} - \frac{[bf'.1]^2}{[bb.1]} - \ldots \quad (2)$$

Nun handelt es sich um eine neue Funktion:

$$(F) = rX + r'Y \quad (3)$$

Diese Funktion kann man sich vermöge (1) als Funktion der x dargestellt denken:

$$(F) = (rf_1 + r'f_1')x_1 + (rf_2 + r'f_2')x_2 + (rf_3 + r'f_3')x_3 + \ldots \quad (4)$$

und dann wird das Gewicht (P) hievon nach derselben Regel bestimmt wie (2), nämlich:

$$\frac{1}{(P)} = [(rf + r'f')^2] - \frac{[arf + ar'f']^2}{[aa]} - \frac{[(brf + br'f').1]^2}{[bb.1]} - \ldots \quad (5)$$

Nun ist die Summe

$$\begin{aligned} [(rf + r'f')^2] &= [r^2f^2 + 2rr'ff' + r'^2f'^2] \\ &= r^2[ff] + 2rr'[ff'] + r'^2[f'^2] \end{aligned} \quad (6)$$

Dasselbe Bildungsgesetz gilt auch unmittelbar für das zweite Glied von (5), und dieses Gesetz gilt auch für alle folgenden Glieder von (5), wie man ebenso beweist, wie früher für vermittelnde Beobachtungen § 30. S. 75—76.

Wir wollen dieses nur für $[\ldots 1]$ näher ausführen:

$$[b f.1] = [b f] - \frac{[a b]}{[a a]}[a f] \qquad [b f'.1] = [b f'] - \frac{[a b]}{[a a]}[a f']$$

$$[(b r f + b r' f').1] = [b r f + b r' f'] - \frac{[a b]}{[a a]}[a r f + a r' f']$$

$$[(b r f + b r' f').1] = r [b f.1] + r' [b f'.1]$$

Dieses entspricht völlig der zweiten Gleichung der Gruppe (6) § 30., und auch alles Übrige gestaltet sich wie dort. Wir haben also die allgemeine Regel:

Wenn für 2 Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in folgender Form entwickelt sind:

$$\frac{1}{P_x} = [f f] \; - \left\{ \frac{[a f]^2}{[a a]} + \frac{[b f.1]^2}{[b b.1]} + \frac{[c f.2]^2}{[c c.2]} + \ldots \right\} \tag{7}$$

$$\frac{1}{P_y} = [f' f'] - \left\{ \frac{[a f']}{[a a]} + \frac{[b f'.1]}{[b b.1]} + \frac{[c f'.2]}{[c c.2]} + \ldots \right\} \tag{8}$$

so bestimmt man für eine Funktion:

$$(F) = r X + r' Y \tag{9}$$

das Gewicht (P) so: Man berechnet zuerst:

$$\frac{1}{P_{xy}} = [f f'] - \left\{ \frac{[a f][a f']}{[a a]} + \frac{[b f.1][b f'.1]}{[b b.1]} + \frac{[c f.2][c f'.2]}{[c c.2]} + \ldots \right\} \tag{10}$$

und dann ist:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + 2 r r' \frac{1}{P_{xy}} + r'^2 \frac{1}{P_y} \tag{11}$$

Wenn $r = r' = 1$ ist, so bekommt man eine ähnliche Regel wie am Schluss von § 30. S. 76, nämlich: Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{P_x} = [\alpha \alpha] = A A - \left\{ \frac{A_0 A_0}{[a a]} + \frac{A_1 A_1}{[b b.1]} + \frac{A_2 A_2}{[c c.1]} + \ldots \right\} \\
&\frac{1}{P_y} = [\beta \beta] = B B - \left\{ \frac{B_0 B_0}{[a a]} + \frac{B_1 B_1}{[b b.1]} + \frac{B_2 B_2}{[c c.2]} + \ldots \right\} \\
&\text{dann berechnet man } [\alpha \beta] = A B - \left\{ \frac{A_0 B_0}{[a a]} + \frac{A_1 B_1}{[b b.1]} + \frac{A_2 B_2}{[c c.2]} + \ldots \right\} \\
&\text{und damit ist:} \\
&\frac{1}{(P)} = [\alpha \alpha] + [\beta \beta] + 2 [\alpha \beta].
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

§ 47. Verschiedene Nebenbetrachtungen.

Die Bedingungen, welchen die Ausgleichung streng genügen soll, können in sehr verschiedenen Formen ausgedrückt werden, und die Bedingungsgleichungen dürfen mehrfach umgeformt werden, wenn nur das, was sie ausdrücken, sachlich erhalten bleibt.

Man darf also die Bedingungsgleichungen mit beliebigen Zahlen multiplizieren oder dividieren (was man bei *Fehler*gleichungen nicht darf, ohne die Gewichtsverhältnisse zu verändern); man darf z. B. auch aus 2 Bedingungsgleichungen a und b mit beliebigen Faktoren m n, m' n', 2 neue Gleichungen $m a + n b$, $m' a + n' b$ bilden, und diese an Stelle der ersten benützen.

Bei all diesen Umformungen bleiben aber doch die Hauptresultate, nämlich die Verbesserungen v der Beobachtungen l, immer dieselben, denn die Aufgabe, $[v v]$ zu einem Minimum zu machen mit gewissen Nebenbedingungen, ist sachlich eine eindeutig bestimmte, und kann deswegen durch die algebraische *Form* der Auflösung nicht beeinflusst werden.

Eine weitere Frage betrifft die *Unabhängigkeit und Vollständigkeit* der Bedingungsgleichungen.

Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir die Gleichungen (4) und (10) von § 39. S. 98 und 99 nochmals vor:

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,k_1 + [ab]\,k_2 + [ac]\,k_3 + w_1 &= 0 \\ [ab]\,k_1 + [bb]\,k_2 + [bc]\,k_3 + w_2 &= 0 \\ [ac]\,k_1 + [bc]\,k_2 + [cc]\,k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Wir haben bis jetzt angenommen, dass die Bedingungsgleichungen (1) unter sich unabhängig sind, d. h. dass keine in den übrigen enthalten ist. Wir wollen nun aber untersuchen, was für Folgen entstehen, wenn dieses nicht mehr der Fall ist, und setzen hiezu:

$$c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \qquad c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \ldots \qquad w_3 = \alpha w_1 + \beta w_2 \qquad (3)$$

Dann werden auch die Coëfficienten der Normalgleichungen nicht mehr unabhängig, nämlich es wird:

$$\left.\begin{aligned} [ac] &= \alpha [aa] + \beta [ab] \;,\quad [bc] = \alpha [ab] + \beta [bb] \;,\quad w_3 = \alpha w_1 + \beta w_2 \\ [cc] &= \alpha^2 [aa] + \beta^2 [bb] + 2\alpha\beta [ab] \quad \text{oder} \quad = \alpha [ac] + \beta [bc] \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Die Determinantentheorie zeigt in kurzen Sätzen, dass dann die Unbekannten k sich nicht mehr bestimmen lassen, sondern in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erhalten werden.

Wir werden dieses auch mit unseren Symbolen $[bb.1]$ $[bc.1]$ u. s. w. verfolgen.

Die reduzierten Normalgleichungen nach (2) sind:

$$\left.\begin{aligned} [bb.1]\,k_2 + [bc.1]\,k_3 + [w_2.1] &= 0 \\ [bc.1]\,k_2 + [cc.1]\,k_3 + [w_3.1] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Hiebei ist wegen (4):

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = \alpha [ab] + \beta [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}(\alpha [aa] + \beta [ab])$$

$$[bc.1] = \beta\left([bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right) = \beta [bb.1]$$

Ähnlich findet sich $[cc.1] = \beta^2 [bb.1]$ und $[w_3.1] = \beta [w_2.1]$, das System (5) heisst also:

$$\begin{aligned} [bb.1]\,k_2 + \beta [bb.1]\,k_3 + [w_2.1] &= 0 \\ \beta [bb.1]\,k_2 + \beta^2 [bb.1]\,k_3 + \beta [w_2.1] &= 0 \end{aligned}$$

Die Elimination von k_2 führt auf:

$$[cc.2]\,k_3 + [w_3.2] = 0$$

und zwar ist:

$$[cc.2] = \beta^2 [bb.1] - \frac{\beta [bb.1]}{[bb.1]}\beta [bb.1] = 0$$

$$[w_3.2] = \beta [w_2.1] - \frac{\beta [bb.1]}{[bb.1]}[w_2.1] = 0$$

also:

$$-k_3 = \frac{[w_3.2]}{[cc.2]} = \frac{0}{0} \qquad (6)$$

Dasselbe gilt auch von den beiden anderen Unbekannten k_1 und k_2.

Der betrachtete Fall ist praktisch nicht unwichtig, weil es zuweilen vorkommt, dass *aus Versehen* eine Bedingungsgleichung angesetzt wird, welche in den übrigen bereits enthalten ist. Wenn z. B. in einer Nivellementsausgleichung ausser den einzelnen Polygonschlüssen auch noch der Schluss des Gesamtumfangspolygons als Bedingung angesetzt würde, so wäre das nichts anderes als die Summe der übrigen Bedingungsgleichungen, folglich nicht unabhängig.

Ob die Unbestimmtheit (6) sich in der Zahlenrechnung immer deutlich ausspricht, ist zweifelhaft; es kann wegen der Abrundungsfehler vorkommen, dass z. B. nicht genau $k = \frac{0{,}000}{0{,}000}$ entsteht,

$$\text{sondern etwa } k = \frac{0{,}002}{0{,}001} = 2$$

und wenn damit die Rechnung weiter geführt würde, so müsste etwas Widersinniges entstehen.

Ausser dem Falle nicht unabhängiger Bedingungsgleichungen, welchen wir hiemit erledigt haben, ist auch der Fall zu betrachten, dass eine Bedingungsgleichung *falsch* angesetzt, oder ganz weggelassen wird. Das hat an der Bildung und Auflösung der Normalgleichungen nichts Auffälliges zur Folge, äussert sich aber am Schlusse der ganzen Ausgleichung, nach Ausrechnung der Verbesserungen v, sehr unangenehm darin, dass die falsch angesetzte oder die vergessene Bedingungsgleichung nicht erfüllt ist.

Nach Diesem kann man noch die *Übereinstimmung verschiedener Funktionsformen und ihrer Gewichte nach der Ausgleichung* untersuchen:

Wir wollen hiebei die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit Winkelmessungen als anschauliches Beispiel benützen. Die Funktion F, von welcher in § 42. die Rede war, sei eine Dreiecksseite, welche aus der Basis auf verschiedenen Wegen berechnet werden kann.

Vor der Ausgleichung werden diese verschiedenen Berechnungswege auch verschiedene Werte F ergeben, *nach* der Ausgleichung aber müssen alle Wege auf denselben Wert F führen. Man hat:

$$\textit{vor} \text{ der Ausgleichung } (F) = f_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 + f_4 l_4 \tag{7}$$

$$\textit{nach} \text{ der Ausgleichung } F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 \tag{8}$$

und hiefür kann man auch eine andere, sehr anschauliche Form finden. Wenn man nämlich in (9) § 42. S. 103 die früheren Beziehungen (5) § 39. S. 98 berücksichtigt, so wird:

$$\left.\begin{aligned} F &= f_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 + f_4 l_4 \\ &+ \quad r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

d. h. man kann den ausgeglichenen Wert der Funktion F nicht bloss mittelst der ausgeglichenen Werte x berechnen, sondern auch mittelst der Beobachtungswerte l selbst, indem man in letzterem Falle noch die Ergänzungsglieder $r_1 w_1$, $r_2 w_2$, $r_3 w_3$ zufügt. Wären alle w gleich Null, d. h. wären alle Bedingungsgleichungen durch die Beobachtungen l selbst befriedigt, so wäre keine Ausgleichung nöthig, die x würden den l gleich zu nehmen sein, und die Formeln (7) und (9) würden in Folge des Wegfalls der w identisch.

Die Funktion F kann man auf verschiedenen Wegen aus den ausgeglichenen Werten x berechnen. Angenommen, man hätte statt (8) die Form gewählt:

$$F = f_0' + f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 \tag{10}$$

wobei solche Glieder, welche in (8) fehlen, vorkommen, und umgekehrt Glieder, welche in (8) sich finden, nicht vorhanden sein werden; dann müssten aber doch die Formeln (8) und (10) *denselben* Wert F geben, denn (8) und (10) können nur in Beziehung stehen durch irgend welche Bedingungsgleichungen zwischen den x; solche Gleichungen sind aber nach der Ausgleichung alle streng erfüllt.

Man kann weiter fragen, ob die beiden verschiedenen Formen (8) und (10) derselben Funktion F nach der Ausgleichung auch auf gleiches Gewicht P führen.

Allerdings werden bei verschiedenen Annahmen der f auch die Coëfficienten $[af]$ $[bf]$ u. s. w., und damit auch die Übertragungs-Coëfficienten r verschieden, dagegen in der Formel (2) § 42. S. 102:

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 \tag{11}$$

werden die Coëfficienten F_1 F_2 F_3 F_4 wieder immer dieselben, denn es handelt sich hier um eine Funktion *aller* Beobachtungen l, und diese Funktion kann von der *Form*, in welcher sie ursprünglich als Funktion einzelner x auftrat, ebensowenig beeinflusst sein, als die Ausgleichungsresultate v von der *Form* beeinflusst sind, in welcher die Bedingungsgleichungen in die Ausgleichung eingehen.

In dem kleinen Beispiel von § 44., Ausgleichung der 3 Winkel eines Dreiecks, finden wir dieses bestätigt:

Die erste Funktionsform giebt S. 107:	Die zweite Funktionsform giebt S. 108:
(9) $F = x_1$	(9*) $F = 180° - x_2 - x_3$
$f_1 = 1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$	$f_1 = 0 \quad f_2 = -1 \quad f_3 = -1$
(12) $r = -\frac{1}{3}$	(12*) $r = +\frac{2}{3}$
(13) $F_1 = +\frac{2}{3} \quad F_2 = -\frac{1}{3} \quad F_3 = -\frac{1}{3}$	(13*) $F_1 = +\frac{2}{3} \quad F_2 = -\frac{1}{3} \quad F_3 = -\frac{1}{3}$

Ein *formeller* Beweis, dass die Coëfficienten F in (11) unabhängig von der ersten Form der Funktion sind, ist nicht leicht zu führen; ein formeller Beweis ist aber auch nicht nötig, wenn man einsieht, dass sachlich die ausgeglichene Funktion F, indem sie nach (11) als eine Funktion aller Originalmessungen l sich darstellt, nur *einen* mittleren Fehler haben kann.

Wir betrachten noch das totale Differential von (11):

$$dF = F_1\, dl_1 + F_2\, dl_2 + F_3\, dl_3 + F_4\, dl_4 \tag{12}$$

$F_1\, dl_1$ stellt die Änderung der Funktion F vor, welche erzeugt wird, wenn man nur die Beobachtung l_1 um dl_1 ändert, und mit Beibehaltung aller anderen Beobachtungen l das ganze Ausgleichungsverfahren wiederholt.

Überhaupt zeigen die einzelnen Glieder von (12), welchen Beitrag jeder Beobachtungsfehler dl zu dem Funktionsfehler dF liefert. Dieser Beitrag ist von der *Form* der Funktionsberechnung unabhängig.

§ 48. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Man hat n unmittelbare Beobachtungen l, welche mit u Unbekannten x y z t durch n Fehlergleichungen verbunden sind. Ausserdem bestehen zwischen den Unbekannten streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen in der Anzahl r.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + \ldots + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + \ldots + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z + d_n t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u} + l_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + \ldots = 0 \\ B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_4 t + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\text{Anzahl} = u$$

Ausgleichungsbedingung:

$$[v v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \ldots v_n^2 = \text{Minimum} \quad (3)$$

Man kann diese Ausgleichung auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ohne Bedingungsgleichungen zurückführen, indem man mittelst der Bedingungsgleichungen (2) eine Anzahl r der u Unbekannten eliminiert. Dieses geschieht so:

Man kann die Gleichungen (2) so aufgelöst denken:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} x = \underbrace{A_1' z + A_2' t + \ldots}_{} \\ y = B_1' z + B_2' t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\text{Anzahl} = u - r$$

Setzt man diese Ausdrücke in (1), so soll erhalten werden:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = c_1' z + d_1' t + \ldots l_1' \\ v_2 = c_2' z + d_2' t + \ldots l_2' \\ v_3 = c_3' z + d_3' t + \ldots l_3' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \underbrace{c_n' z + d_n' t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} l_n' \end{array} \right\} \quad (5)$$

Man hat es also nun mit einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zu thun, welche nach den früheren Regeln zu behandeln ist. Nach der Ausgleichung hat man den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v v]}{n - (u - r)}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[v v]}{(n - u) + r}} \quad (6)$$

Zwischen n u und r bestehen Beziehungen:

Da die Bedingungsgleichungen (2) streng erfüllt sein müssen, ohne dass dadurch die x y z t völlig bestimmt sein dürfen, so muss sein:

$$u > r \quad (7)$$

und wenn die Gleichungen (5), welche nach der Elimination der r Unbekannten übrig bleiben, noch den Charakter von „Fehlergleichungen" haben sollen, so muss auch sein:

$$n > u - r \quad (8)$$

Wegen (7) und (8) wird also der Nenner $n - (u - r)$ stets eine positive Zahl sein.

Wenn nur eine *kleine* Zahl von Bedingungsgleichungen (2) vorliegt, kann dieses Verfahren wohl am Platz sein, und die Auswahl der zu eliminierenden Unbekannten wird dann von der Natur der jeweiligen Aufgabe abhängen.

Für Triangulierungsausgleichungen im Grossen ist dagegen eine andere durchaus symmetrisch angeordnete Auflösung üblich, welche wir in den folgenden § 49. bis § 53. behandeln werden.

Unter allen Umständen gilt aber die Fehlerformel (6), mit dem Nenner $n - u + r$, weil die Fehlerberechnung von der *Form* der Ausgleichung unabhängig ist.

§ 49. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung.

Wir nehmen die im vorigen § 48. beschriebenen Verhältnisse wieder vor, schreiben aber der Übersichtlichkeit wegen immer nur $n = 4$, $u = 3$, $r = 2$, d. h. wir nehmen 4 Beobachtungen, 3 Unbekannte $x\ y\ z$, und 2 Bedingungsgleichungen.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4 x + b_4 y + c_4 z}_{\text{Anzahl } = u} + l_4 \end{array} \right\} \tag{1}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1 x + B_2 y + B_3 z}_{\text{Anzahl } = u} = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

$$\left. \begin{array}{lll} n > u - r & \text{und} & u > r \\ (n = 4 \quad , & u = 3 \quad , & r = 2) \end{array} \right\} \tag{3}$$

Ausgleichungsprinzip:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Wenn man die Fehlergleichungen (1) ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) für sich behandelt, so geben sie die Normalgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x_0 + [b\,b]\,y_0 + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x_0 + [b\,c]\,y_0 + [c\,c]\,z_0 + [c\,l] = 0 \end{array} \right\} \tag{5}$$

Wir haben dabei $x_0\ y_0\ z_0$ geschrieben, zur Unterscheidung von denjenigen Resultaten $x\ y\ z$, welche man durch die Gesamtausgleichung erhalten wird.

Diese Gleichungen (5) löst man nach $x_0\ y_0\ z_0$ auf, und zugleich kann man alle Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. nach § 28. oder § 33. bestimmen; diese Gewichts-Coëfficienten werden im zweiten Teil der Ausgleichung gebraucht werden.

Die $x\ y\ z$ denken wir in je zwei Teile zerlegt:

$$x = x_0 + (1) \qquad y = y_0 + (2) \qquad z = z_0 + (3) \tag{6}$$

Die Verbesserungen (1) (2) (3) haben wir hiebei nicht durch Literierung, etwa $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, entsprechend den $x\ y\ z$, sondern durch Numerierung bezeichnet, weil dieses die bei Triangulierungen übliche Bezeichnung ist.

Damit nimmt eine einzelne Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l$$

folgende Form an:

$$v = a(x_0 + (1)) + b(y_0 + (2)) + c\,(z_0 + (3)) \quad + l$$
$$v = \underbrace{a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l}_{v'} \quad + \underbrace{a\,(1) + b\,(2) + c\,(3)}_{v''}$$
$$v = \qquad v' \qquad + \qquad v''$$

d. h. für den ersten Teil der Ausgleichung hat man:

$$v' = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l \tag{7}$$

und für den zweiten Teil der Ausgleichung:

$$v'' = a\,(1) + b\,(2) + c\,(3) \tag{8}$$

für beide Ausgleichungen zusammen:

$$v = v' + v'' \tag{9}$$

Hiernach ist:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] + 2\,[v'\,v''] \tag{10}$$

Hievon ist aber $[v'\,v''] = 0$, wie sich leicht beweist, indem man (8) mit v' multipliziert:

$$[v'\,v''] = [a\,v']\,(1) + [b\,v']\,(2) + [c\,v']\,(3) \tag{11}$$

Es ist aber nach (7) und (5):

$$[a\,v'] = [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$$

und ebenso sind $[b\,v'] = 0$ und $[c\,v'] = 0$, also im ganzen $[v'\,v''] = 0$, und (10) reduziert sich auf:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \tag{12}$$

Nachdem somit die Summe $[v\,v]$, deren Minimum erzielt werden soll, in zwei Teile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$ zerlegt ist, von denen der erste Teil $[v'\,v']$ bereits ein relatives Minimum ist, handelt es sich nur noch darum, auch den zweiten Teil $[v''\,v'']$ möglichst klein zu machen.

Da $x\ y\ z$ die unabhängigen Unbekannten der Ausgleichung sind, bestehen nach (4) die Bedingungen:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,y} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,z} = 0 \tag{13}$$

Betrachten wir die erste Bedingung näher, so kann man sie so schreiben:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = \frac{\partial\,([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,(x_0 + (1))} = 0$$

x_0 ist eine Näherungsannahme des ersten Teils, welche für den zweiten Teil als constant gilt, folglich für den zweiten Teil:

$$0 = \frac{\partial\,([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial\,(1)} = \frac{\partial\,[v'\,v']}{\partial\,(1)} + \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,(1)} \tag{14}$$

Der erste Teil giebt $(1) = 0$, denn das Minimum von $[v'\,v']$ wurde eben dadurch erzielt, dass $x = x_0$, also $(1) = 0$ gemacht wurde. Gleiches gilt bei y und z, es bleibt also nur noch das Schlussglied von (14) gleich Null zu machen, oder zugleich mit y und z:

$$0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,(1)} \qquad 0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,(2)} \qquad 0 = \frac{\partial\,[v''\,v'']}{\partial\,(3)} \tag{15}$$

d. h. in Worten: Der zweite Teil der Ausgleichung wird von dem ersten Teil unabhängig, es sind aber die Beziehungen, welche zwischen den v'' und den (1) (2) (3) bestehen, zu berücksichtigen.

Die Trennung der $x\ y\ z$ in $x_0 + (1)$, $y_0 + (2)$, $z_0 + (3)$ lässt sich auch in den Bedingungsgleichungen (2) ausdrücken. Diese geben nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1 (x_0 + (1)) + A_2 (y_0 + (2)) + A_3 (z_0 + (3)) = 0 \\ B_0 + B_1 (x_0 + (1)) + B_2 (y_0 + (2)) + B_3 (z_0 + (3)) = 0 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1 x_0 + A_2 y_0 + A_3 z_0 = w_1 \\ B_0 + B_1 x_0 + B_2 y_0 + B_3 z_0 = w_2 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

so ergiebt die Vergleichung von (16) mit (2):

$$\left.\begin{array}{l} A_1 (1) + A_2 (2) + A_3 (3) + w_1 = 0 \\ B_1 (1) + B_2 (2) + B_3 (3) + w_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Das sind die Bedingungsgleichungen für den zweiten Teil der Ausgleichung, zu dem wir nun übergehen.

§ 50. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils.

Wir haben uns überzeugt, dass $[v''\,v''] =$ Minimum zu machen ist mit den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 (1) + A_2 (2) + A_3 (3) + w_1 = 0 \\ B_1 (1) + B_2 (2) + B_3 (3) + w_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen (1) sich statt auf die Verbesserungen (1) (2) (3) direkt auf die v'' bezögen, so *würde* man nach der Korrelatenmethode kurz so verfahren:

$$\begin{array}{l} [A\,A]\,k_1 + [A\,B]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [A\,B]\,k_1 + [B\,B]\,k_2 + w_2 = 0 \end{array}$$

Dieses ist aber nicht der Fall, die (1) (2) (3) stehen vielmehr zu den v'' in ähnlichen Beziehungen wie die $x_0\ y_0\ z_0$ zu den l.

Nun weiss man nach (6) § 28. S. 70, aus der Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, dass die allgemeine Auflösung der Normalgleichungen des ersten Teils in folgenden Formeln enthalten ist:

$$\left.\begin{array}{l} -x_0 = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y_0 = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z_0 = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

und zwar gehören hiezu Fehlergleichungen von dieser Form:

$$v' = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l \qquad (3)$$

Dagegen haben die Fehlergleichungen der Gesamtausgleichung diese Form:

$$v = v' + v'' = a\,(x_0 + (1)) + b\,(y_0 + (2)) + c\,(z_0 + (3)) + l$$

oder

$$v' = a\,(x_0 + (1)) + b\,(y_0 + (2)) + c\,(z_0 + (3)) + l - v'' \qquad (3^*)$$

Vergleicht man dieses (3*) mit (3), so erkennt man, dass der neuen Fehlergleichung (3*) auch ein neues System (2*) entsprechen muss, dessen erste Gleichung ist:

$$-(x_0 + (1)) = \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \qquad (2^*)$$

was mit (2) verglichen folgendes giebt:

$$\left.\begin{array}{l} (1) = \alpha_1 v_1'' + \alpha_2 v_2'' + \alpha_3 v_3'' + \alpha_4 v_4'' \\ (2) = \beta_1 v_1'' + \beta_2 v_2'' + \beta_3 v_3'' + \beta_4 v_4'' \\ (3) = \gamma_1 v_1'' + \gamma_2 v_2'' + \gamma_3 v_3'' + \gamma_4 v_4'' \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Diese Ausdrücke (4) hat man in die Bedingungsgleichungen (1) einzusetzen, wo-

durch Gleichungen entstehen, welche sich auf die Verbesserungen v'' beziehen, und folgende Form haben:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}_1 v_1'' + \mathrm{I}_2 v_2'' + \mathrm{I}_3 v_3'' + \mathrm{I}_4 v_4'' + w_1 = 0 \\ \mathrm{II}_1 v_1'' + \mathrm{II}_2 v_2'' + \mathrm{II}_3 v_3'' + \mathrm{II}_4 v_4'' + w_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Coëfficienten I und II haben vermöge ihrer Entstehung aus (4) und (1) folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I}_1 = A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 + A_3\gamma_1 & \mathrm{II}_1 = B_1\alpha_1 + B_2\beta_1 + B_3\gamma_1 \\ \mathrm{I}_2 = A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 + A_3\gamma_2 & \mathrm{II}_2 = B_1\alpha_2 + B_2\beta_2 + B_3\gamma_2 \\ \mathrm{I}_3 = A_1\alpha_3 + A_2\beta_3 + A_3\gamma_3 & \mathrm{II}_3 = B_1\alpha_3 + B_2\beta_3 + B_3\gamma_3 \\ \mathrm{I}_4 = A_1\alpha_4 + A_2\beta_4 + A_3\gamma_4 & \mathrm{II}_4 = B_1\alpha_4 + B_2\beta_4 + B_3\gamma_4 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Nun ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Ausgleichung direkter bedingter Beobachtungen, d. h. mit Einführung der Korrelaten k_1 und k_2 zu den Bedingungsgleichungen (5) hat man die Normalgleichungen zu bilden:

$$\left.\begin{array}{l} [\mathrm{I\,I}]\,k_1 + [\mathrm{I\,II}]\,k_2 + w_1 = 0 \\ [\mathrm{I\,II}]\,k_1 + [\mathrm{II\,II}]\,k_2 + w_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

worauf dann die einzelnen v'' gefunden werden können, nämlich, nach Vertikalreihen in (5):

$$\left.\begin{array}{l} v_1'' = \mathrm{I}_1 k_1 + \mathrm{II}_1 k_2 \\ v_2'' = \mathrm{I}_2 k_1 + \mathrm{II}_2 k_2 \\ v_3'' = \mathrm{I}_3 k_1 + \mathrm{II}_3 k_2 \\ v_4'' = \mathrm{I}_4 k_1 + \mathrm{II}_4 k_2 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Verfolgt man diesen Rechnungsgang näher, so findet man durch Quadrieren und Multiplizieren der Coëfficienten I und II die Summen-Coëfficienten der Normalgleichungen (7) wie folgt:

$$\begin{array}{l} [\mathrm{I\,I}] = \\ A_1A_1[\alpha\alpha] + 2A_1A_2[\alpha\beta] + 2A_1A_3[\alpha\gamma] \\ \quad + A_2A_2[\beta\beta] + 2A_2A_3[\beta\gamma] \\ \quad + A_3A_3[\gamma\gamma] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [\mathrm{I\,II}] = \hfill (9\mathrm{a}) \\ + A_1B_1[\alpha\alpha] + A_1B_2[\alpha\beta] + A_1B_3[\alpha\gamma] \\ + A_2B_1[\alpha\beta] + A_2B_2[\beta\beta] + A_2B_3[\beta\gamma] \\ + A_3B_1[\alpha\gamma] + A_3B_2[\beta\gamma] + A_3B_3[\gamma\gamma] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} [\mathrm{II\,II}] = \hfill (9\mathrm{b}) \\ B_1B_1[\alpha\alpha] + 2B_1B_2[\alpha\beta] + 2B_1B_3[\alpha\gamma] \\ \quad + B_2B_2[\beta\beta] + 2B_2B_3[\beta\gamma] \\ \quad + B_3B_3[\gamma\gamma] \end{array}$$

Führt man (6) auch in (8) ein, so erhält man zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} v_1'' = (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 + A_3\gamma_1)k_1 + (B_1\alpha_1 + B_2\beta_1 + B_3\gamma_1)k_2 \\ v_2'' = (A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 + A_3\gamma_2)k_1 + (B_1\alpha_2 + B_2\beta_2 + B_3\gamma_2)k_2 \\ v_3'' = (A_1\alpha_3 + A_2\beta_3 + A_3\gamma_3)k_1 + (B_1\alpha_3 + B_2\beta_3 + B_3\gamma_3)k_2 \\ v_4'' = (A_1\alpha_4 + A_2\beta_4 + A_3\gamma_4)k_1 + (B_1\alpha_4 + B_2\beta_4 + B_3\gamma_4)k_2 \end{array}\right\} \quad (10)$$

und setzt man diese Ausdrücke wieder in (4), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{rl} (1) = x - x_0 = & [\alpha\alpha]A_1k_1 + [\alpha\alpha]B_1k_2 \\ & + [\alpha\beta]A_2k_1 + [\alpha\beta]B_2k_2 \\ & + [\alpha\gamma]A_3k_1 + [\alpha\gamma]B_3k_2 \\ (2) = y - y_0 = & [\alpha\beta]A_1k_1 + [\alpha\beta]B_1k_2 \\ & + [\beta\beta]A_2k_1 + [\beta\beta]B_2k_2 \\ & + [\beta\gamma]A_3k_1 + [\beta\gamma]B_3k_2 \\ (3) = z - z_0 = & [\alpha\gamma]A_1k_1 + [\alpha\gamma]B_1k_2 \\ & + [\beta\gamma]A_2k_1 + [\beta\gamma]B_2k_2 \\ & + [\gamma\gamma]A_3k_1 + [\gamma\gamma]B_3k_2 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und wir haben folgenden Rechnungsgang: Mit den Coëfficienten A, B der Bedingungsgleichungen (1) und mit den Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ . . ., welche schon bei Gelegenheit des ersten Teils der Ausgleichung (im vorigen § 49. S. 117) bestimmt worden sind, rechnet man die Coëfficienten [I I] [I II] u. s. w. nach (9a) und 9b) aus, stellt damit die Normalgleichungen (7) auf, und löst dieselben nach den Korrelaten k_1 und k_2 auf.

Diese Korrelaten setzt man in die Gleichungen (11), und hat damit alle Korrektionen (1) (2) (3).

Die einzelnen Verbesserungen v'' nach (10) bekommt man auf diesem Wege nicht, doch braucht man dieselben gewöhnlich auch nicht selbst, sondern nur ihre Quadratsumme $[v''\,v'']$, welche wir in § 41. behandeln werden.

Obgleich somit im Prinzip alles erledigt ist, führen wir doch noch einige Zwischen-Bezeichnungen ein, durch welche die Formeln (9) und (11) mehr übersichtlich, und zur numerischen Ausrechnung bequemer gemacht werden sollen.

Je nachdem man in (11) nach Horizontallinien oder nach Vertikallinien ordnet, bekommt man Teilsummen, für welche wir die neuen Zeichen [1] [2] [3], oder $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ... einführen, und welche als „Hilfsgrössen [1] [2] [3] ...“ und „Übertragungs-Coëfficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ ...“ benannt werden.

Hilfsgrössen:

$$\left.\begin{aligned}[1] &= A_1\,k_1 + B_1\,k_2\\ [2] &= A_2\,k_1 + B_2\,k_2\\ [3] &= A_3\,k_1 + B_3\,k_2\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Übertragungs-Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1\,[\alpha\alpha] + A_2\,[\alpha\beta] + A_3\,[\alpha\gamma] & \mathfrak{B}_1 &= B_1\,[\alpha\alpha] + B_2\,[\alpha\beta] + B_3\,[\alpha\gamma]\\ \mathfrak{A}_2 &= A_1\,[\alpha\beta] + A_2\,[\beta\beta] + A_3\,[\beta\gamma] & \mathfrak{B}_2 &= B_1\,[\alpha\beta] + B_2\,[\beta\beta] + B_3\,[\beta\gamma]\\ \mathfrak{A}_3 &= A_1\,[\alpha\gamma] + A_2\,[\beta\gamma] + A_3\,[\gamma\gamma] & \mathfrak{B}_3 &= B_1\,[\alpha\gamma] + B_2\,[\beta\gamma] + B_3\,[\gamma\gamma]\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (11) zweifach neu schreiben:

$$\begin{aligned}(1) &= [\alpha\alpha]\,[1] + [\alpha\beta]\,[2] + [\alpha\gamma]\,[3] & & & (1) &= \mathfrak{A}_1\,k_1 + \mathfrak{B}_1\,k_2 & &(14)\,\alpha\\ (2) &= [\alpha\beta]\,[1] + [\beta\beta]\,[2] + [\beta\gamma]\,[3] & &\text{oder} & (2) &= \mathfrak{A}_2\,k_1 + \mathfrak{B}_2\,k_2 & &\text{und}\\ (3) &= [\alpha\gamma]\,[1] + [\beta\gamma]\,[2] + [\gamma\gamma]\,[3] & & & (3) &= \mathfrak{A}_3\,k_1 + \mathfrak{B}_3\,k_2 & &(14)\,\mathfrak{A}\end{aligned}$$

Auch die Normalgleichungs-Coëfficienten in (7) lassen sich nun noch anders darstellen:

$$\left.\begin{aligned}[\text{I I}] &= [A\,\mathfrak{A}] \qquad [\text{I II}] = [A\,\mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A}\,B]\\ & \qquad\qquad\quad [\text{II II}] = [B\,\mathfrak{B}]\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Die nicht quadratischen Coëfficienten z. B. [I II] können doppelt erhalten werden, was als Probe dient. Im einzelnen ist hiebei:

$$\left.\begin{aligned}[A\,\mathfrak{B}] &= A_1\,\mathfrak{B}_1 + A_2\,\mathfrak{B}_2 + \ldots\\ [\mathfrak{A}\,B] &= \mathfrak{A}_1\,B_1 + \mathfrak{A}_2\,B_2 + \ldots\end{aligned}\right\}\qquad(15a)$$

Mit diesen Hilfsgrössen [1] [2] [3] und Übertragungs-Coëfficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ nimmt die Ausgleichung folgenden Gang an:

1) Coëfficienten A B ... der Bedingungsgleichungen nach (1).
2) Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ ... nach § 28. oder § 33.
3) Übertragungs-Coëfficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ... nach (13).
4) Normalgleichungs-Coëfficienten nach (15).
5) Auflösung der Normalgleichungen (7).
6) Hilfsgrössen [1] [2] [3] nach (12) } oder (1) (2) (3) nach (14)$\mathfrak{A}$.
7) Korrektionen (1) (2) (3) nach (14)α }

§ 51. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler.

Nach (12) § 49. S. 118 haben wir:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \tag{1}$$

Die Bestandteile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$, welche von dem ersten Teil und von dem zweiten Teil der Ausgleichung herrühren, braucht man nicht aus den einzelnen v' und v'' auszurechnen, sondern man kann sie aus den Normalgleichungen ableiten.

Was zunächst den ersten Teil betrifft, so hat man alles hiezu Nötige nach (8) § 27. S. 67, nämlich für u Unbekannte:

$$[v'\,v'] \quad [l\,l\,.\,u] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \dots \tag{2}$$

und auch für den zweiten Teil der Ausgleichung haben wir in § 41. bereits alle Formen kennen gelernt, in welche $[v''\,v'']$ gebracht werden kann, denn diese Formen lassen sich alle auf den neuen Fall übertragen, wenn man nur die Bedeutung der neuen Zeichen in § 49. und § 50. berücksichtigt.

Wir haben daher nach (4) und (5) § 41. S. 101:

$$[v''\,v''] = -[w\,k] = -w_1\,k_1 - w_2\,k_2 - \dots \tag{3}$$

und

$$[v''\,v''] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[\mathrm{II\,II}\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]} + \dots \tag{4}$$

Obgleich diese Formeln nach Analogie von § 41. sofort angeschrieben werden können, weil es sich um die Summe $[v''\,v'']$ handelt, welche durch die Korrelatenausgleichung von § 50. zu einem Minimum gemacht wurde, mag es doch auch angenehm sein, diese Formeln unmittelbar nachzuweisen, wobei sich zugleich noch eine neue praktisch brauchbare Form (5) ergeben wird.

Die einzelnen v'', welche in (10) § 50. S. 120 gegeben sind, lassen sich mit Benützung der Hilfsgrössen [1] [2] [3] zunächst so darstellen:

$$v_1'' = \alpha_1\,[1] + \beta_1\,[2] + \gamma_1\,[3]$$
$$v_2'' = \alpha_2\,[1] + \beta_2\,[2] + \gamma_2\,[3]$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Also

$$\begin{aligned}[v''\,v''] = [\alpha\,\alpha]\,[1]\,[1] &+ 2\,[\alpha\,\beta]\,[1]\,[2] + 2\,[\alpha\,\gamma]\,[1]\,[3] \\ &+ [\beta\,\beta]\,[2]\,[2] + 2\,[\beta\,\gamma]\,[2]\,[3] \\ &+ [\gamma\,\gamma]\,[3]\,[3]\end{aligned}$$

Mit Benützung von (14)α § 50. S. 121 wird dieses:

$$[v''\,v''] = [1]\,(1) + [2]\,(2) + [3]\,(3) \tag{5}$$

und mit (12) § 50. S. 121, wenn man zugleich nach k ordnet,:

$$[v''\,v''] = (A_1\,(1) + A_2\,(2) + A_3\,(3))\,k_1 + (B_1\,(1) + B_2\,(2) + B_3\,(3))\,k_2$$

Die Coëfficienten von k_1 und k_2 sind hier nichts anderes, als die linken Teile der Normalgleichungen (1) § 50. S. 119, d. h. es ist nun:

$$[v''\,v''] = -w_1\,k_1 - w_2\,k_2 = -[w\,k]$$

wie schon oben (3) geschrieben wurde; und daraus folgt (4) ganz ebenso wie die frühere analoge Gleichung in § 41.

Nachdem wir so die Bestandteile von $[v\,v]$ kennen gelernt haben, kann auch die Formel für den mittleren Fehler m zu einer mehr anschaulichen Bedeutung gebracht werden. Nach (6) § 48. ist nämlich nun:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n - u + r} = \frac{[v'\,v'] + [v''\,v'']}{(n - u) + r}$$

Hiebei passen die Zähler und Nenner wieder in Teilen zusammen. Es ist nämlich:

$$\frac{[v' v']}{n - u} = m_1^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{[v'' v'']}{r} = m_2^2$$

wo m_1 den mittleren Fehler nur aus dem ersten Teil der Ausgleichung, und m_2 den mittleren Fehler nur aus dem zweiten Teil der Ausgleichung vorstellt.

Im allgemeinen werden m_1 und m_2 weder unter sich gleich, noch mit dem Gesamtmittelfehler m gleich ausfallen.

Wenn m_1 und m_2 sehr wesentlich verschieden ausfallen, so deutet das auf Fehlerquellen, welche in dem ersten oder in dem zweiten Teil verborgen geblieben sind.

§ 52. Funktionsgewicht nach der Ausgleichung.

Nachdem im vorigen § 51. die Korrelatenausgleichung durch die Coëfficienten auf den früheren Fall von § 39. zurückgeführt ist, können wir auch das Funktionsgewicht nach der Ausgleichung, ohne weitere Entwicklungen, nach § 42. anschreiben, wenn nur die Bedeutung der Coëfficienten $\alpha\ \beta \ldots$ und I II ... richtig benützt wird.

Es soll sich um folgende Funktion handeln:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z \tag{1}$$

deren Gewicht P bestimmt werden soll. Man zerlegt wie bisher:

$$F = f_1 (x_0 + (1)) + f_2 (y_0 + (2)) + f_3 (z_0 + (3)) \tag{2}$$

Um dieses als eine Funktion von $(l - v'')$ darzustellen, hat man nach (2*) § 50. S. 119:

$$\begin{aligned}
-(x_0 + (1)) &= \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \\
-(y_0 + (2)) &= \beta_1 (l_1 - v_1'') + \beta_2 (l_2 - v_2'') + \beta_3 (l_3 - v_3'') + \beta_4 (l_4 - v_4'') \\
-(z_0 + (3)) &= \gamma_1 (l_1 - v_1'') + \gamma_2 (l_2 - v_2'') + \gamma_3 (l_3 - v_3'') + \gamma_4 (l_4 - v_4'')
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2), so wird folgende Form entstehen:

$$-F = \varphi_1 (l_1 - v_1'') + \varphi_2 (l_2 - v_2'') + \varphi_3 (l_3 - v_3'') + \varphi_4 (l_4 - v_4'') \tag{3}$$

wo die Coëfficienten φ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1 \\
\varphi_2 &= f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2 \\
\varphi_3 &= f_1 \alpha_3 + f_2 \beta_3 + f_3 \gamma_3 \\
\varphi_4 &= f_1 \alpha_4 + f_2 \beta_4 + f_3 \gamma_4
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nun ist das Gewicht der Funktion (3) nach den Regeln für bedingte Beobachtungen nach (12) § 42. S. 103:

$$\frac{1}{P} = [\varphi\varphi] - \left\{ \frac{[\mathrm{I}\,\varphi]^2}{[\mathrm{I}\,\mathrm{I}]} + \frac{[\mathrm{II}\,\varphi \,.\, 1]^2}{[\mathrm{II}\,\mathrm{II} \,.\, 1]} + \frac{[\mathrm{III}\,\varphi \,.\, 2]^2}{[\mathrm{III}\,\mathrm{III} \,.\, 2]} + \cdots \right\} \tag{5}$$

Dabei ist der erste Teil vermöge (4):

$$\left.\begin{aligned}
[\varphi\varphi] = [\alpha\alpha] f_1^2 &+ 2 [\alpha\beta] f_1 f_2 + 2 [\alpha\gamma] f_1 f_3 \\
&+ \quad [\beta\beta] f_2^2 \quad + 2 [\beta\gamma] f_1 f_3 \\
&\qquad\qquad\qquad + \quad [\gamma\gamma] f_3^2
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

d. h. nach (3) § 29. S. 73 ist $[\varphi\varphi]$ das Gewicht der Funktion F nach der ersten Ausgleichung und *vor* der zweiten Ausgleichung.

Hiefür sind auch alle anderen Formen von § 29. gültig, also nach Einführung der Hilfsgrössen q, die Formel (5) S. 74:

$$[\varphi\varphi] = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 = [q f] \tag{7}$$

und die elegante Schlussformel (13) S. 75:

$$[\varphi\varphi] = \frac{f_1^2}{[a a]} + \frac{[f_2 \,.\, 1]^2}{[b b \,.\, 1]} + \frac{[f_3 \,.\, 2]^2}{[c c \,.\, 2]} + \cdots \tag{8}$$

Was den zweiten Teil von (5) betrifft, so hat man hiezu lediglich die Bedeutungen der φ in (4) mit den Coëfficienten I II III von (6) § 50. S. 120 zusammenzunehmen. Und wenn man darnach die Produktsummen $[\mathrm{I}\varphi]$, $[\mathrm{II}\varphi]$, $[\mathrm{III}\varphi]$ u. s. w. bildet, so sieht man alsbald, dass man wieder auf gleiche Formen kommt wie bei [I II] , [I III] u. s. w. Die Glieder $[\mathrm{I}\varphi]$, $[\mathrm{II}\varphi]$ ... schliessen sich hieran gerade so an, wie wenn zu den Bedingungsgleichungen mit den Coëfficienten A B ... noch eine weitere Gleichung mit den Coëfficienten f_1 f_2 f_3 ... getreten wäre, und an die Reihe der Übertragungs-Coëfficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ... schliessen sich noch die q so an:

$$\left.\begin{array}{lllll} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 & \ldots \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \ldots \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Für die $[\mathrm{I}\varphi]$, $[\mathrm{II}\varphi]$ u. s. w. gewinnt man hiebei auch je *zwei* Formeln, ebenso wie die nichtquadratischen [I II] , [I III] ... nach (15) § 50. S. 121 auch doppelt ausdrückbar waren. Die Resultate sind:

$$\left.\begin{array}{llll} [\mathrm{I}\varphi] & = [\mathfrak{A}f] & \text{oder} & = [Aq] \\ [\mathrm{II}\varphi] & = [\mathfrak{B}f] & \text{oder} & = [Bq] \\ [\mathrm{III}\varphi] & = [\mathfrak{C}f] & \text{oder} & = [Cq] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Diese Glieder hängt man an die Elimination der Normalgleichungen an, und rechnet dann genau so weiter, wie es schon in § 42. gelehrt wurde.

§ 53. Vermittelnde Beobachtungen mit partiellen Bedingungsgleichungen.

Wenn die Fehlergleichungen Unbekannte enthalten, welche in den Bedingungsgleichungen nicht vorkommen, so lassen sich die im Vorstehenden entwickelten Formeln doch anwenden, denn man kann dann annehmen, dass die betreffenden Coëfficienten der Bedingungsgleichungen gleich Null sind.

Hiernach wäre es überhaupt nicht nötig, diesen Fall besonders zu behandeln; allein man kann den fraglichen Umstand schon in dem ersten Teil der Ausgleichung vorteilhaft ausnützen, indem man die in den Bedingungsgleichungen nicht auftretenden Unbekannten schon in den Normalgleichungen des ersten Teils eliminiert.

Da bei Triangulierungsausgleichungen dieser Fall von Wichtigkeit ist, gehen wir hier näher darauf ein, und nehmen zugleich Veranlassung, die Anwendung der allgemeinen Theorie auf Triangulierungsausgleichung auch sonst noch vorzubereiten.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{\begin{array}{l} v_1' = \underbrace{h_1(x) + i_1(y)} + \underbrace{a_1' x + b_1' y + c_1' z + l_1'} \\ v_2' = h_2(x) + i_2(y) + a_2' x + b_2' y + c_2' z + l_2' \\ v_3' = h_3(x) + i_3(y) + a_3' x + b_3' y + c_3' z + l_3' \\ v_4' = h_4(x) + i_4(y) + a_4' x + b_4' y + c_4' z + l_4' \\ v_5' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Anzahl $= s$ Anzahl $= u$

Gesamt-Anzahl $= s + u$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1 x + B_2 y + B_3 z}_{\text{Anzahl} = u.} = 0 \end{array} \right\} \qquad (2)$$

Die s Unbekannten (x) (y) (die Nullpunkts-Korrektionen der einzelnen Sätze) kommen nur in den Fehlergleichungen (1), nicht aber in den Bedingungsgleichungen (2) vor. Das hat auf den Beginn der ersten Ausgleichung keinen Einfluss; man stellt unbekümmert darum die zu (1) gehörigen Normalgleichungen auf, und beginnt damit, (x) und (y) zu eliminieren.

Nachdem (x) und (y) eliminiert sind, bleibt ein System übrig, welches in unseren bisherigen Bezeichnungen so geschrieben werden muss:

$$\left. \begin{array}{rl} \underline{[a'a'.2]\,x} + [a'b'.2]\,y + [a'c'.2]\,z + [a'l'.2] &= 0 \\ \underline{[b'b'.2]\,y} + [b'c'.2]\,z + [b'l'.2] &= 0 \\ \underline{[c'c'.2]\,z} + [c'l'.2] &= 0 \\ \underline{[l'l'.2]} &= [v_0 v_0] \end{array} \right\} \qquad (3)$$

Nach den früheren Betrachtungen über reduzierte Fehlergleichungen § 26. haben die hier auftretenden Coëfficienten $[a'a'.2]$ u. s. w. wieder die Bedeutungen von Summen und Produkten, wir setzen daher wieder $[a'a'.2] = [aa]$ u. s. w. und haben statt (3):

$$\left. \begin{array}{rl} \underline{[aa]\,x} + [ab]\,y + [ac]\,z + [al] &= 0 \\ \underline{[bb]\,y} + [bc]\,z + [bl] &= 0 \\ \underline{[cc]\,z} + [cl] &= 0 \\ \underline{[ll]} &= [v_0 v_0] \end{array} \right\} \qquad (4)$$

Mit diesen Coëfficienten $[aa]$ $[ab]$ ... rechnet man nun gerade so weiter, wie mit den früheren, ebenfalls mit $[aa]$ $[ab]$ ... bezeichneten Coëfficienten des ersten Teils der Ausgleichung.

Die Quadratsumme $[v_0 v_0]$ in (3) und (4) reduziert sich allmählich vollends auf $[v'v']$ in folgender Weise:

$$[v'v'] = [v_0 v_0] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]} - \dots \qquad (5)$$

Das mittlere Fehlerquadrat der ersten Ausgleichung wird:

$$m_1^2 = \frac{[v'v']}{n - (s + u)} \qquad (6)$$

Wir wollen nun auch noch einen anderen Umstand hervorheben, der sich bei Triangulierungsausgleichungen von selbst einstellt, ohne die Allgemeingültigkeit der bisherigen Entwicklungen zu beeinflussen, nämlich das Zerfallen der Fehlergleichungen (1) und der Normalgleichungen (4) in verschiedene ganz unabhängige Gruppen. Diese Gleichungen gehören nämlich zu dem Inbegriff *aller* Stationsausgleichungen.

Wir wollen dieses in allgemeinen Formeln andeuten, und annehmen, es handle sich um 3 Unbekannte mit folgenden in 2 Systeme zerfallenden Fehlergleichungen, in welchen etwa gewisse andere Unbekannte (x) (z) ... bereits eliminiert sein mögen:

$$\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y \;\dots\; + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y \;\dots\; + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y \;\dots\; + l_3 \\ v_4 = \dots \quad \dots\; c_4 z + l_4 \\ v_5 = \dots \quad \dots\; c_5 z + l_5 \end{array}$$

Bildet man hiezu die Normalgleichungen, so werden sie:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{[aa]}\,x + [ab]\,y \;.\;.\;. + [al] = 0 \\ \underline{[bb]\,y} \;.\;.\;. + [bl] = 0 \\ \underline{[cc]}\,z + [cl] = 0 \\ \underline{[l\,l]} = (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + (l_4^2 + l_5^2) \\ = [v_0 v_0]_1 \qquad + [v_0 v_0]_2 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Diese in 2 Systeme zerfallende Form (7) ist in der allgemeinen Form (4) inbegriffen, und der Umstand, dass ein Teil der Coëfficienten in (7) gleich Null ist, macht sich in der Weiterrechnung von selbst angenehm geltend.

Auch die Formel (5) zerfällt dann von selbst in einzelne getrennte Teile:

$$[v'v']_1 = [v_0 v_0]_1 - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}$$

$$[v'v']_2 = [v_0 v_0]_2 \;.\;.\;.\;.\;. \qquad .\;.\;.\;.\;.\;. - \frac{[cl]^2}{[cc]}$$

Wegen des Ausfallens von $[ac]$ und $[bc]$ in (7) ist nämlich $[cl.2] = [cl]$ und $[cc.2] = [cc]$. Dann ist:

$$[v'v']_1 + [v'v']_2 = [v'v']$$

$[v'v']_1$ entspricht einer ersten Station, $[v'v']_2$ einer zweiten Station u. s. w.

Die Formel (6) kann man nun sowohl für jede einzelne Station, als auch für den Inbegriff aller Stationen anschreiben.

§ 54. Formel-Zusammenstellung für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Wir stellen alle Gebrauchsformeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen im Folgenden zusammen, mit den bisher in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen. Zur Vergleichung stellen wir rechts daneben die entsprechenden Formeln der „Rechnungsvorschriften“ von S. 1—24 des Werkes: „Die Königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, zweite vermehrte Auflage. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation“, Berlin 1870. und zwar beziehen sich die römischen Nummern XVI, XVII u. s. w. auf die dort angewendete Nummerierung I. bis XXIX.

Wir beginnen mit den reduzierten Stations-Normalgleichungen, wobei sich die Bezeichnung „reduziert“ darauf bezieht, dass die Stations-Unbekannten, welche wir in § 53. mit (x), (y) bezeichnet haben (x x, $x_{,,}$ $x_{,,,}$ der Rechnungsvorschriften S. 2), in den Stations-Normalgleichungen bereits eliminiert seien.

Formeln unseres Buches § 49.—53.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.
Reduzierte Stations-Normalgleichungen:	
$\underline{[aa]\,x_0} + [ab]\,y_0 + [ac]\,z_0 + [al] = 0$	$\underline{(aa)\,A} - (ab)\,B - (ac)\,C - (an) = 0$
$\underline{[bb]\,y_0} + [bc]\,z_0 + [bl] = 0$	$+ \underline{(bb)\,B} - (bc)\,C - (bn) = 0$
$\underline{[cc]\,z_0} + [cl] = 0$	$+ \underline{(cc)\,C} - (cn) = 0$
$\underline{[ll]} = [v_0 v_0]$	$(V_0\,V_0)$
	III. und VIIIc.

Formeln unseres Buches § 49.—53.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1 - 24.

Diese Gleichungen werden nach $x_0\ y_0\ z_0$, bzw. $A\ B\ C$, aufgelöst, man hat also nun:

die auf der Station ausgeglichenen Winkel:

$x_0 \quad y_0 \quad z_0$	$A \quad B \quad C$

Am Schluss der Elimination bekommt man hiebei gelegentlich die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler:

$[v'v']_1 \quad [v_0 v_0]_1 - \left\{\frac{[al]^2}{[aa]} + \frac{[bl.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}\right\}$	$(VV) = (V_0 V_0) - \left\{\frac{(an)^2}{(aa)} + \frac{(bn.1)^2}{(bb.1)} + \frac{(cn.2)^2}{(cc.2)}\right\}$ VIII$_c$.
$[v'v']_1$ gilt zunächst für *eine* Station; für alle Stationen zusammen hat man: $[v'v']_1 + [v'v']_2 + [v'v']_3 + \ldots = [v'v']$	(VV) gilt zunächst für *eine* Station; für alle Stationen zusammen hat man: $(VV) + (V'V') + (V''V'') + (V'''V''') + \ldots$

Jede einzelne Stationsausgleichung giebt nun einen mittleren Fehler:

$m_1 = \sqrt{\frac{[v'v']_1}{n - u - s}}$	$\mu_1 = \sqrt{\frac{(VV)}{m - A, B, C - x}}$

Bezieht man die Berechnung auf alle Stationen zusammen, so wird:

$m_1 = \sqrt{\frac{[v'v']}{[n] - [u] - [s]}}$	$\mu_1 = \sqrt{\frac{(VV) + (V'V') + (V''V'')}{(m) - (A, B, C) - (x)}}$

Mit den auf den Stationen ausgeglichenen Winkeln $x_0\ y_0\ z_0$, bzw. $A\ B\ C$, bildet man die Netzbedingungsgleichungen, gerade so, wie wenn diese $x_0\ y_0\ z_0$ bzw. $A\ B\ C$ unmittelbar gemessene Winkel wären. Die Netzkorrektionen dieser Winkel werden mit (1) (2) (3) ... durch das ganze Netz durchlaufend numeriert.

Netzbedingungsgleichungen:

$A_1(1) + A_2(2) + A_3(3) + \ldots + w_1 = 0$	$\mathfrak{a}_1(1) + \mathfrak{a}_2(2) + \mathfrak{a}_3(3) + \ldots - \mathfrak{A} = 0$
$B_1(1) + B_2(2) + B_3(3) + \ldots + w_2 = 0$	$\mathfrak{b}_1(1) + \mathfrak{b}_2(2) + \mathfrak{b}_3(3) + \ldots - \mathfrak{B} = 0$
$C_1(1) + C_2(2) + C_3(3) + \ldots + w_3 = 0$	$\mathfrak{c}_1(1) + \mathfrak{c}_2(2) + \mathfrak{c}_3(3) + \ldots - \mathfrak{C} = 0$
	XIII.

Nachdem so die Numerierung aller Winkel des Netzes festgestellt ist, und die Netzbedingungsgleichungen tabellarisch geordnet sind, bildet man auch eine entsprechende Tabelle der Gewichts-Coëfficienten. Bei Gelegenheit der einzelnen Stations-Normalgleichungs-Auflösungen hat man (nach § 28. oder § 33.) alle diese Coëfficienten bestimmt:

Gewichts-Coëfficienten der einzelnen Stationen:

$[\alpha\alpha]$	$[\alpha\beta]$	$[\alpha\gamma]$	...	$(\alpha\alpha)$	$(\alpha\beta)$	$(\alpha\gamma)$	...
	$[\beta\beta]$	$[\beta\gamma]$	...		$(\beta\beta)$	$(\beta\gamma)$	...
		$[\gamma\gamma]$	...			$(\gamma\gamma)$	...

Diese Coëfficienten zerfallen in so viele Einzelsysteme, als man Stationen hat. Zur tabellarischen Übersicht empfiehlt es sich, nun statt der Literierung $\alpha\ \beta$ ... eine den Netzkorrektionen (1) (2) (3) entsprechende Numerierung anzuwenden:

Formeln unseres Buches § 49.—53.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Gewichts-Coëfficienten-Tabelle für alle Stationen:
(beispielshalber mit Gruppen von 3 2 3 Elementen)

	1]	2]	3]	4]	5]	6]	7]	8]
1]	$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$	$[\alpha\,\gamma]$					
2]	$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$	$[\beta\,\gamma]$					
3]	$[\alpha\,\gamma]$	$[\beta\,\gamma]$	$[\gamma\,\gamma]$					
4]				$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$			
5]				$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$			
6]						$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$	$[\alpha\,\gamma]$
7]						$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$	$[\beta\,\gamma]$
8]						$[\alpha\,\gamma]$	$[\beta\,\gamma]$	$[\gamma\,\gamma]$

Aus den Coëfficienten der Netzbedingungsgleichungen und aus den Gewichts-Coëfficienten bildet man die

Übertragungs-Coëfficienten:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1\,[\alpha\,\alpha] + A_2\,[\alpha\,\beta] + A_3\,[\alpha\,\gamma]$$
$$\mathfrak{A}_2 = A_1\,[\alpha\,\beta] + A_2\,[\beta\,\beta] + A_3\,[\beta\,\gamma]$$
. . . .
$$\mathfrak{B}_1 = B_1\,[\alpha\,\alpha] + B_2\,[\alpha\,\beta] + B_3\,[\alpha\,\gamma]$$
$$\mathfrak{B}_2 = B_1\,[\alpha\,\beta] + B_2\,[\beta\,\beta] + B_3\,[\beta\,\gamma]$$
. . . .

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}_1\,(\alpha\,\alpha) + \mathfrak{a}_2\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{a}_3\,(\alpha\,\gamma)$$
$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}_1\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{a}_2\,(\beta\,\beta) + \mathfrak{a}_3\,(\beta\,\gamma)$$
. . . .
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{b}_1\,(\alpha\,\alpha) + \mathfrak{b}_2\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{b}_3\,(\alpha\,\gamma)$$
$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_1\,(\alpha\,\beta) + \mathfrak{b}_2\,(\beta\,\beta) + \mathfrak{b}_3\,(\beta\,\gamma)$$
. . . .

XVI.

oder numeriert:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1\,[1\,.\,1] + A_2\,[1\,.\,2] + A_3\,[1\,.\,3]$$
$$\mathfrak{A}_2 = A_1\,[2\,.\,1] + A_2\,[2\,.\,2] + A_3\,[2\,.\,3]$$
. . . .
$$\mathfrak{B}_1 = B_1\,[1\,.\,1] + B_2\,[1\,.\,2] + B_3\,[1\,.\,3]$$
$$\mathfrak{B}_2 = B_1\,[2\,.\,1] + B_2\,[2\,.\,2] + B_3\,[2\,.\,3]$$
. . . .

Durch Multiplikationen der Coëfficienten $A\ B\ \ldots$ der Bedingungsgleichungen mit den Übertrags-Coëfficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \ldots$ bildet man:

$$[\mathrm{I\,I}] = [A\mathfrak{A}] \qquad [\mathrm{I\,II}] = [A\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}B] \qquad [\mathrm{I\,III}] = [A\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}C]$$
$$[\mathrm{II\,II}] = [A\mathfrak{B}] \qquad [\mathrm{II\,III}] = [B\mathfrak{C}] = [\mathfrak{B}C]$$
$$[\mathrm{III\,III}] = [C\mathfrak{C}]$$

Dieses sind die Coëfficienten der

Wenn man mit den Coëfficienten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ldots$ von XIII. die Hilfsformeln bildet:

$$[1] = \mathfrak{a}_1\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_1\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_1\,\mathrm{III}$$
$$[2] = \mathfrak{a}_2\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_2\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_2\,\mathrm{III}$$
$$[3] = \mathfrak{a}_3\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_3\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_3\,\mathrm{III}$$
$$[4] = \mathfrak{a}_4\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_4\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_4\,\mathrm{III}$$

Xa.

und wenn man diese Ausdrücke in die unten gegebenen Gewichtsgleichungen XV. setzt, so erlangt man die ebenfalls unten mitgeteilten Korrektionsformeln XVI. Diese endlich setzt man in die Bedingungsgleichungen XIII. und erhält damit die

Formeln unseres Buches § 49.—53.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Normalgleichungen:

$[1\,1]k_1 + [1\,II]k_2 + [1\,III]k_3 + w_1 = 0$	$(I\,I)\,I + (I\,II)\,II + (I\,III)\,III - \mathfrak{A} = 0$
$[II\,II]k_2 + [II\,III]k_3 + w_2 = 0$	$(II\,II)\,II + (II\,III)\,III - \mathfrak{B} = 0$
$[III\,III]k_3 + w_3 = 0$	$(III\,III)\,III - \mathfrak{C} = 0$
	XVII.

Diese Normalgleichungen löst man auf, und erhält damit:

die Korrelaten:

$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \ldots$	$I \quad II \quad III \quad \ldots$

Indem man den Bedingungsgleichungen XIII. nach Vertikallinien folgt, bildet man die Formeln für die:

Hilfsgrössen [1] [2] [3]:

$[1] = A_1 k_1 + B_1 k_2 + C_1 k_3 + \ldots$	$[1] = \mathfrak{a}_1 I + \mathfrak{b}_1 II + \mathfrak{c}_1 III + \ldots$
$[2] = A_2 k_1 + B_2 k_2 + C_2 k_3 + \ldots$	$[2] = \mathfrak{a}_2 I + \mathfrak{b}_2 II + \mathfrak{c}_2 III + \ldots$
$[3] = A_3 k_1 + B_3 k_2 + C_3 k_3 + \ldots$	$[3] = \mathfrak{a}_3 I + \mathfrak{b}_3 II + \mathfrak{c}_3 III + \ldots$
$[4] = A_4 k_1 + B_4 k_2 + C_4 k_3 + \ldots$	$[4] = \mathfrak{a}_4 I + \mathfrak{b}_4 II + \mathfrak{c}_4 III + \ldots$
. . . .	. . . .
	Xa.

Nachdem die Korrelaten und die Hilfsgrössen ausgerechnet sind, hat man die:

Korrektionsformeln:

$(1) = \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 + \mathfrak{C}_1 k_3$	$(1) = \mathfrak{A}_1 I + \mathfrak{B}_1 II + \mathfrak{C}_1 III$
$(2) = \mathfrak{A}_2 k_1 + \mathfrak{B}_2 k_2 + \mathfrak{C}_2 k_3$	$(2) = \mathfrak{A}_2 I + \mathfrak{B}_2 II + \mathfrak{C}_2 III$
$(3) = \mathfrak{A}_3 k_1 + \mathfrak{B}_3 k_2 + \mathfrak{C}_3 k_3$	$(3) = \mathfrak{A}_3 I + \mathfrak{B}_3 II + \mathfrak{C}_3 III$
	XVI.

oder zur Kontrole:

Gewichtsgleichungen:

$(1) = [1][\alpha\alpha] + [2][\alpha\beta] + [3][\alpha\gamma]$	$(1) = (\alpha\alpha)[1] + (\alpha\beta)[2] + (\alpha\gamma)[3]$
$(2) = [1][\alpha\beta] + [2][\beta\beta] + [3][\beta\gamma]$	$(2) = (\alpha\beta)[1] + (\beta\beta)[2] + (\beta\gamma)[3]$
$(3) = [1][\alpha\gamma] + [2][\beta\gamma] + [3][\gamma\gamma]$	$(3) = (\alpha\gamma)[1] + (\beta\gamma)[2] + (\gamma\gamma)[3]$
	XV.

Damit ist die Netzausgleichung vollendet. Für die Quadratsumme der bei der Netzausgleichung übrig bleibenden Fehler hat man verschiedene Formeln:

$[v''v''] = (1)[1] + (2)[2] + (3)[3]$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{B}] = (1)[1] + (2)[2] + (3)[3]$ (XVIII)
$[v''v''] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 - w_3 k_3 = -[wk]$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\,I + \mathfrak{B}\,II + \mathfrak{C}\,III$ (XIX)
$[v''v''] = \frac{w_1^2}{[1\,1]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{[II\,II . 1]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{[III\,III . 2]}$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{B}] = \frac{\mathfrak{A}^2}{(I\,I)} + \frac{(\mathfrak{B} . 1)^2}{(II\,II . 1)} + \frac{(\mathfrak{C} . 2)^2}{(III\,III . 2)}$ (XX)

Hieraus berechnet sich der mittlere Gewichtseinheitsfehler für die Netzausgleichung allein:

$m_2 = \sqrt{\frac{[v''v'']}{r}}$	$\mu_2 = \sqrt{\frac{(\mathfrak{B}\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})}}$

Formeln unseres Buches § 49.—53.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24:

Der mittlere *Gewichtseinheitsfehler* der Gesamtausgleichung ist:

$$m = \sqrt{\frac{[v'v'] + [v''v'']}{[n] - [u] - [s] + r}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{(VV) + (V'V') + (V''V'') + (\mathfrak{B}\mathfrak{B})}{(m) - (A, B, C) - (x) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})}}$$

XXI. und XXII.

Wenn man das Gewicht P einer Funktion der ausgeglichenen Elemente bestimmen will, so bringt man diese Funktion, wenn sie nicht an und für sich schon linear ist, durch Differentiieren in die Form:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = f_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = l_1 \qquad \frac{\partial F}{\partial B} = l_2 \qquad \frac{\partial F}{\partial C} = l_3$$

Mit diesen neuen Coëfficienten f bzw. l und den schon früher bekannten Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. bildet man:

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] f_1 + [\alpha\beta] f_2 + [\alpha\gamma] f_3 &= q_1 \\ [\alpha\beta] f_1 + [\beta\beta] f_2 + [\beta\gamma] f_3 &= q_2 \\ [\alpha\gamma] f_1 + [\beta\gamma] f_2 + [\gamma\gamma] f_3 &= q_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\alpha) l_1 + (\alpha\beta) l_2 + (\alpha\gamma) l_3 &= q_1 \\ (\alpha\beta) l_1 + (\beta\beta) l_2 + (\beta\gamma) l_3 &= q_2 \\ (\alpha\gamma) l_1 + (\beta\gamma) l_2 + (\gamma\gamma) l_3 &= q_3 \end{aligned}$$

XXVIII.

Nachdem die q ausgerechnet sind, findet man den ersten Teil der gesuchten Gewichtsreciproke:

$$\frac{1}{P_0} = [fq] \qquad\qquad \frac{1}{P_0} = (lq)$$

Weiter berechnet man Ersatzglieder für die Absolutglieder der Bedingungsgleichungen, und zwar hat man dafür zweierlei Formeln:

Ersatzglieder:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A}f] &\text{ oder } = [Aq] \\ [\mathfrak{B}f] &\text{ » } = [Bq] \\ [\mathfrak{C}f] &\text{ » } = [Cq] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}l) &\text{ oder } = (\mathfrak{a}q) \\ (\mathfrak{B}l) &\text{ » } = (\mathfrak{b}q) \\ (\mathfrak{C}l) &\text{ » } = (\mathfrak{c}q) \end{aligned}$$

(Seite 20.)

Diese Ersatzglieder setzt man an Stelle der Absolutglieder w_1 w_2 w_3 bzw. $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ der Normalgleichungen XVII, und findet mit Zuziehung des schon vorher berechneten $[fq]$ durch allmähliche Elimination in üblicher Weise:

$$\frac{1}{P} = [qf] - \frac{[\mathfrak{A}f]^2}{[I\,I]} - \frac{[\mathfrak{B}f.1]^2}{[II\,II.1]} - \frac{[\mathfrak{C}f.2]^2}{[III\,III.2]}$$

$$\frac{1}{P} = (lq) - \frac{(\mathfrak{A}l)^2}{[I\,I]} - \frac{(\mathfrak{B}l.1)^2}{[II\,II.1]} - \frac{(\mathfrak{C}l.2)^2}{[III\,III.2]}$$

XXIX.

Mittlerer Fehler der Funktion F:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} \qquad\qquad M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}$$

Kapitel II.

Trigonometrische Punkt-Einschaltung.

§ 55. Beziehung zwischen der Azimut-Korrektion und den Coordinaten-Korrektionen.

Fig. 1.
Azimut-Änderung $d\varphi$.

Wenn $X_1\,Y_1$ die Coordinaten eines Punktes P_1 sind, und $X\,Y$ die Coordinaten eines zweiten Punktes P, so bestehen die Gleichungen:

$$Y - Y_1 = P_1\,P \sin(P_1\,P) \text{ und } X - X_1 = P_1\,P \cos(P_1\,P) \quad (1)$$

$$tang\,(P_1\,P) = \frac{Y - Y_1}{X - X_1} \quad (2)$$

Wir schreiben zur Abkürzung: Entfernung $P_1\,P = r$ und Azimut $(P_1\,P) = \varphi$, und haben somit:

$$Y - Y_1 = r \sin\varphi \qquad X - X_1 = r \cos\varphi \quad (3)$$

$$tang\,\varphi = \frac{Y - Y_1}{X - X_1} \quad \text{oder} \quad \varphi = arc\,tang\,\frac{Y - Y_1}{X - X_1} \quad (4)$$

Wenn man bestimmen will, um wie viel sich das Azimut φ ändert, wenn die Coordinaten $X\,Y$ sich um kleine Beträge $d\,X$ und $d\,Y$ ändern, so hat man die Gleichung (4) zu differentiieren:

$$d\varphi = \frac{\partial\, arc\,tang}{\partial\, X}\,d\,X + \frac{\partial\, arc\,tang}{\partial\, Y}\,d\,Y$$

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y - Y_1}{X - X_1}\right)^2}\left(-\frac{Y - Y_1}{(X - X_1)^2}\right)d\,X + \frac{1}{1 + \left(\frac{Y - Y_1}{X - X_1}\right)^2}\left(\frac{1}{X - X_1}\right)d\,Y \quad (5)$$

Da $(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 = r^2$ ist, so giebt dieses:

$$d\,\varphi = -\frac{Y - Y_1}{r^2}\,d\,X + \frac{X - X_1}{r^2}\,d\,Y \quad (6)$$

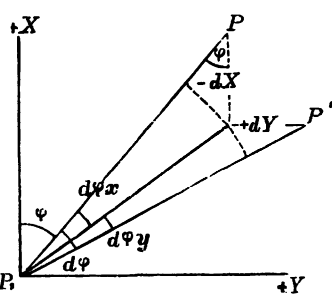


Fig. 2.
Geometrische Darstellung der Gleichung (7).

In dieser Form ist die Gleichung oft brauchbar, in der Mehrzahl der Anwendungen ist es aber besser, wieder das Azimut φ nach (3) einzuführen, wornach ist:

$$d\,\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r}\,d\,X + \frac{\cos\varphi}{r}\,d\,Y \quad (7)$$

Man kann diese wichtige Gleichung durch Fig. 2. geometrisch deuten, indem man $d\,\varphi$ in zwei Teile $d\,\varphi_x$ und $d\,\varphi_y$ zerlegt, und den Punkt P nicht auf *ein*mal nach P' rücken lässt, sondern auf dem Umweg über die beiden Katheten $d\,X$ und $d\,Y$ eines rechtwinkligen Dreiecks. Dabei muss $d\,X$ im Sinne von Fig. 2. negativ sein, wie es auch eingeschrieben ist. Denkt man sich weiter die beiden Katheten $d\,X$ und $d\,Y$ rechtwinklich zu der Strahlenrichtung φ projiziert, so bekommt man:

$$d\,\varphi_x = \frac{(-d\,X)\sin\varphi}{r} \qquad d\,\varphi_y = \frac{d\,Y\cos\varphi}{r} \quad (8)$$

woraus $d\,\varphi = d\,\varphi_x + d\,\varphi_y$ ebenso hervorgeht, wie in (7) angegeben ist.

Diese geometrische Begründung der Gleichung (7) ist anschaulicher als die rein analytische Differentiierung bei (5); wir haben aber die Differentiierung an die Spitze unserer Betrachtung gestellt, weil sie allgemeiner gültig ist, und die Erörterung verschiedener Vorzeichenfragen, die sich an die Gleichungen (8) knüpfen würden, überflüssig macht.

Gelegentlich bemerken wir, dass die Differentiierung der Gleichung (4) auch bequem in logarithmischer Form gemacht werden kann:

$$log\, tang\, \varphi = log\, (Y - Y_1) - log\, (X - X_1)$$

$$\frac{1}{tang\, \varphi} \frac{d\varphi}{cos^2 \varphi} = \frac{dY}{Y - Y_1} - \frac{dX}{X - X_1}$$

$$d\varphi = \frac{sin\, \varphi}{Y - Y_1} cos\, \varphi\, dY - \frac{cos\, \varphi}{X - X_1} sin\, \varphi\, dX$$

$$\frac{sin\, \varphi}{Y - Y_1} = \frac{1}{r} \qquad \frac{cos\, \varphi}{X - X_1} = \frac{1}{r}$$

also:

$$d\varphi = \frac{cos\, \varphi}{r} dY - \frac{sin\, \varphi}{r} dX \tag{7}$$

Dieses ist dieselbe Gleichung wie die frühere (7).

Nachdem wir somit die wichtige Gleichung (7) nun dreifach begründet haben, betrachten wir dieselbe weiter:

Die Gleichung (7) gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass $d\varphi$ in analytischem Mass gemessen ist; wenn dagegen $d\varphi$ in geometrischem Mass gemessen ist, so muss die rechte Seite der Gleichung mit ϱ multipliziert werden. Man hat also für geometrisches Winkelmass:

$$d\varphi = -\frac{sin\, \varphi}{r} \varrho\, dX + \frac{cos\, \varphi}{r} \varrho\, dY \tag{9}$$

Wegen der häufigen Anwendung dieser Formel führen wir ein- für allemal noch kürzere Bezeichnungen ein:

1) Wir nehmen $r = 1000\, R$, d. h. wenn r eine Entfernung in Metern ist, so soll R dieselbe Entfernung in Kilometern bedeuten.

2) Wir setzen $dX = 0{,}1\, x$ und $dY = 0{,}1\, y$, d. h. wenn dX und dY Coordinatenänderungen in Metern bedeuten, so sind x und y dieselben Coordinatenänderungen in Decimetern.

3) Wir setzen ferner:

$$-\frac{sin\, \varphi}{10000} \varrho = \mathfrak{x} = -20{,}6265\, sin\, \varphi \quad \text{und} \quad +\frac{cos\, \varphi}{10000} \varrho = \mathfrak{y} = +20{,}6265\, cos\, \varphi \tag{10}$$

wobei $\varrho = 206\,265$ für Sekunden alter Teilung gilt, und haben damit:

$$\mathfrak{x} = -0{,}1 \frac{sin\, \varphi}{r} \varrho \qquad \mathfrak{y} = +0{,}1 \frac{cos\, \varphi}{r} \varrho \tag{11}$$

$$d\varphi = \frac{\mathfrak{x}}{R} x + \frac{\mathfrak{y}}{R} y \tag{12}$$

Die hier gewählten Masseinheiten, nämlich Sekunden für $d\varphi$, Decimeter für x und y, und Kilometer für R, sind natürlich nicht notwendig so zu nehmen, doch sind für die gewöhnlich vorkommenden Ausgleichungsaufgaben diese Masse sehr bequem, weil dadurch die Coëfficienten und die Absolutglieder der Fehlergleichungen ziemlich gleich gross werden.

Für die Coëfficienten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nach (10) haben wir im Anhang auf S. [8] und [9] eine Hilfstafel berechnet.

Unterscheidung diesseitiger und jenseitiger Punktverschiebung.

Die Gleichung (7) bzw. (9) oder (12) bezieht sich auf die Fig. 1., in welcher P_1 einen Standpunkt, und P einen Zielpunkt bedeuten soll; es ist also dann φ vom Standpunkt zum Zielpunkt gezählt, und die Änderungen $d\,X$ und $d\,Y$ beziehen sich auf den Zielpunkt. Zählt man φ in umgekehrtem Sinn, so geht es in $\varphi \pm 180°$ über; und sowohl $\sin\varphi$ als $\cos\varphi$ ändern ihre Zeichen, weshalb dann auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in (12) mit umgekehrten Zeichen einzusetzen sind. Wenn man nicht nur die Richtung von φ umkehrt, sondern die Coordinatenänderungen $d\,X$ und $d\,Y$ nun auch auf den anderen Punkt bezieht, so kommen zwei Zeichenwechsel zusammen, welche sich wieder aufheben.

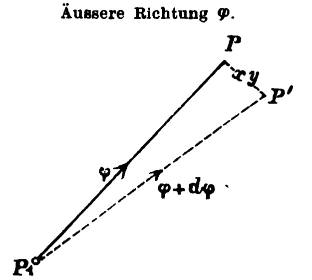
Man kann auch Coordinatenänderungen an *beiden* Punkten annehmen, etwa $x\,y$ an dem einen Punkt, und $x'\,y'$ an dem anderen Punkt, dann werden, bei gleicher Zählung von φ, sich die Differenzen $x - x'$ $y - y'$ in den Fehlergleichungen einstellen.

Alle diese Verhältnisse haben wir in folgender Zusammenstellung berücksichtigt, wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Richtungs-Coëfficienten nach den Formeln (10) oder (11) als Funktion des jeweils beigesetzten Azimuts φ sind (oder nach der Tafel S. [8]—[9] des Anhangs).

Wir wenden dabei sogleich die von der Preussischen Katastervermessung eingeführten Bezeichnungen *Äussere Richtung* und *Innere Richtung* an, indem bei einem neu zu bestimmenden Punkt die Richtung von einem gegebenen Punkt nach dem neuen Punkt eine äussere Richtung heisst, und umgekehrt eine Richtung von dem neuen Punkt nach einem gegebenen Punkt eine innere Richtung. Bei Strahlen, welche zwischen *zwei* neu zu bestimmenden Punkten liegen, wird diese Unterscheidung zweideutig, man kann dann aber immer noch den „diesseitigen“ und „jenseitigen“ Punkt im einzelnen Fall unterscheiden.

Im Folgenden ist r die Entfernung in Metern, R dieselbe Entfernung in Kilometern. Die Exponenten ^{m} oder ^{dm} bezeichnen Mass in Metern oder in Decimetern.

Fig. 3.
Äussere Richtung φ.



Fall I. (Fig. 3.)

Standpunkt P_1 Zielpunkt P bzw. P'

Aussere Richtung φ Differenzen $X' - X = x$ $Y' - Y = y$

$$d\varphi = -\left(\frac{\sin\varphi}{r^m}\,\varrho\right)x^m + \left(\frac{\cos\varphi}{r^m}\,\varrho\right)y^m$$

$$d\varphi = +\left(\frac{\mathfrak{x}}{R^{km}}\right)x^{dm} + \left(\frac{\mathfrak{y}}{R^{km}}\right)y^{dm}$$

Fig. 4.
Innere Richtung φ.

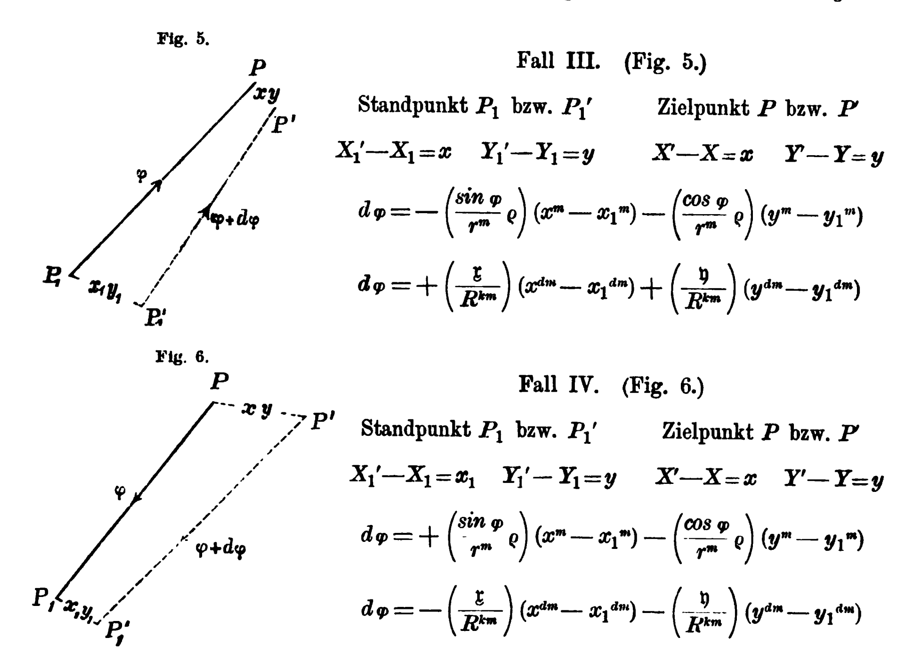
Fall II. (Fig. 4.)

Standpunkt P_1 bzw. P_1' Zielpunkt P

Innere Richtung φ $X_1' - X_1 = x$ $Y_1' - Y_1 = y$

$$d\varphi = +\left(\frac{\sin\varphi}{r^m}\,\varrho\right)x^m - \left(\frac{\cos\varphi}{r^m}\,\varrho\right)y^m$$

$$d\varphi = -\left(\frac{\mathfrak{x}}{R^{km}}\right)x^{dm} - \left(\frac{\mathfrak{y}}{R^{km}}\right)y^{dm}$$



Fall III. (Fig. 5.)

Standpunkt P_1 bzw. P_1' Zielpunkt P bzw. P'

$X_1'-X_1=x \quad Y_1'-Y_1=y \qquad X'-X=x \quad Y'-Y=y$

$$d\varphi = -\left(\frac{\sin\varphi}{r^m}\varrho\right)(x^m - x_1{}^m) - \left(\frac{\cos\varphi}{r^m}\varrho\right)(y^m - y_1{}^m)$$

$$d\varphi = +\left(\frac{\mathfrak{x}}{R^{km}}\right)(x^{dm} - x_1{}^{dm}) + \left(\frac{\mathfrak{y}}{R^{km}}\right)(y^{dm} - y_1{}^{dm})$$

Fall IV. (Fig. 6.)

Standpunkt P_1 bzw. P_1' Zielpunkt P bzw. P'

$X_1'-X_1=x_1 \quad Y_1'-Y_1=y \qquad X'-X=x \quad Y'-Y=y$

$$d\varphi = +\left(\frac{\sin\varphi}{r^m}\varrho\right)(x^m - x_1{}^m) - \left(\frac{\cos\varphi}{r^m}\varrho\right)(y^m - y_1{}^m)$$

$$d\varphi = -\left(\frac{\mathfrak{x}}{R^{km}}\right)(x^{dm} - x_1{}^{dm}) - \left(\frac{\mathfrak{y}}{R^{km}}\right)(y^{dm} - y_1{}^{dm})$$

§ 56. Numerische Ausrechnung der Richtungs-Coëfficienten.

Die im vorigen § 55. behandelten Coëfficienten werden so oft gebraucht, dass es sich wohl lohnt, alle die verschiedenen Mittel, welche man zu ihrer Ausrechnung hat, zu überlegen.

Indem wir diese Coëfficienten mit a und b bezeichnen, haben wir:

$$a_m = -\frac{\sin\varphi}{r}\varrho \qquad b_m = +\frac{\cos\varphi}{r}\varrho \tag{1}$$

Hier ist r in Metern zu setzen, und die zugehörigen Coordinaten-Korrektionen x und y werden ebenfalls in Metern gezählt, weshalb a_m und b_m geschrieben ist.

Oder:
$$a_{dm} = \frac{\mathfrak{x}}{R} \qquad b_{dm} = \frac{\mathfrak{y}}{R} \tag{2}$$

Hier wird R in Kilometern gezählt, und die Coordinaten-Korrektionen werden in Decimetern genommen, daher a_{dm} und b_{dm} geschrieben ist.

Wir wollen als Beispiel nehmen:

$$r = 2700^m \text{ oder } R = 2{,}70^{km} \qquad \varphi = 202^\circ\, 17' \tag{3}$$

Nun kann man jedenfalls die Formeln (1) logarithmisch ausrechnen:

$log\,(-)$	. . . . . . $_n$		
$log\,sin\,\varphi$	9.57885$_n$	$log\,cos\,\varphi$	9.96629$_n$
$Erg.\,log\,r$	6.56864	$Erg.\,log\,r$	6.56864
$log\,\varrho$	5.31443	$log\,\varrho$	5.31443
$log\,a_m$	1.46192$_n$	$log\,b_m$	1.84936$_n$
$a_m =$	$+\,28{,}97$	$b_m =$	$-\,70{,}70$

(4)

Als zweites Hilfsmittel haben wir unsere Tabelle auf S. [8]—[9] des Anhangs.

Man geht in dieselbe ein mit $\varphi = 202{,}3°$, und entnimmt mit flüchtiger Interpolation:

$$\mathfrak{x} = +7{,}83 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}08 \tag{5}$$

Nun wird mit dem Rechenschieber, oder auch unmittelbar, dividiert:

$$a_{dm} = \frac{+7{,}83}{2{,}70} = +2{,}90 \qquad b_{dm} = \frac{-19{,}08}{2{,}70} = -7{,}07 \tag{6}$$

Es giebt noch eine Methode der Berechnung der Coëfficienten a und b, nämlich mit Hilfe der logarithmischen Differenzen.

Hat man
$$tang\, \varphi = \frac{Y - Y_1}{X - X_1},$$
so ist:
$$\log tang\, \varphi = \log (Y - Y_1) - \log (X - X_1)$$
$$d \log tang\, \varphi = d \log (Y - Y_1) - d \log (X - X_1) \tag{7}$$

Wir bezeichnen:

mit $\Delta \log tang\, \varphi$ die Tafeldifferenz für 1″ (8)

$\Delta \log (Y - Y_1)$ „ „ „ $0{,}1^m$

$\Delta \log (X - X_1)$ „ „ „ $0{,}1^m$ (9)

dann ist:
$$d \log tang\, \varphi = \Delta \log tang\, \varphi \, d\varphi$$
$$d \log (Y - Y_1) = \Delta \log (Y - Y_1)\, dY$$
$$d \log (X - X_1) = \Delta \log (X - X_1)\, dX$$

wo $d\varphi$ die Azimutänderung in Sekunden, dY und dX die Coordinatenänderungen in Decimetern sind.

Damit giebt (7):

$$\Delta \log tang\, \varphi\, d\varphi = \Delta \log (Y - Y_1)\, dY - \Delta \log (X - X_1)\, dX \tag{10}$$

$$d\varphi = -\frac{\Delta \log (X - X_1)}{\Delta \log tang\, \varphi} dX + \frac{\Delta \log (Y - Y_1)}{\Delta \log tang\, \varphi} dY$$

also mit den früheren Bezeichnungen für Sekunden und Decimetern (s. o. bei (8) und (9)):

$$a_{dm} = -\frac{\Delta \log (X - X_1)}{\Delta \log tang\, \varphi} \qquad b_{dm} = +\frac{\Delta \log (Y - Y_1)}{\Delta \log tang\, \varphi} \tag{11}$$

Diese Berechnung wird im Anschluss an die Berechnung von φ und r selbst gemacht.

Man habe:

$(Y - Y_1) = -1023{,}85$	$\log (Y - Y_1)$ 3.010226$_n$	für $0{,}1^m$ Diff. $= -43$
$(X - X_1) = -2498{,}37$	$\log (X - X_1)$ 3.397657$_n$	für $0{,}1^m$ Diff. $= -17$
	$\log tang\, \varphi$ 9.612569	für 1″ Diff. $= +6{\cdot}0$
	$\varphi = 202°\ 17'\ 1''$	

Nun wird nach (11):

$$a_{dm} = -\frac{-17}{+6{\cdot}0} = -2{,}8 \qquad b_{dm} = \frac{-43}{6{\cdot}0} = -7{,}2 \tag{12}$$

Diese Werte (12) stimmen mit (6) so nahe überein, als es möglich ist, wenn die Hauptrechnung für φ und r mit 6stelligen Logarithmen geführt wird. Würde man letztere Rechnung 7stellig machen, so würden auch die Coëfficienten a und b um eine Stelle genauer werden.

Dieses führt uns zur Vergleichung der drei Methoden.

Wenn man mit einer Genauigkeit von 2—3 Stellen zufrieden ist, so ist die Methode (5) und (6) mit der Hilfstafel für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ (Anhang S. [8]—[9]) die beste. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Divisionen mit R mit dem Rechenschieber gemacht werden, was um so mehr am Platz ist, als wir die ganze übrige Ausgleichung ebenfalls mit dem Rechenschieber ausgeführt denken.

Zu der Tabelle sei noch besonders bemerkt: Obgleich die Zahlenwerte $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in allen 4 Quadranten mit verschiedenen Vorzeichen und in verschiedener Reihenfolge wiederkehren, sind doch die 4 Quadranten besonders behandelt, weil die Vermeidung von Zeichenfehlern dadurch gesichert wird, denn die Sicherheit richtiger Vorzeichen verursacht bei dieser Coëfficientenberechnung oft mehr Mühe als die Berechnung selbst.

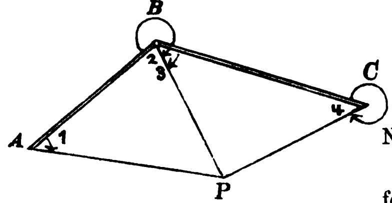
Reicht die Genauigkeit der Tabelle und des Rechenschiebers nicht aus, so kann man nach den strengen Formeln (1) (Zahlenbeispiel (4)) immer so genau rechnen als man will.

Die Methode der logarithmischen Differenzen (Zahlenbeispiel (12)) halten wir wegen verschiedener Nebenumstände nicht für bequem.

§ 57. Vorwärtseinschneiden mit 4 Winkeln.

Dieses einfache Beispiel soll zur Einführung in die Coordinatenausgleichung dienen (Fig. 7.).

Fig. 7.
Vorwärtseinschneiden des Punktes P mit 4 Winkeln 1. 2. 3. 4.



Massstab 1 : 200 000.

Es sind die Coordinaten von 3 Punkten $A\ B\ C$ gegeben, denen wir sofort auch Näherungs-Coordinaten des neuen Punktes P zusetzen:

Punkt	Y	X	
A	+ 36 479,40	+ 83 239,50	
B	+ 39 554,90	+ 85 967,20	(1)
C	+ 44 904,30	+ 84 032,50	
Nähg.(P),	(Y) = + 41 316,18	(X) = + 82 506,95)	

Diese Coordinaten von $A\ B\ C$ werden als fehlerfrei eingeführt, wie immer im Folgenden, sofern nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist.

Zur Bestimmung des Punktes P sind folgende 4 Winkel gleich genau, unabhängig gemessen:

Standpunkt A.	Standpunkt B.	Standpunkt C.	
$BAP = 1. = 50°\,10'\,49''$	$ABP = 2. = 284°\,35'\,51''$	$BCP = 4. = 317°\,4'\,49''$	(2)
	$CBP = 3. = \ \ 83\ \ \ 8\ \ 44$		

Diese Winkel sind konsequent so bezeichnet, dass der linke Strahl nach einem gegebenen Punkt, und der rechte Strahl nach dem zu bestimmenden Punkt gerichtet ist. Dadurch werden alle Zweifel über die Vorzeichen am besten beseitigt.

Im Punkt B sind *zwei* von einander ganz unabhängige Winkel gemessen, welche daher auch *zwei* unabhängige Messungsstrahlen BP liefern, so dass der Strahl BP in Fig. 1. doppelt zu denken ist.

Einführung von Näherungs-Coordinaten.

Die erste Rechenarbeit besteht darin, dass man auf irgend welchem Wege sich Näherungswerte der Coordinaten XY des zu bestimmenden Punktes P verschafft. Im vorliegenden Fall könnte man z. B. die Winkel 1. und 2. auswählen, und damit $(X)\,(Y)$ berechnen. Häufig hat man auch Näherungs-Coordinaten aus älteren Berechnungen zur Verfügung. Wir benützen Näherungswerte, welche weder der Auswahl 1. und 2., noch einer anderen Auswahl genau entsprechen, womit zugleich gezeigt ist, dass es ganz gleichgültig ist, auf welchem Wege die Näherungswerte erhalten sind. Wir nehmen die Näherungswerte, welche, mit der Bezeichnung (P), der Übersichtlichkeit wegen, schon oben bei (1) beigesetzt wurden.

Die Bezeichnung (P), d. h. P in runder Klammer, entspricht auch der Bezeichnung in Fig. 8.; wir wollen überhaupt alle auf die Näherungsannahmen bezüglichen Grössen durch (...) bezeichnen.

Diese Bezeichnungsart wenden wir sofort auch auf die Azimutberechnung an, welche als zweite Rechenarbeit auftritt, wobei alle ursprünglich genau gegebenen, sowie auch die später ausgeglichenen Azimute mit [...], z. B. $[AB]$,*) bezeichnet werden sollen, dagegen die auf die Näherungscoordinaten bezüglichen Azimute mit (...), z. B. (AP).

Man hat mittelst der Coordinaten der gegebenen Punkte und der näherungsweise angenommenen Coordinaten des zu bestimmenden Punktes die Azimute aller Strahlen zu berechnen, welche bei den Winkelmessungen als Ziellinien gedient haben.

Diese Azimutberechnung ist der umständlichste Teil der ganzen Arbeit, um so mehr, als Doppelrechnung unbedingt nötig ist, denn ein Azimutfehler würde erst am Schluss, oder, wenn man keine Proben macht, überhaupt nicht entdeckt werden.

Gleichzeitig mit diesen Azimutberechnungen kann man auch die Entfernungen zwischen den gegebenen Punkten und dem zu bestimmenden Punkt berechnen; doch braucht man diese Entfernungen nur genähert, so dass man sie auch aus einem Übersichtsnetz der Triangulierung abstechen kann. In unserem Fall sind die Resultate:

$$[AB] = 48^\circ\,25'\,47'' \qquad\qquad [CB] = 289^\circ\,53'\,0'' \qquad (2)$$
$$(AP) = 98^\circ\,36'\,44'' \qquad (BP) = 153^\circ\,1'\,26'' \qquad (CP) = 246^\circ\,57'\,59'' \qquad (3)$$
$$AP = 4{,}89^{km} \qquad BP = 3{,}88^{km} \qquad CP = 3{,}90^{km} \qquad (4)$$

Aus diesen Azimuten kann man die 4 Winkel, welche gemessen sind, rückwärts berechnen, und die Berechnung mit den Messungen 1. 2. 3. 4. selbst vergleichen:

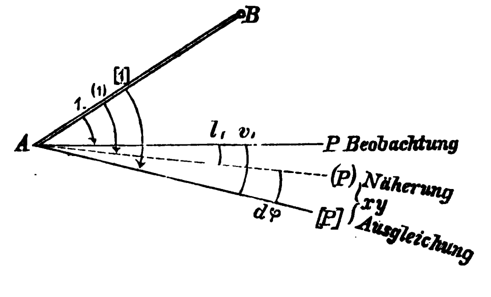
	(513°)		(606°)	
$(AP) = 98^\circ\,36'\,44''$	$(BP) = 153^\circ\,1'\,26''$	$(BP) = 153^\circ\,1'\,26''$	$(CP) = 246^\circ\,57'\,59''$	
$[AB] = 48^\circ\,25'\,47''$	$[BA] = 228^\circ\,25'\,47''$	$[BC] = 109^\circ\,53'\,0''$	$[CB] = 289^\circ\,53'\,0''$	
$(1) = 50^\circ\,10'\,57''$	$(2) = 284^\circ\,35'\,39''$	$(3) = 43^\circ\,8'\,26''$	$(4) = 317^\circ\,4'\,59''$	(5)
$1. = 50^\circ\,10'\,49''$	$2. = 284^\circ\,35'\,51''$	$3. = 43^\circ\,8'\,44''$	$4. = 317^\circ\,4'\,49''$	
$l_1 = +8''$	$l_2 = -12''$	$l_3 = -18''$	$l_4 = +10''$	

Diese Werte l sind die Absolutglieder der Fehlergleichungen, zu denen wir jetzt übergehen.

In Fig. 8. ist der Standpunkt A mit allen von ihm ausgehenden Strahlen besonders gezeichnet. Von A geht zunächst der feste Strahl AB aus, und dann *drei* weitere Strahlen, nämlich:

1) der Strahl AP mit dem gemessenen Winkel 1.;
2) der Strahl $A(P)$ nach dem Näherungspunkt (P), mit dem Näherungswinkel (1);
3) der Strahl $A[P]$ nach dem ausgeglichenen Punkt $[P]$, mit dem ausgeglichenen Winkel [1].

Fig. 8.
Bestimmung der Fehlergleichung für den Winkel 1. in A.



*) Der Umstand, dass die eckige Klammer [...] sonst zur Summenbezeichnung dient, kann zu keiner Verwechslung führen. Der Sicherheit wegen stellen wir jedoch die durch Klammern auszudrückenden Bezeichnungen hier besonders zusammen:

Bezeichnet man die endgültige Verbesserung des gemessenen Winkels 1. mit v_1, so ist nach Fig. 2.:

$$v_1 = [1] - 1 \quad \text{oder} \quad = [1] - (1) + (1) - 1. \tag{6}$$

Es ist aber:

$$[1] - (1) = [AP] - (AP) = d\varphi \text{ und } (1) - 1. = l_1 \tag{7}$$

d. h. l_1 ist der bereits bei (5) berechnete Näherungswiderspruch $+8''$, und für die Azimutdifferenz $d\varphi$ hat man nach § 55. und § 56.:

$$d\varphi = [AP] - (AP) = ax + by \tag{8}$$

wo a und b die in § 55. und § 56. ausführlichst erörterten Coëfficienten, und x und y die Coordinatenkorrektionen für die Näherung (P) sind.

Die Berechnung der Coëfficienten a und b machen wir mit der Hilfstafel S. [8]—[9] des Anhangs; und um zu zeigen, mit wie wenig Ziffern man bei solchen kleinen Ausgleichungen ausreichen kann, wollen wir dabei die Azimute nur auf 1° genau benützen.

Strahl	Azimut φ	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	R	$a = \frac{\mathfrak{x}}{R}$	$b = \frac{\mathfrak{y}}{R}$
AP	99°	— 20,4	— 3,2	4,89^{km}	— 4,2	— 0,7
BP	153°	— 9,4	— 18,4	3,88	— 2,4	— 4,7
CP	247°	+ 19,0	— 8,1	3,90	+ 4,9	— 2,1

(9)

Man hat also, mit Zuziehung der Absolutglieder in (5), nun die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -4{,}2\,x - 0{,}7\,y + 8'' \\ v_2 &= -2{,}4\,x - 4{,}7\,y - 12'' \\ v_3 &= -2{,}4\,x - 4{,}7\,y - 18'' \\ v_4 &= +4{,}9\,x - 2{,}1\,y + 10'' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wenn man die Coëfficienten a und b genauer nach (1) § 56. S. 134 berechnet, bekommt man kleine Abweichungen; wir haben aber die erste Rechnung, welche hiernach ein wenig unrichtig ist, beibehalten, um zu zeigen, dass die Schlussprobe dennoch stimmt, dass also solche kleine Abweichungen hier unerheblich sind.

Nachdem die Absolutglieder l und die Coëfficienten a und b berechnet sind, folgt die Berechnung der Summen-Coëfficienten:

Winkel	a	b	l	a^2	b^2	l^2	ab	al	bl
1.	—4,2	—0,7	+ 8	17,6	0,5	64	+ 2,9	—33,6	— 5,6
2.	—2,4	—4,7	—12	5,8	22,1	144	+11,3	+ 28,8	+ 56,4
3.	—2,4	—4,7	—18	5,8	22,1	324	+11,3	+ 43,2	+ 84,6
4.	+4,9	—2,1	+10	24,0	4,4	100	—10,3	+ 49,0	— 21,0
				53,2	49,1	632	+25,5—10,3	+121,0—33,6	+141,0—26,6
							+ 15,2	+ 87,4	+ 114,4
				$[aa]$	$[bb]$	$[ll]$	$[ab]$	$[al]$	$[bl]$

(11)

	Gemessen:	Näherung:	Ausgleichung:
Einzelne Winkel:	1. 2. 3. . . .	(1) (2) (3) . . .	[1] [2] [3] . . .
Azimute mit zwei Buchstaben bezeichnet:		(AP) (BP) . . .	$[AP]$ $[BP]$ . . .
Azimut durch einen Buchstaben bezeichnet:		(φ)	$[\varphi]$

Auch der Umstand, dass wir unsere Gleichungs-Nummern ebenfalls mit (1) (2) (3) . . . bezeichnen, kann dem Sinne nach nie zu einer Verwechslung führen.

Wenn man nur die Ausgleichung selbst, ohne Fehlerberechnung, haben will, so braucht man das Glied $[l\,l]$ nicht, und dann kann man die Formeln für x und y nach (4) § 13. S. 35 zur Hand nehmen, nämlich:

$$y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l]-[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]} \qquad x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l]-[a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]} \tag{12}$$

Die Einsetzung der Coëfficienten (11) in diese Formeln (12) giebt:

$$y = -\frac{4758}{2381} = -2{,}00^{dm} \qquad x = -\frac{2552}{2381} = -1{,}07^{dm} \tag{13}$$

Nun kann man das Resultat zusammensetzen:

Näherung nach (1) . . .	$(Y) = +41\,316{,}18^m$	$(X) = +82\,506{,}95^m$
Verbesserungen nach (13) .	$y = \quad -0{,}20^m$	$x = \quad -0{,}11^m$
Resultat	$Y = +41\,315{,}98^m$	$X = +82\,506{,}84^m$ (14)

§ 57a. Genauigkeits- und Kontrol-Rechnung zu § 57.

Die soeben vollendete Ausgleichung mit dem Resultat (14) entbehrt noch der Berechnung mittlerer Fehler und der Rechnungsproben.

Hiezu nehmen wir auch die Bestimmung von y und x selbst nochmals vor, und zwar nun nach dem Schema von § 20. S. 48. Es wird sich nach wenigen Versuchen jedem Rechner bestätigen, dass jenes Schema, mit dem Rechenschieber, die Auflösung nach y und x samt der Gewichts- und Fehlerquadratsummen-Berechnung *rascher* giebt, als die unmittelbare Einsetzung in die Formeln (12) § 57. (s. o.) für y und x. Wir erhalten auf diese Weise:

a	b	l
+53,2	+15,2	+87,4
	+49,1	+114,4
	−4,4	−25,0
		+632
		−144
	+44,7	+89,4
$y = -\frac{89{,}4}{44{,}7}$		+488
$= -2{,}0^{dm}$		−180
$y = -0{,}20^m$		+308
$p_y = 44{,}7$		

b	a	l	
+49,1	+15,2	+114,4	
	+53,2	+87,4	
	−4,7	−35,2	
		+632	
		−265	
	+48,5	+52,2	
$x = -\frac{52{,}2}{48{,}5}$		+367	
$= -1{,}1^{dm}$		−56	
$x = -0{,}11^m$		+311	(1)
$p_x = 48{,}5$			

Zusammensetzung:

Näherung:	+41 316,18	+82 506,95
Verbesserungen:	−0,20	−0,11
Resultat:	$Y = +41\,315{,}98$	$X = +82\,506{,}84$ (2)

ebenso wie (14) § 57. (s. o.)

Damit ist zwar die gestellte Aufgabe gelöst, indessen ist es noch von Interesse, die Fehlerverteilung zu untersuchen, und eine durchgreifende Rechenprobe zu gewinnen. Es geschieht dieses durch Berechnung aller Azimute mit den endgültigen Coordinaten (2). Da man diese Azimute (nebst den Entfernungen) für weitere Be-

rechnungen gewöhnlich ohnehin braucht, so ist dieser Rechnungsabschluss ohne besondere Gründe nicht zu unterlassen. Man berechnet die Korrektionen v_1 v_2 v_3 v_4 in gleicher Weise wie früher die l_1 l_2 l_3 l_4, es besteht nur der Unterschied, dass alle Azimute nicht mehr genähert, sondern endgültig sind. Dieses giebt:

Ausgeglichen:

$[AP] = 98°\,36'\,50''$	$[BP] = 153°\ 1'\,38''$	$[BP] = 153°\ 1'\,38''$	$[CP] = 246°\,57'\,58''$	
$[AB] = 48\ \ 25\ \ 47$	$[BA] = 228\ \ 25\ \ 47$	$[BC] = 109\ \ 53\ \ 0$	$[CB] = 289\ \ 53\ \ 0$	
$[1] = 50\ \ 11\ \ 3$	$[2] = 284\ \ 35\ \ 51$	$[3] = 43\ \ 8\ \ 38$	$(4) = 317\ \ 4\ \ 58$	
$1. = 50\ \ 10\ \ 49$	$2. = 284\ \ 35\ \ 51$	$3. = 43\ \ 8\ \ 44$	$4. = 317\ \ 4\ \ 49$	
$v_1 = +14''$	$v_2 = 0''$	$v_3 = -6''$	$v_4 = +9''$	(3)

$$[v\,v] = 14^2 + 0^2 + 6^2 + 9^2$$
$$= 196 + 0 + 36 + 81 = 313 \tag{4}$$

Dieses stimmt hinreichend mit $[l\,l\,.\,2] = 308$ oder 311 bei (1).

Mittlerer Fehler eines Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{313}{4-2}} = \pm 12{,}5'' \tag{5}$$

Mittlerer Fehler von y und von x:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{12{,}5}{\sqrt{44{,}7}} = 1{,}9^{dm} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{12{,}5}{\sqrt{48{,}5}} = \pm 1{,}8^{dm}$$

Gesamtresultat: $Y = +41\,315{,}98^m \pm 0{,}19^m$ $\quad X = +82\,506{,}84^m \pm 0{,}18^m$ (6)

Damit kann man sich unbedingt beruhigen; der Vollständigkeit wegen wollen wir aber auch noch die Probe mit den Fehlergleichungen machen, welche etwa dann praktisch nützlich wird, wenn die Probe $[v\,v] = [l\,l\,.\,2]$ nicht stimmen sollte, und man genötigt ist, den Fehler zu suchen.

Die Fehlergleichungen (10) § 57. S. 138, mit Einsetzung der x und y, geben:

$x = -1{,}1 \quad y = -2{,}0$

$$\begin{aligned}
v_1 &= -4{,}2\,x - 0{,}7\,y + 8'' & v_1 &= +4{,}6 + 1{,}4 + 8{,}0 = +14{,}0''\\
v_2 &= -2{,}4\,x - 4{,}7\,y - 12 & v_2 &= +2{,}6 + 9{,}4 - 12{,}0 = 0{,}0\\
v_3 &= -2{,}4\,x - 4{,}7\,y - 18 & v_3 &= +2{,}6 + 9{,}4 - 18{,}0 = -6{,}0\\
v_4 &= +4{,}9\,x - 2{,}1\,y + 10 & v_4 &= -5{,}4 + 4{,}2 + 10{,}0 = +8{,}8
\end{aligned}$$

Dieses stimmt so nahe mit (3) überein, als zu erwarten war.

Damit ist die ganze Ausgleichung unbedingt abgeschlossen.

§ 58. Pothenotische Ausgleichung für Winkelmessungen *).

In dem Badischen Coordinaten-System, dessen $+X$ Achse nach Süden, und dessen $+Y$ Achse nach Westen gerichtet ist, sind folgende 5 Punkte durch ihre Coordinaten gegeben:

*) Abgesehen von dem praktischen Fall von einzelnen Repetitions-Winkelmessungen, in welchem nach Winkeln ausgeglichen werden muss, empfehlen wir eine solche Pothenotische *Winkel*-Ausgleichung deswegen zum ersten Studium, weil sie theoretisch übersichtlicher ist als die Richtungs-Ausgleichung mit einer dritten Unbekannten z.

Die praktisch allerdings viel wichtigere Pothenotische *Richtungs*-Ausgleichung, welche wir in § 60. behandeln werden, wird dadurch angemessen vorbereitet.

	Punkt	y	x	
P_0	St. Michael Turm	$-7\,407{,}582^m$	$+44\,332{,}254^m$	
P_1	Durlacher Warte Signalkugel	$-1\,892{,}355$	$+54\,452{,}145$	
P_2	Ettlingen Rathaus	$+3\,798{,}300$	$+60\,598{,}479$	(1)
P_3	Bulach südl. Turm	$+5\,783{,}457$	$+55\,397{,}802$	
P_4	Daxlanden Turm	$+9\,738{,}459$	$+53\,469{,}087$	

Auf dem Observatorium P des Polytechnikums in Karlsruhe wurden folgende 4 Winkel unabhängig gemessen:

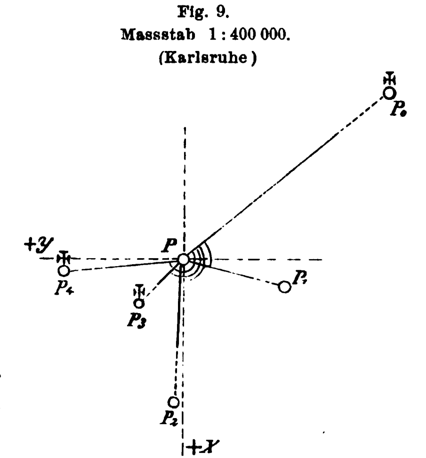
$$\left.\begin{array}{l} P_0 PP_1 = 1. = \;\; 53^\circ\, 11'\;\, 21{,}0'' \\ P_0 PP_2 = 2. = 130 \;\; 48 \;\;\; 5{,}0 \\ P_0 PP_3 = 3. = 172 \;\; 39 \;\; 17{,}5 \\ P_0 PP_4 = 4. = 214 \;\; 43 \;\; 17{,}8 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Bei allen diesen 4 Winkeln wurde St. Michael, P_0, als linkseitiger Zielpunkt genommen. Die Messungen wurden nach der Repetitionsmethode gemacht; keine Einstellung oder Ablesung eines Winkels wird für einen andern Winkel wieder benützt, d. h. die 4 gemessenen Winkel sind gänzlich von einander unabhängig.

Der Umstand, dass wir hiebei für alle Winkel *einen* gemeinschaftlichen Anfangsstrahl PP_0 genommen haben, erleichtert die Übersichtlichkeit, ist aber für solche Winkelausgleichung nicht wesentlich.

Man könnte auch bei 5 Strahlen mehr als 4 Winkel messen, und hätte dann dieselben alle einzeln in die Ausgleichung einzuführen.

Fig. 9.
Massstab 1 : 400 000.
(Karlsruhe)



Durch eine direkte pothenotische Berechnung wurden folgende Näherungswerte der Coordinaten von P erhalten:

$$(P) \quad (Y) = +3508{,}38 \qquad (X) = +53046{,}42 \text{ (Näherung)} \qquad (3)$$

Mit diesen Näherungswerten wurden alle Azimute und gleichzeitig auch die Entfernungen berechnet:

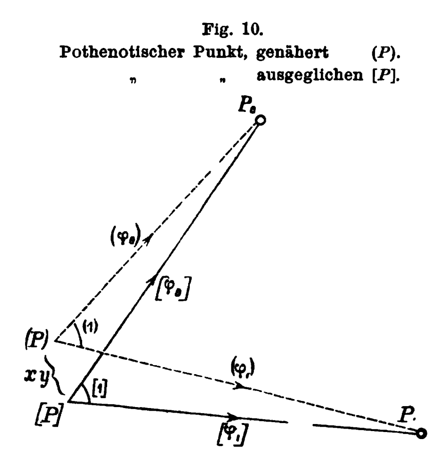
$$\left.\begin{array}{llll} (\varphi_0) = (PP_0) = 231^\circ 23'\, 59{,}2'' & \log PP_0 = 4.145123 & R_0 = 13{,}97 \text{ Kilometer} \\ (\varphi_1) = (PP_1) = 284 \;\; 35 \;\; 22{,}0 & \log PP_1 = 3.746687 & R_1 = \;\; 5{,}58 \quad " \\ (\varphi_2) = (PP_2) = \;\;\; 2 \;\; 11 \;\; 54{,}5 & \log PP_2 = 3.878385 & R_2 = \;\; 7{,}56 \quad " \\ (\varphi_3) = (PP_3) = \;\; 44 \;\;\; 3 \;\; 18{,}3 & \log PP_3 = 3.514793 & R_3 = \;\; 3{,}27 \quad " \\ (\varphi_4) = (PP_4) = \;\; 86 \;\;\; 7 \;\;\; 7{,}8 & \log PP_4 = 3.795491 & R_4 = \;\; 6{,}24 \quad " \end{array}\right\} (4)$$

Es kommt nun darauf an, die Fehlergleichungen aufzustellen, welche die Form haben:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ v_4 = a_4 x + b_4 y + l_4 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Zur Bestimmung der Coëfficienten a b und der Absolutglieder l betrachten wir die folgende Fig. 10.:

Fig. 10.
Pothenotischer Punkt, genähert (P).
" " ausgeglichen [P].



Es sei (P) der den Näherungs-Coordinaten entsprechende Punkt, [P] der den ausgeglichenen Coordinaten entsprechende Punkt. Allgemein bezieht sich die runde Klammer (...) auf die Näherung, die eckige Klammer [...] auf die Ausgleichung.

Die Verbesserung v_1 des ersten gemessenen Winkels 1. ist:

$$v_1 = [1] - 1. \tag{6}$$

Mit Einschaltung des Näherungswinkels, welcher mit (1) bezeichnet wurde, giebt dieses:

$$v_1 = [1] - (1) + (1) - 1. \tag{7}$$

Die Winkel [1] und (1) müssen als Azimutdifferenzen dargestellt werden:

$$[1] = [\varphi_1] - [\varphi_0] \qquad (1) = (\varphi_1) - (\varphi_0) \tag{8}$$

$$\text{also:} \quad v_1 = [\varphi_1] - (\varphi_1) - ([\varphi_0] - (\varphi_0)) + (1) - 1. \tag{9}$$

Sind x y die Coordinatenkorrektionen für die Verschiebung von (P) nach [P], und $\mathfrak{x}_1$ $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_0$ $\mathfrak{y}_0$ die Coëfficienten nach § 55. und § 56., so wird nach Fig. 4. S. 138:

$$[\varphi_1] - (\varphi_1) = -\frac{\mathfrak{x}_1}{R_1}x - \frac{\mathfrak{y}_1}{R_1}y \qquad [\varphi_0] - (\varphi_0) = -\frac{\mathfrak{x}_0}{R_0}x - \frac{\mathfrak{y}_0}{R_0}y,$$

damit wird (9):

$$v_1 = -\frac{\mathfrak{x}_1}{R_1}x - \frac{\mathfrak{y}_1}{R_1}y - \left(-\frac{\mathfrak{x}_0}{R_0}x - \frac{\mathfrak{y}_0}{R_0}y\right) + (1) - 1. \tag{10}$$

Wenn wir die Coëfficienten von x und y zusammenfassen, und (1) — 1., wie sonst, mit l_1 bezeichnen, so lautet nun die Fehlergleichung:

$$v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \tag{11}$$

Die drei übrigen Fehlergleichungen sind entsprechend, wobei die Coëfficienten folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = -\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{x}_0}{R_0}\right) & b_1 = -\left(\frac{\mathfrak{y}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{y}_0}{R_0}\right) \\ a_2 = -\left(\frac{\mathfrak{x}_2}{R_2} - \frac{\mathfrak{x}_0}{R_0}\right) & b_2 = -\left(\frac{\mathfrak{y}_2}{R_2} - \frac{\mathfrak{y}_0}{R_0}\right) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{12}$$

Die Absolutglieder l haben, wie immer, die Bedeutung:

l = Näherungswinkel — beobachteter Winkel.

Diese Absolutglieder l werden aus den Näherungsazimuten (φ) in (4) und aus den gemessenen Winkeln, welche unter (2) angegeben sind, so zusammengesetzt:

(φ_1) = 284° 35′ 22,0″	(φ_2) = 2° 11′ 54,5″	(φ_3) = 44° 3′ 18,3″	(φ_4) = 86° 7′ 7,8″
(φ_0) = 231 23 59,2	(φ_0) = 231 23 59,2	(φ_0) = 231 23 59,2	(φ_0) = 231 23 59,2
(1) = 53 11 22,8	(2) = 130 47 55,3	(3) = 172 39 19,1	(4) = 214 43 8,6
1. = 53 11 21,0	2. = 130 48 5,0	3. 172 39 17,5	4. = 214 43 17,8
l_1 = + 1,8	l_2 = — 9,7	l_3 = + 1,6	l_4 = — 9,2

Bei Anwendung der Hilfstafeln von S. [8]—[9] des Anhangs gestaltet sich die Rechnung der Coëfficienten a und b so:

Punkt	Azimut	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	R	$\frac{\mathfrak{x}}{R}$	$\frac{\mathfrak{y}}{R}$	Winkel	a	b	l
P_0	231,4°	+ 16,1	— 12,9	13,97	+ 1,15	— 0,92	...	...	...	...
P_1	284,6°	+ 20,0	+ 5,2	5,58	+ 3,58	+ 0,93	1.	— 2,43	— 1,85	+ 1,8
P_2	2,2°	— 0,8	+ 20,6	7,56	— 0,11	+ 2,73	2.	+ 1,26	— 3,65	— 9,7
P_3	44,1°	— 14,3	+ 14,8	3,27	— 4,38	+ 4,53	3.	+ 5,53	— 5,45	+ 1,6
P_4	86,1°	— 20,6	+ 1,4	6,24	— 3,30	+ 0,22	4.	+ 4,45	— 1,14	— 9,2

Durch Quadrieren und Multiplizieren der a, b und l bildet man die Coëfficienten der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll}[a a] = +57{,}9 & [a b] = -35{,}3 & [a l] = -\ 48{,}7 \\ & [b b] = +47{,}7 & [b l] = +\ 33{,}8 \\ & & [l l] = +184{,}5\end{array}\right\} \qquad (13)$$

Wenn man nun nur die Ausgleichung selbst haben will, so kann man diese Coëfficienten in die Ausdrücke für y und x, (4) § 13. S. 35, einsetzen, und damit erhält man:

$$y = -\frac{238}{1516} = -0{,}157^{dm} \qquad x = -\frac{-1130}{1516} = +0{,}7454$$

Näherung (P)	$+3\,508{,}380^m$	$+53\,046{,}420^m$
Verbesserungen	$-0{,}016^m$	$+0{,}075^m$
Ausgleichungs-Ergebnis	$Y = +3\,508{,}364^m$	$X = +53\,046{,}495^m$ (14)

Um auch die Gewichts- und Fehler-Berechnung anzuschliessen, behandelt man die unter (13) gegebenen Coëfficienten nach dem Schema von S. 48, und findet:

$$y = -0{,}16^{dm} \qquad x = +0{,}75^{dm}$$

$$p_y = 26{,}3 \qquad p_x = 31{,}8$$

$$[l\,l\,.\,2] = [v\,v] = 143{,}0$$

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{4-2}} = \pm 8{,}5''$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm 1{,}66^{dm} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm 1{,}50^{dm}$$

Näherung (P)	$+3\,508{,}380^m$	$+53\,046{,}420^m$
Verbesserungen	$-\ 0{,}016^m \pm 0{,}166^m$	$+\ 0{,}075^m \pm 0{,}150^m$
Ausgleichungs-Ergebnis*)	$Y = +3\,508{,}364^m \pm 0{,}166^m$	$X = +53\,046{,}495^m \pm 0{,}150^m$ (15)

Mit diesen endgültigen Coordinaten berechnet man alle Azimute von Neuem und findet:

*) Von dem Observatorium des Karlsruher Polytechnikums sind nicht bloss diese hier benützten 5 trigonometrischen Punkte sichtbar, sondern 19 Kirchtürme und ähnliche Punkte der badischen Landestriangulierung. Eine auf diese 19 Punkte ausgedehnte Messung und Ausgleichung gleicher Art gab im Jahr 1869:

$$Y = +3\,508{,}392^m \pm 0{,}010^m \qquad X = +53\,046{,}432^m \pm 0{,}008^m$$
und $m = \pm 6{,}6''$

St. Michael	$[\varphi_0] = [PP_0] =$	231° 23′ 58,2″
Durlach Warte	$[\varphi_1] = [PP_1] =$	284 35 19,5
Ettlingen	$[\varphi_2] = [PP_2] =$	2 11 55,0
Bulach	$[\varphi_3] = [PP_3] =$	44 3 22,3
Daxlanden	$[\varphi_4] = [PP_4] =$	86 7 10,3

Damit berechnet man die gemessenen Winkel wieder rückwärts als Differenzen, und hat dann folgende Vergleichung:

Ausgeglichen:	Gemessen:	Korrektionen:	
[1] = 53° 11′ 21,3″	1. = 53° 11′ 21,0″	$v_1 = + 0{,}3''$	$v_1^2 = 0{,}09''$
[2] = 130 47 56,8	2. = 130 48 5,0	$v_2 = - 8{,}2$	$v_2^2 = 67{,}24$
[3] = 172 39 24,1	3. = 172 39 17,5	$v_3 = + 6{,}6$	$v_3^2 = 43{,}56$
[4] = 214 43 12,1	4. = 214 43 17,8	$v_4 = - 5{,}7$	$v_4^2 = 32{,}49$
			143,38

Diese Quadratsumme $[v\,v] = 143{,}4$ ist hinreichend übereinstimmend mit dem Wert $[l\,l\,.\,2] = 143{,}0$ der Elimination und damit ist die ganze Ausgleichung kontroliert.

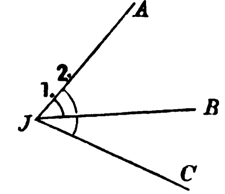
§ 59. Richtungsbeobachtungen.

Bei den bisherigen Ausgleichungsaufgaben von §. 57. und § 58. waren *Winkel*-Messungen vorausgesetzt, d. h. solche Theodolitbeobachtungen, bei welchen nie mehr als *zwei* Zielpunkte bei einer und derselben Limbusstellung zusammen beobachtet werden.

Hat man mehr als *zwei* Punkte zusammen angezielt, so nennt man die dabei erhaltenen Limbus-Ablesungen *Richtungs*-Messungen; und bei Ausgleichungs-Rechnungen sind „Winkelmessungen" und „Richtungsmessungen" wohl zu unterscheiden.

Winkelmessung ist hiernach ein besonderer Fall der Richtungsmessung, und man kann daher wohl Winkelmessungen nach den allgemeinen Regeln für Richtungen behandeln, nicht aber umgekehrt.

Fig. 11.
3 Richtungen *A B C*
2 Winkel 1. 2.



Ein Winkel kann immer betrachtet werden als Differenz zweier Richtungen; z. B. in Fig. 11. ist:

$$\text{Winkel } AJB = \text{Richtung } JB - \text{Richtung } JA \qquad (1)$$

Ist daher r ein mittlerer Richtungsfehler und m ein mittlerer Winkelfehler, so ist nach (1):

$$\pm m = \pm r \pm r$$
$$m^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$$
$$m = r\sqrt{2} \qquad (2)$$

oder in Gewichtsverhältnissen:

$$p_w : p_r = \frac{1}{2} : 1 \qquad (3)$$

d. h. eine Winkelmessung hat nur halbes Gewicht p_w im Vergleich mit dem Gewicht p_r einer Richtungsmessung.

Eine einzelne Richtungsmessung ist für praktische Zwecke wertlos, denn *eine* solche Messung bestimmt nur den Winkel, welcher eine Theodolit-Visur mit der Visur für die Null-Ablesung bildet, z. B. wenn man bei einer Theodolit-Aufstellung einen Punkt A anzielt und 26° 17′ 20″ abliest, so heisst das, die Ziellinie A macht den Winkel 26° 17′ 20″ mit derjenigen Ziellinie, welche man bei der Ablesung 0° 0′ 0″ hat. Würde man nun den Theodolit wegnehmen, so hätte man für trigonometrische

Berechnungen absolut Nichts erhalten. Man muss daher für solche Zwecke immer mindestens *zwei* Richtungen zusammen messen. Die Richtungen, welche bei einer und derselben Limbusstellung gemessen werden, bilden zusammen einen *Satz* (oder *Gyrus*).

Wenn nach Fig. 11. 3 Richtungen A B C in einem Satz eingeschnitten sind, so ist jede Richtung mit einem besonderen Fehler δA δB δC behaftet, und wenn die 3 Messungen in eine Ausgleichung eingehen, so muss werden:

$$(\delta A)^2 + (\delta B)^2 + (\delta C)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{4}$$

Wenn andererseits die 3 Strahlen A B C durch 2 Winkelmessungen AB und AC gegen einander festgelegt werden, so entsprechen diesen 2 Winkelmessungen 4 Richtungskorrektionen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \delta B_1 - \delta A_1 \\ \delta_2 &= \delta C_2 - \delta A_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo δ_1 und δ_2 Winkelkorrektionen, und δA_1 δB_1 δA_2 δC_2 Richtungskorrektionen sind. Wenn man nun nach Richtungen ausgleicht, so besteht die Bedingung (für gleiche Gewichte):

$$(\delta A_1)^2 + (\delta B_1)^2 + (\delta A_2)^2 + (\delta C_2)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{6}$$

während bei einer Ausgleichung nach Winkeln gälte:

$$p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \ldots = p_1 (\delta B_1 - \delta A_1)^2 + p_2 (\delta C_2 - \delta A_2)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{7}$$

wo p_1 und p_2 die Winkelgewichte sind.

Angenommen, man habe die Ausgleichung nach dieser letzten Bedingung (7) bewirkt, so ist man zur Kenntnis der *Differenzen* $\delta B_1 - \delta A_1$ u. s. w. gelangt, welche in (5) mit δ_1 δ_2 u. s. w. bezeichnet wurden; die einzelnen δA_1 δB_1 u. s. w. kennt man vorerst noch nicht. Wenn aber diese Richtungskorrektionen δA_1 δB_1 u. s. w. in gar keinen anderen Kombinationen in die Rechnung eingehen, als eben in diesen Differenzen δ_1 δ_2 u. s. w., so hat man das Recht, bei der Zerlegung der Winkelkorrektionen δ in je 2 Richtungskorrektionen abermals das Prinzip der kleinsten Quadratsumme anzuwenden und zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} \delta A_1 &= -\frac{\delta_1}{2} & \delta B_1 &= +\frac{\delta_1}{2} \\ \delta A_2 &= -\frac{\delta_2}{2} & \delta C_2 &= +\frac{\delta_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

denn jede andere Verteilung würde eine grössere Quadratsumme $(\delta A_1)^2 + (\delta B_1)^2 + \ldots$ geben. Setzt man die Werte für δA_1 δB_1 u. s. w. von (8) in (6) und (7) ein, so wird:

$$\frac{1}{2}\delta_1^2 + \frac{1}{2}\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{6*}$$

$$p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{7*}$$

Diese 2 Bedingungen werden identisch, wenn man $p_1 = p_2 = \ldots = \frac{1}{2}$ setzt, d. h. wenn man jedem Winkel das halbe Gewicht einer Richtung giebt, was der schon zu Anfang erkannten Beziehung (3) entspricht.

Wir haben also erkannt, dass, wenn nur Winkelmessungen vorliegen, man zu gleichen Resultaten gelangt, gleichviel, ob man nach Winkeln oder nach Richtungen ausgleicht, und da die Winkelausgleichung einfacher ist, wird man dann wohl meistens bei derselben bleiben. Wenn aber in einem Satze mehr als 2 Richtungen vorkommen, so muss nach Richtungen, entsprechend der Minimumsbedingung (6), ausgeglichen werden.

Richtungsmessungen haben noch das Eigentümliche, dass alle Ablesungen eines Satzes um eine beliebige Grösse verändert werden dürfen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zielpunkt	Gemessene Richtungen	Reduktion auf $A = 0$	Reduktion auf A = Azimut	
A	165° 46′ 12″	0° 0′ 0″	57° 37′ 3″	
B	205 45 37	39 59 25	97 36 28	(9)
C	286 54 20	121 8 8	178 45 11	

Die *Differenzen* der Richtungen, d. h. die Winkel, auf welche es bei trigonometrischen Berechnungen allein ankommt, bleiben immer dieselben, mag man die Originalablesungen benützen, oder dieselben auf einen Strahl = 0° 0′ 0″ reduzieren, oder einem Strahl sein anderwärts bekanntes Azimut als Richtung zuteilen, wie in der letzten Spalte der Zusammenstellung (9) angenommen ist.

Da alle diese 3 Anordnungen theoretisch gleichwertig sind, die Orientierung nach Azimuten aber praktisch viele Vorzüge hat, werden wir bei den folgenden Ausgleichungen im allgemeinen die Richtungsmessungen wenigstens in *genähert* trigonometrisch orientierter Form einführen.

Zugleich wollen wir im Folgenden zunächst annehmen, es handle sich immer um *volle* Richtungssätze, oder um Mittelbildungen aus mehreren vollen Richtungssätzen.

§ 60. Pothenotische Ausgleichung für Richtungsmessungen.

Mit den Vorbereitungen von § 59. nebst § 55. und § 56. können wir sofort ein praktisches Beispiel vornehmen.

In Hannover und in dessen Umgegend sind durch die Landesvermessung von 1821—1844 verschiedene Kirchtürme trigonometrisch bestimmt worden, deren Coordinaten in dem „Allgemeinen Coordinaten-Verzeichnis Hannover 1868“ von *Wittstein*, und im Jahr 1873 auch im IV. Band von *Gauss*' Werken, veröffentlicht worden sind. Im Jahr 1883 machte ich auf dem hochgelegenen Wasserturm von Linden eine pothenotische Bestimmung mit Benützung von 10 solchen gegebenen Kirchtürmen, deren Coordinaten in folgender Zusammenstellung gegeben sind; dabei sind sofort auch die Näherungs-Coordinaten des zu bestimmenden Standpunkts mit aufgenommen.

Punkt	Coord.-Verzeichnis *)	y	x	Entfernung	
1. Langenhagen	Seite 38	— 13 763,68ᵐ	+102 253,67ᵐ	9,74ᵏᵐ	
2. Bothfeld	„ 37	— 9 814,34	+ 98 424,13	8,46	
3. Marktturm Hannover . .	„ 36	— 14 154,02	+ 93 836,86	2,24	
4. Ägidiusturm „ . . .	„ 36	— 13 879,79	+ 93 575,89	2,39	(1)
5. Kirchrode	„ 35	— 7 938,67	+ 92 365,83	8,22	
6. Ronneberg	„ 34	— 19 508,89	+ 87 807,50	6,03	
7. Annaturm (Deister 1833) .	„ 31	— 29 649,28	+ 79 992,31	18,62	
8. Gehrden	„ 34	— 23 312,33	+ 87 352,71	9,01	
9. Kirchwehren	„ 36	— 25 592,89	+ 93 392,41	9,47	
10. Seelze	„ 37	— 23 593,12	+ 96 742,46	8,42	
Wasserturm exc. Näherung		(— 16 144,52)	(+ 92 809,27)		

*) Diese Seitenzahlen beziehen sich auf das *Wittstein*sche Coordinaten-Verzeichnis, ausserdem findet man diese Coordinaten im IV. Band von *Gauss*' Werken, Göttingen 1873, S. 427—429, in etwas anderem Mass als bei *Wittstein*.

Fig. 12.
Massstab 1 : 400 000.
(Hannover).

(Gelegentlich sei hiezu in sachlicher Beziehung bemerkt, dass drei andere Punkte von Hannover, Neustätterturm, Kreuzturm und Waterloosäule, deswegen nicht in diese Ausgleichung aufgenommen wurden, damit die Verteilung der gegebenen Punkte nach allen Richtungen möglichst gleichartig werde, was bei der Annahme, dass die gegebenen Coordinaten fehlerfrei seien, von Wichtigkeit ist.)

Die Richtungen nach den 10 gegebenen Punkten sollen alle in einem Satze mit dem Theodolit gemessen sein, und dabei kann *eine* Richtung willkürlich genommen werden. Wir nehmen zur vorläufigen Orientierung den Ägidiusturm, berechnen aus seinen Coordinaten und aus den Näherungs-Coordinaten des Standpunkts Wasserturm exc. nach Tabelle (1) das Azimut:

$$\text{Wasserturm—Ägidius } (\varphi_4) = 71^\circ\ 17'\ 56'' \tag{2}$$

womit alle gemessenen Richtungen genähert orientiert werden können.

Wir bezeichnen die genähert orientierten Richtungen mit (1) (2) (3) . . . während die endgültig ausgeglichenen Richtungen später mit [1] [2] [3] . . . bezeichnet werden sollen.

Da die (1) (2) (3) . . . immer noch den Charakter von reinen Beobachtungen haben, werden durch die Differenzen zwischen (1) (2) (3) . . . und [1] [2] [3] . . . die nach der Ausgleichung übrig bleibenden Beobachtungsfehler $v_1\ v_2\ v_3$ . . . bestimmt, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = [1] - (1) \\ v_2 = [2] - (2) \\ v_3 = [3] - (3) \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{3}$$

Wir bringen nun die Tabelle der genähert orientierten Richtungsbeobachtungen, und fügen sofort auch die Näherungsazimute (φ) hinzu, welche aus den Coordinaten der Tabelle (1) berechnet worden sind.

Die Vergleichung der Richtungen (1) (2) (3) . . . mit diesen Azimuten (φ) giebt die Näherungswidersprüche l:

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = (\varphi_1) - (1) \\ l_2 = (\varphi_2) - (2) \\ l_3 = (\varphi_3) - (3) \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{4}$$

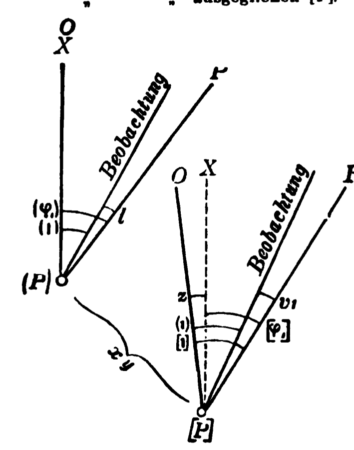
Folgendes ist die Tabelle der (1) (2) (3) . . ., der (φ) und der der l:

Ziel-Punkte	Genähert orientierte Richtungsmessungen	Genäherte Azimute (φ)	l
Langenhagen	(1) = 14° 9′ 17″	(φ_1) = 14° 8′ 56″	— 21″
Bothfeld	(2) = 48 26 35	(φ_2) = 48 25 37	— 58
Marktturm.	(3) = 62 41 44	(φ_3) = 62 41 42	— 2
Ägidius	(4) = 71 17 56	(φ_4) = 71 17 56	0
Kirchrode	(5) = 93 5 34	(φ_5) = 93 5 36	+ 2
Ronneberg	(6) = 213 55 34	(φ_6) = 213 55 34	0
Annaturm	(7) = 226 30 23	(φ_7) = 226 29 49	— 34
Gehrden	(8) = 232 42 45	(φ_8) = 232 43 10	+ 25
Kirchwehren	(9) = 273 32 19	(φ_9) = 273 31 54	— 25
Seelze	(10) = 297 50 8	(φ_{10}) = 297 50 10	+ 2
Centrum ($e = 0{,}98^m$)	221 30		

(5)

(Die Reduktion aufs Centrum, welche zur Ausgleichung nicht gehört, ist gelegentlich hier mitaufgenommen.)

Fig. 13.
Pothenotischer Punkt, genähert (P).
" " ausgeglichen [P].



Die Differenzen l der vorstehenden Tabelle sind die Absolutglieder der Fehlergleichungen.

Um zu den Fehlergleichungen selbst zu gelangen, betrachten wir in Fig. 13. die verschiedenen Übergänge von den gemessenen Richtungen bis zu den ausgeglichenen Resultaten.

(P) stellt den Näherungspunkt mit den Näherungs-Coordinaten (X), (Y) vor. [P] ist der ausgeglichene Punkt, dessen Coordinaten [X], [Y] aus (X), (Y) durch Zufügung der Korrektionen x, y hervorgehen.

Von den sämtlichen Zielpunkten $P_1\ P_2\ P_3 \ldots$ und den zugehörigen Azimuten und Messungen ist in Fig. 13. nur *einer*, P_1, dargestellt, weil es genügt, das Gesetz *einer* Fehlergleichung (mit der Nummer 1.) zu bilden, und nach diesem Gesetz dann auch die übrigen Fehlergleichungen mit den Nummern 2. 3. . . . anzuschreiben.

Die genähert orientierte erste Richtungsmessung (1) und das Azimut (φ_1) sind in (P) gemeinsam von der X-Richtung an gezählt, indem der Zählungs-Nullpunkt O der gemessenen Richtungen *vorläufig* mit der X-Richtung zusammengelegt wurde. O und X sind aber sachlich zwei ganz verschiedene Richtungen, welche in der endgültigen Darstellung für [P] auseinander gehalten werden müssen, denn die erste Orientierung, welche sich nur auf *einen* willkürlich ausgewählten Punkt stützt (s. o. Gleichung (2)), bedarf noch einer Korrektion, welche in Fig. 13. mit z bezeichnet ist, und als dritte Unbekannte neben x und y in die Ausgleichung eingeht.

Für die erste Fehlergleichung haben wir nun bereits von (3) und (4) die Beziehungen:

$$v_1 = [1] - (1) \qquad l_1 = (\varphi_1) - (1) \tag{6}$$

und hiezu giebt Fig. 13.:

$$[1] = z + [\varphi_1]. \tag{7}$$

Endlich ist die Differenz $[\varphi_1] - (\varphi_1)$ in Fig. 13. beim Übergang von dem Näherungspunkt (P) zu dem ausgeglichenen Punkt [P] nach § 55. S. 133 Fall II:

$$[\varphi_1] - (\varphi_1) = -\frac{\mathfrak{x}_1}{R_1}\,x - \frac{\mathfrak{y}_1}{R_1}\,y \tag{8}$$

Aus (6) und (7) erhält man die Fehlergleichung:

$$v_1 = [\varphi_1] + z - (1) \qquad \text{oder} \qquad v_1 = [\varphi_1] - (\varphi_1) + z + l_1 \tag{9}$$

oder mit Einführung von x y nach (8):

$$v_1 = z - \frac{\mathfrak{x}_1}{R_1} x - \frac{\mathfrak{y}_1}{R_1} y + l_1 \tag{10}$$

Die allgemeine Form für alle Fehlergleichungen ist daher:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = z + a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = z + a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = z + a_3 x + b_3 y + l_3 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{11}$$

wo die Coëfficienten a und b folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = -\dfrac{\mathfrak{x}_1}{R_1} & b_1 = -\dfrac{\mathfrak{y}_1}{R_1} \\ a_2 = -\dfrac{\mathfrak{x}_2}{R_2} & b_2 = -\dfrac{\mathfrak{y}_2}{R_2} \\ \dots\dots & \dots\dots \end{array}\right\} \tag{12}$$

Die Coëfficienten a und b sind dieselben Werte, deren Differenzen bei der pothenotischen Winkelausgleichung gebraucht wurden (vgl. (12) § 58. S. 142).

Ausserdem unterscheiden sich die Fehlergleichungen (11) für Richtungsausgleichung noch dadurch von den Fehlergleichungen für Winkel (s. o. (11) § 58. S. 142), dass nun noch eine dritte Unbekannte z hinzugekommen ist, deren Notwendigkeit man sich wohl durch unmittelbare geometrische Anschauung so klar machen kann:

Auf dem Messtisch pflegt man pothenotische Ausgleichung dadurch zu bewirken, dass man zunächst ohne Orientierung die Visuren nach den gegebenen Punkten auf Pauspapier zieht, welches man dann mit den Visierstrahlen so lange auf dem Messtisch versuchsweise hin und her dreht und schiebt, bis die Strahlen alle möglichst genau durch die gegebenen Messtischpunkte gehen.

Denkt man sich diese Versuche auf dem Näherungspunkte (P) angelangt, so wird der Übergang zu dem endgültig besten Strahlensystem des Punktes $[P]$ noch *zwei* Änderungen verlangen: erstens eine *Schiebung* von (P) nach $[P]$, und zweitens eine *Drehung*. Die Schiebung entspricht den Unbekannten x und y, die Drehung entspricht der Unbekannten z.

Wir berechnen nun die Coëfficienten a und b der Fehlergleichungen mit Hilfe der Tabelle S. [8]—[9] des Anhangs, und setzen auch die Absolutglieder l, welche schon oben in der Tabelle (5) berechnet worden sind, wieder bei.

	φ	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	R	$a = -\frac{\mathfrak{x}}{R}$	$b = -\frac{\mathfrak{y}}{R}$	l
1.	14° 9′	— 5,04	+ 20,00	9,74 km	+ 0,517	— 2,053	— 21″
2.	48 26	— 15,43	+ 13,68	8,46	+ 1,824	— 1,617	— 58
3.	62 42	— 18,33	+ 9,46	2,24	+ 8,183	— 4,223	— 2
4.	71 18	— 19,54	+ 6,61	2,39	+ 8,176	— 2,766	0
5.	93 6	— 20,60	— 1,12	8,22	+ 2,506	+ 0,136	+ 2
6.	213 55	+ 11,51	— 17,11	6,03	— 1,809	+ 2,837	0
7.	226 30	+ 14,97	— 14,20	18,62	— 0,804	+ 0,763	— 34
8.	232 43	+ 16,41	— 12,49	9,01	— 1,821	+ 1,386	+ 25
9.	273 32	+ 20,59	+ 1,27	9,47	— 2,174	— 0,134	— 25
10.	297 50	+ 18,24	+ 9,63	8,42	— 2,166	— 1,144	+ 2
					+ 12,432 = $[a]$	— 6,815 = $[b]$	— 111 = $[l]$ (13)

Man berechnet hieraus:

$$\left.\begin{array}{lll} [aa] = +160{,}33 & [ab] = -66{,}34 & [al] = -\ 96{,}17 \\ & [bb] = +44{,}21 & [bl] = +\ 155{,}39 \\ & & [ll] = +6223{,}00 \end{array}\right\} \quad (14)$$

Die Coëfficienten der ersten Unbekannten z sind alle $= 1$ (s. o. (11)), und da $[1\,.\,a] = [a]$ u. s. w., so hat man aus (13) und (14) nun die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrr} +\underline{10{,}00\,z} + 12{,}43\,x - & 6{,}82\,y - & 111{,}0 & = 0 \\ +\underline{160{,}33\,x} - & 66{,}34\,y - & 96{,}17 & = 0 \\ & +\underline{44{,}21\,y} + & 155{,}39 & = 0 \\ & & +\underline{6223{,}00} & \end{array}\right\} \quad (15)$$

Zuerst wird z eliminiert, worauf folgendes Gleichungssystem übrig bleibt:

$$\left.\begin{array}{rrr} +\underline{144{,}88\,x} - 57{,}87\,y + & 41{,}82 & = 0 \\ +\underline{39{,}57\,y} + & 79{,}74 & = 0 \\ & +\underline{\underline{4990{,}00}} & \end{array}\right\} \quad (16)$$

Die Auflösung dieses Systems giebt:

$$y = -5{,}9^{dm} \qquad [ll\,.\,3] = 4413 \qquad x = -2{,}6^{dm} \quad (17)$$
$$\pm 6{,}2 \qquad m = \sqrt{\frac{4413}{10-3}} \qquad \pm 3{,}2$$
$$m = \pm 25'' \quad (18)$$

Setzt man x und y in die erste Gleichung von (15), so erhält man z; um jedoch auch das Gewicht von z zu erhalten, haben wir die ganze Reihenfolge in (15) umgestellt, z zur letzten Unbekannten gemacht und dadurch erhalten:

$$z = +10'' \pm 8'' \quad (19)$$

Aus den Näherungs-Coordinaten und aus den Korrektionen bildet man das Resultat:

Näherung (1)	$(Y) = -16\,144{,}52^m$	$(X) = +92\,809{,}27^m$	
Korrektionen (17)	$y = -0{,}59^m \pm 0{,}62^m$	$x = -0{,}26^m \pm 0{,}32^m$	
	$Y = -16\,145{,}11^m \pm 0{,}62^m$	$X = +92\,809{,}01^m \pm 0{,}32^m$	(20)

Mit diesen Coordinaten berechnet man nun von Neuem die Azimute $[\varphi]$ aller 10 Zielpunkte, und setzt daraus nach (9) die v zusammen:

$$v_1 = [\varphi_1] - ((1) - z) \quad , \quad v_2 = [\varphi_2] - ((2) - z) \quad \text{u. s. w.}$$

Beobachtet genähert orientiert	Beobachtet endgültig orientiert	Ausgeglichen $[\varphi]$	v	v^2	
(1) = 14° 9′ 17″	(1) − z = 14° 9′ 7″	14° 9′ 7″	0″	0	
(2) = 48 26 53	(2) − z = 48 26 25	48 25 42	−43	1849	
(3) = 62 41 44	(3) − z = 62 41 34	62 41 46	+12	144	
(4) = 71 17 56	(4) − z = 71 17 46	71 17 51	+ 5	25	
(5) = 93 5 34	(5) − z = 93 5 24	93 5 28	+ 4	16	
(6) = 213 55 34	(6) − z = 213 55 24	213 55 22	− 2	4	
(7) = 226 30 23	(7) − z = 226 30 13	226 29 46	−27	729	(21)
(8) = 232 42 45	(8) − z = 232 42 35	232 43 7	+32	1024	
(9) = 273 32 19	(9) − z = 273 32 9	273 32 1	− 8	64	
(10) = 297 50 8	(10) − z = 297 49 58	297 50 22	+24	576	
			+77	4431	
$z = +10''$			−80	$=[vv]$	
			$[v] = -\ 3$		

Die hier erhaltene Summe $[vv] = 4431$ stimmt hinreichend mit $[ll\,.\,3] = 4413$ bei (17), indem die v nur auf 1″ abgerundet ausgerechnet sind.

Ebenso hinreichend ist auch $[v] = -3''$, welches genau $= 0$ sein sollte, weil vermöge (11) die erste Normalgleichung die Bedeutung hat $[1 \,.\, v] = [v] = 0$.

Um das Beispiel auch sachlich abzuschliessen, bringen wir an den Coordinaten (20) noch die Zentrierungsreduktion vom exzentrischen Standpunkt auf die in der Turmmitte befindliche Flaggenstange an, nämlich nach der Angabe am Schluss der Tabelle (5):

$$0{,}98^{m} \sin 221^{\circ}\, 30' = -0{,}65^{m} \qquad 0{,}98^{m} \cos 221^{\circ}\, 30' = -0{,}73^{m}$$

Dieses zu (20) hinzugefügt giebt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Wasserturm, Flaggenstange} & Y = -16\,145{,}76^{m} & X = +92\,808{,}28^{m} \\ & \quad\ \pm 0{,}62^{m} & \quad\ \pm 0{,}32^{m} \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Über die mittleren Fehler wird in § 62. Weiteres zu verhandeln sein.

§ 61. Elimination der Pothenotischen Richtungskorrektion z.

Zur näheren Betrachtung der Richtungskorrektion z nehmen wir die Fehlergleichungen (11) § 60. S. 149 nochmals vor, und bilden deren Summe:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = z + a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = z + a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = z + a_3 x + b_3 y + l_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = z + a_n x + b_n y + l_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$[v] = nz + [a]x + [b]y + [l] = 0 \qquad (2)$$

Dieses ist die erste Normalgleichung, weil für z alle Coëfficienten $= 1$ sind.

$[v] = 0$ kann als Rechenprobe nach der Ausgleichung benützt werden.

Diese erste Bedingung $[v] = 0$ ist auch sofort bei geometrischer Betrachtung einleuchtend, wenn man der früher erwähnten Vergleichung mit der Pauspapier-Ausgleichung auf dem Messtisch sich wieder erinnert; denn man will das beobachtete Strahlensystem so zwischen die gegebenen Punkte bringen, dass die Abweichungen links und rechts sich möglichst aufheben.

Man kann den Umstand, dass die Coëfficienten von z alle $= 1$ sind, dazu benützen, z sofort in den Fehlergleichungen zu eliminieren, so dass diese Unbekannte, welche geodätisch gleichgültig ist, in den Normalgleichungen gar nicht mehr auftritt.

Man verfolgt dabei im wesentlichen denselben Weg, welcher schon in § 26. S. 64—65 allgemein behandelt worden ist. Wir wollen aber nun die Elimination von z hier ganz unabhängig von früherem entwickeln.

Man kann das Verfahren, (welches zuerst in *Helmerts* Ausgleichungsrechnung S. 161 mitgeteilt wurde), so in Worte fassen:

Man bildet aus allen n Normalgleichungen eine Durchschnittsgleichung, durch Division der Gleichung (2) mit n, nämlich:

$$z + \frac{[a]}{n} x + \frac{[b]}{n} y + \frac{[l]}{n} = 0 \qquad (3)$$

Man subtrahiert diese Durchschnittsgleichung (3) von allen einzelnen Fehlergleichungen (1), so dass man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1' x + b_1' y + l_1' \\ v_2 = a_2' x + b_2' y + l_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = a_n' x + b_n' y + l_n' \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Diese Gleichungen (deren Summe gleich Null ist), behandelt man weiter wie gewöhnliche Fehlergleichungen; man bildet daraus die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}[][a'a']\,x + [a'b']\,y + [a'l'] = 0\\ [a'b']\,x + [b'b']\,y + [b'l'] = 0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Diese Gleichungen löst man nach x und y auf und bekommt dadurch *dieselben* Werte x und y, sowie auch *dieselben* Gewichte und mittleren Fehler, wie bei der unmittelbar sich darbietenden Behandlung von § 60.

Zum Beweis dieses Satzes bilden wir die einzelnen Coëfficienten von (4), nämlich der angegebenen Vorschrift entsprechend, durch Subtraktion von (1) und (3):

$$\left.\begin{array}{lll} a_1' = a_1 - \dfrac{[a]}{n} & b_1' = b_1 - \dfrac{[b]}{n} & l_1' = l_1 - \dfrac{[l]}{n} \\ a_2' = a_2 - \dfrac{[a]}{n} & b_2' = b_2 - \dfrac{[b]}{n} & l_2' = l_2 - \dfrac{[l]}{n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Quadrierung:

$$a_1'^2 = a_1^2 - 2\,a_1 \frac{[a]}{n} + \frac{[a]^2}{n^2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} [a'a'] = [aa] - 2\,[a]\dfrac{[a]}{n} + \dfrac{n\,[a]^2}{n^2} = [aa] - \dfrac{[a]}{n}\,[a] & \\ \text{entsprechend:}\quad [a'b'] = \;\ldots\ldots\ldots\; = [ab] - \dfrac{[a]}{n}\,[b] & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Betrachtet man andererseits die Normalgleichungen, welche unmittelbar zu den Fehlergleichungen (1) gehören, nämlich:

$$\begin{aligned} n\,z \quad + [a]\,x \quad + [b]\,y \quad + [l] \quad &= 0\\ [a]\,z + [aa]\,x + [ab]\,y + [al] &= 0\\ [b]\,z + [ab]\,x + [bb]\,y + [bl] &= 0 \end{aligned}$$

und eliminiert man hier z in der üblichen Weise, so kommt:

$$\left([aa] - \frac{[a]}{n}\,[a]\right) x + \left([ab] - \frac{[a]}{n}\,[b]\right) y + \left([al] - \frac{[a]}{n}\,[l]\right) = 0 \qquad (8)$$

Der Coëfficient von x in (8) ist mit $[a'a']$ in (7) übereinstimmend, und ebenso beweist man entsprechende Übereinstimmung für die übrigen Glieder, was wir nicht weiter im einzelnen verfolgen wollen.

Man rechnet also mit dem System (5) nebst zugehörigem $[l'l']$ weiter, wie wenn die Unbekannte z gar nicht da wäre. Nur bei der Berechnung des mittleren Fehlers muss man sich erinnern, dass die Zahl der Unbekannten x , y und z nicht 2 sondern 3 ist.

Der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung wird daher:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-3}} \qquad \text{oder} = \sqrt{\frac{[l'l'.2]}{n-3}} \qquad (9)$$

Die Summe $[l'l'.2]$ erhält man im Anschluss an die Elimination der Normalgleichungen (5).

Wie man die einzelnen v durch die Bedingung $[v] = 0$ finden kann, werden wir bei dem nachfolgenden Zahlenbeispiel zeigen.

Zu einer Anwendung nehmen wir das Coëfficienten-System (13) § 60. S. 149 nochmals vor, und berechnen daraus das folgende:

	a	b	l	a'	b'	l'	a'^2	
1.	+ 0,517	— 2,053	— 21	— 0,726	— 1,371	— 9,9	0,5271	
2.	+ 1,824	— 1,617	— 58	+ 0,581	— 0,935	— 46,9	0,3376	
3.	+ 8,183	— 4,223	— 2	+ 6,940	— 3,541	+ 9,1	48,1636	
4.	+ 8,176	— 2,766	0	+ 6,933	— 2,084	+ 11,1	48,0665	
5.	+ 2,506	+ 0,136	+ 2	+ 1,263	+ 0,818	+ 13,1	1,5952	
6.	— 1,809	+ 2,837	0	— 3,052	+ 3,519	+ 11,1	9,3147	
7.	— 0,804	+ 0,763	— 34	— 2,047	+ 1,445	— 22,9	4,1902	
8.	— 1,821	+ 1,386	+ 25	— 3,064	+ 2,068	+ 36,1	9,3881	
9.	— 2,174	— 0,134	— 25	— 3,417	+ 0,548	— 13,9	11,6759	
10.	— 2,166	— 1,144	+ 2	— 3,409	— 0,462	+ 13,1	11,6213	
Summe	+12,432	— 6,815	— 111	+ 0,002	+ 0,005	0,0	144,8802	(10)
Mittel	+ 1,243	— 0,682	—11,1					

Die Summe $[a'a'] = 144,8802$ stimmt hinreichend mit dem ersten Coëfficienten 144,88 von (16) § 60. S. 150, und ebenso verhält es sich mit den übrigen Coëfficienten, die wir nun nicht weiter ausrechnen, denn die Weiterrechnung mit den Coëfficienten a' b' l' wird nun ganz identisch mit der Rechnung (16)—(18) § 60. S. 150.

Es giebt ausser den reduzierten Coëfficienten a' b' l' noch ein zweites Mittel, z zu eliminieren; dieses zweite wurde von Oberst *Schreiber* mitgeteilt in dem Werke: „Deutsches Vermessungswesen" von *Jordan-Steppes*, I. Band S. 157—160. Es besteht in einer anderen Deutung der Gleichung (8). Die Coëfficienten sind:

$$[a'a'] = [aa] - \frac{1}{n}[a][a] \qquad [a'b'] = [ab] - \frac{1}{n}[a][b] \qquad [a'l'] = [al] - \frac{1}{n}[a][l] \qquad (11)$$

d. h. man bekommt $[a'a']$ $[a'b']$ $[a'l']$ u. s. w., wenn man die Summengleichung (2) mit Weglassung von z, d. h. also die Gleichung

$$[a]\,x + [b]\,y + [l] = 0 \qquad (12)$$

als eine fingierte Fehlergleichung mit dem Gewicht $-\frac{1}{n}$ zu den übrigen Fehlergleichungen hinzunimmt.

Statt ein negatives Gewicht einzuführen, kann man auch so verfahren:

Um bei der Quadrierung glatte Rechnung zu haben, kann man die Summengleichung (12) mit der Gewichtswurzel $\sqrt{\frac{1}{n}}$ multiplizieren, und dann die Coëfficienten einfach quadrieren und multiplizieren, die Beträge aber immer *negativ* in Rechnung bringen.

Endlich kann man auch, wenn etwa die Mittelwerte $\frac{[a]}{n}$ u. s. w. bereits gebildet sind, diese mit $\sqrt{n}$ multiplizieren, und dann wie *ein*gewichtig weiter behandeln, jedoch negativ zu der übrigen Summe hinzunehmen.

Hiezu hat man:

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n}$	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000	3,162
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,707	0,577	0,500	0,447	0,408	0,378	0,354	0,333	0,316

Wenden wir diese Regel auf unser Beispiel an, so haben wir die Summen bei (10) mit $\frac{1}{\sqrt{10}} = 0,31623$ zu multiplizieren, das giebt:

$$[a] = +12,432 \qquad [b] = -6,815 \qquad [l] = -111$$

$$\frac{[a]}{\sqrt{10}} = 3,931 \qquad \frac{[b]}{\sqrt{10}} = 2,155 \qquad \frac{[l]}{\sqrt{10}} = 35,101$$

$$-\left(\frac{a}{\sqrt{10}}\right)^2 = -15,453 \qquad -\left(\frac{[b]}{\sqrt{10}}\right)^2 = -4,644 \qquad -\left(\frac{[l]}{\sqrt{10}}\right)^2 = -1232,1$$

hiezu kommt nach (14) § 60. S. 150:

$$[a\,a] = +160,33 \qquad [b\,b] = +44,21 \qquad [l\,l] = 6223,0$$

also: $[a'a'] = 144,88 \qquad [b'b'] = 39,57 \qquad [l'l'] = 4990,9$

Dieses stimmt mit den quadratischen Coëfficienten von (16) § 60. S. 150, und da bei den Produkten die Rechnung nicht anders ist, können wir auch die Resultate (17) und (18) § 60. S. 150 unmittelbar herübernehmen, dagegen die Berechnung von z und der einzelnen v gestaltet sich nun anders:

Nach (9) § 60. S. 149 haben wir:

$$v_1 - z = [\varphi_1] - (1) \tag{13}$$

Dieses wollen wir mit v_1' bezeichnen, also:

$$v_1' = v_1 - z \qquad v_2' = v_2 - z \quad \ldots \quad v_n' = v_n - z$$

Nach Gleichung (2) ist aber $[v] = 0$, also:

$$[v'] = [v] - n\,z = -n\,z$$

$$z = -\frac{[v']}{n} \tag{14}$$

Dieses giebt folgende Rechnung:

Nr.	Ausgeglichen (trigonometrisch) $[\varphi]$	Beobachtet, genähert orientiert	v' $= [\varphi] - (\ldots)$	v $= v' + z$	v^2	
1.	14° 9′ 7″	(1) = 14° 9′ 17″	− 10″	0″	0	
2.	48 25 42	(2) = 48 26 35	− 53	− 43	1849	
3.	62 41 46	(3) = 62 41 44	+ 2	+ 12	144	
4.	71 17 51	(4) = 71 17 56	− 5	+ 5	25	
5.	93 5 28	(5) = 93 5 34	− 6	+ 4	16	
6.	213 55 22	(6) = 213 55 34	− 12	− 2	4	
7.	226 29 46	(7) = 226 30 23	− 37	− 27	729	
8.	232 43 7	(8) = 232 42 45	+ 22	+ 32	1024	
9.	273 32 1	(9) = 273 32 19	− 18	− 8	64	
10.	297 50 22	(10) = 297 50 8	+ 14	+ 24	576	
			+ 38		4431	
			+141			
		$z = -\frac{[v']}{n} = +10,3$	$[v'] = -103$		$= [v\,v]$	(15)

Damit hat man wieder dasselbe, wie bei (21) § 60. S. 150.

Man kann nun noch die verschiedenen Methoden der Elimination von z unter sich vergleichen:

So lange es sich nur um *pothenotische* Ausgleichung handelt, besteht ein praktisches Bedürfnis überhaupt nicht, die unmittelbare Elimination aus den Normalgleichungen durch eine Elimination in den Fehlergleichungen zu ersetzen, denn an

Rechenarbeit wird nichts gespart. Die *Schreiber*sche Methode (s. die Gleichung (11)) verlangt mit der Subtraktion $-\frac{[a]}{n}[a] \quad -\frac{[a]}{[n]}[b]$ u. s. w. genau *dasselbe*, was man auch in § 60. zum Übergang von (15) auf (16) S. 150 thun musste, und die *Helmert*'sche Methode (s. die Gleichungen (3) und (4)) verlangt mit der Reduktion aller einzelnen $a\ b\ l$ sogar noch *mehr* Rechenarbeit, als bei der ersten Behandlung.

Dagegen werden Vorteile einer solchen Elimination von z auftreten, wenn später eine pothenotische Ausgleichung mit Vorwärtsschnitten combiniert werden soll, überhaupt wenn verschiedene Richtungssätze mit verschiedenen Orientierungs-Unbekannten z in *eine* Ausgleichung zusammengenommen werden sollen.

Es ist dann sehr übersichtlich, von jeder Station nur die bereits von z befreiten Fehlergleichungen herbeizuschaffen, und dieses geschieht nach *Helmert* durch Reduktion aller einzelnen Fehlergleichungen, und nach *Schreiber* durch Zufügung einer Summengleichung mit fingiertem negativem Gewicht.

§ 62. Pothenotische Ausgleichung mit Rücksicht auf die Fehler der gegebenen Punkte.

Die pothenotischen Ausgleichungen liefern noch ein praktisches Resultat, welches wir bis jetzt unbeachtet gelassen haben; sie geben nämlich die Möglichkeit einer Genauigkeitsschätzung für die Coordinaten der *gegebenen* Punkte, durch Vergleichung des mittleren Beobachtungsfehlers, wie ihn die Ausgleichung giebt, mit dem mittleren Beobachtungsfehler, den man aus der Übereinstimmung gleichartiger Messungen a priori bestimmen kann.

Bei dem Hannover'schen Beispiel von § 60. gab die pothenotische Ausgleichung einen mittleren Richtungsmessungsfehler von 25″ (s. o. (18) S. 150).

Dieser Betrag ist erheblich grösser, als ihn die Messung selbst erwarten liess, denn die Richtungsmessungen sind mit einem Bamberg'schen Mikroskop-Theodolit von 20^{cm} Durchmesser in zwei unabhängigen Sätzen gemacht, so dass der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung nur wenige Sekunden betragen kann. Wegen dieses Widerspruchs muss angenommen werden, dass sich die Fehler der in der Rechnung als völlig genau behandelten Coordinaten der Zielpunkte sehr bemerklich gemacht haben, und es liegt in der Ausgleichung, welche die Fehler nur der Winkelmessung zuschreibt, eine Inkonsequenz, welche durch Einführung von Gewichten, die mit der Entfernung der Zielpunkte wachsend zu nehmen sind, gehoben werden kann.

Wenn man den mittleren reinen Richtungsmessungsfehler $\pm\,\delta$ und den mittleren Fehler $\pm\,c$ der gegebenen Coordinaten kennt, so lassen sich diese Gewichte angeben. Der mittlere Coordinatenfehler c ist auch gleich dem mittleren Punktfehler quer zur Zielrichtung (während der mittlere Punktfehler überhaupt $= c\sqrt{2}$ wäre), bei einer Entfernung r ist also die von c herrührende Zielungs-Unsicherheit $= \frac{c}{r}\,\varrho$, und dieses giebt mit dem mittleren Richtungsfehler δ das mittlere Fehlerquadrat:

$$M^2 = \left(\frac{c^m}{r}\,\varrho\right)^2 + \delta^2 \quad \text{oder} \quad = \left(\frac{c^{dm}}{10\,r}\,\varrho\right)^2 + \delta^2 \tag{1}$$

je nachdem c^m oder c^{dm} in Metern oder in Decimetern gezählt ist, und die in die Ausgleichung einzuführenden Richtungsgewichte müssten umgekehrt proportional den so bestimmten M^2 genommen werden.

In dem Falle unserer Hannover'schen Ausgleichung sind nun die Coordinatenfehler so überwiegend gegen die eigentlichen Messungsfehler, dass wir die letzteren vernachlässigen wollen, und damit zu der Aufgabe übergehen, ein beobachtetes Richtungssystem so zwischen gegebene Punkte einzupassen, dass die Lage dieser Punkte möglichst wenig geändert zu werden braucht. Wir haben also nach (1) das Richtungsgewicht umgekehrt proportional $\left(\frac{c\varrho}{r}\right)^2$ zu setzen, und wir nehmen:

$$\sqrt{p} = \frac{10r}{\varrho} = \frac{r}{20626,5} = \frac{R}{20,6265} \tag{2}$$

wo r die Entfernung in Metern, und R dieselbe Entfernung in Kilometern ist. Im übrigen ist die Masseinheit 20626,5 für r, oder 20,6265 für R so gewählt, dass die Multiplikation eines Winkels in Sekunden mit $\sqrt{p}$ eine lineare Grösse in Decimetern giebt, wie wir auch früher schon die Coordinaten-Korrektionen in Decimetern gezählt haben.

Die Fehlergleichungen hiessen früher nach (11) und (12) § 60. S. 149:

$$v = z - \frac{\mathfrak{x}}{R}x - \frac{\mathfrak{y}}{R}y$$

oder, wenn man die Bedeutungen von $\mathfrak{x}$ $\mathfrak{y}$ R nach § 55. und § 56. berücksichtigt,:

$$v = z + \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\varrho}{10}x - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\varrho}{10}y + l \tag{3}$$

Multipliziert man dieses mit $\sqrt{p}$ entsprechend (2), so erhält man:

$$v\sqrt{p} = v' = z\frac{R}{20,6265} + \sin\varphi\, x - \cos\varphi\, y + l\frac{R}{20,6265} \tag{4}$$

wobei alle Glieder in Decimetern gezählt sind.

Hiernach ist folgende Tabelle gebildet:

Zielpunkt	R	$\sqrt{p} = \frac{R}{20,6265}$	φ	l	$\frac{lR}{20,6265}$	$\sin\varphi$	$-\cos\varphi$
Langenhagen . .	9,74^{km}	0,472	14° 9′	−21″	− 9,9^{dm}	+0,244	−0,970
Bothfeld	8,46	0,410	48 26′	−58	−23,8	+0,748	−0,663
Marktturm . . .	2,24	0,109	62 42	− 2	− 0,2	+0,889	−0,459
Ägidius	2,39	0,116	71 18	0	0,0	+0,947	−0,321
Kirchrode	8,22	0,398	93 6	+ 2	+ 0,8	+0,999	+0,054
Ronneberg . . .	6,03	0,292	213 56	0	0,0	−0,558	+0,830
Annaturm	18,62	0,903	226 30	−34	−30,6	−0,725	+0,688
Gehrden	9,01	0,437	232 43	+25	+10,9	−0,796	+0,606
Kirchwehren . .	9,47	0,459	273 32	−25	−11,5	−0,998	−0,062
Seelze	8,42	0,408	297 50	+ 2	+ 0,8	−0,884	−0,467

Die Fehlergleichungen heissen also jetzt (auf 2 Dezimalen abgerundet):

$$\left.\begin{array}{llllll}
v_1' & = +0,47\,z & +0,24\,x & -0,97\,y & -\ 9,9^{dm} \\
v_2' & = +0,41\,z & +0,75\,x & -0,66\,y & -23,8 \\
v_3' & = +0,11\,z & +0,89\,x & -0,46\,y & -\ 0,2 \\
v_4' & = +0,12\,z & +0,95\,x & -0,32\,y & \ \ \ 0,0 \\
v_5' & = +0,40\,z & +1,00\,x & +0,05\,y & +\ 0,8 \\
v_6' & = +0,29\,z & -0,56\,x & +0,83\,y & \ \ \ 0,0 \\
v_7' & = +0,90\,z & -0,72\,x & +0,69\,y & -30,6 \\
v_8' & = +0,44\,z & -0,80\,x & +0,61\,y & +10,9 \\
v_9' & = +0,46\,z & -1,00\,x & -0,06\,y & -11,5 \\
v_{10}' & = +0,41\,z & -0,88\,x & -0,47\,y & +\ 0,8
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{+2{,}04\,z} - 0{,}97\,x + 0{,}11\,y - 41{,}99 = 0 \\ \underline{+6{,}56\,x} - 2{,}37\,y + 4{,}50 = 0 \\ \underline{+3{,}46\,y} + 11{,}29 = 0 \\ \underline{+1853{,}19} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Die Auflösung giebt:

$$y = -2{,}32^{dm} \qquad x = +1{,}88^{dm} \qquad z = +21'' \qquad (7)$$
$$\pm 7{,}2 \qquad [v'v'] = [ll.3] = 930 \qquad \pm 5{,}4$$

$$m = \sqrt{\frac{930}{10-3}} = \pm 11{,}5^{dm} \qquad (8)$$

Man bildet das Resultat:

Näherung:	$(Y) = -16\,144{,}52^m$	$(X) = +92\,809{,}27^m$
Verbesserungen:	$-\quad 0{,}23^m \pm 0{,}72^m$	$+\quad 0{,}14^m \pm 0{,}54^m$
Resultat:	$Y = -16\,144{,}75^m \pm 0{,}72^m$	$X = +92\,809{,}41^m \pm 0{,}54^m$ (9)

Zur Vergleichung haben wir das frühere Resultat für gleiche Gewichte, nach (20) § 60. S. 150:

$$Y_1 = -16\,145{,}11^m \pm 0{,}62^m \qquad X_1 = +92\,809{,}01^m \pm 0{,}32^m \qquad (10)$$

Die neue Gewichtsannahme hat also Änderungen von $0{,}36^m$ und $0{,}40^m$ in den Coordinaten gegeben.

Mit den neuen Coordinaten (9) berechnen wir nun wieder alle Azimute $[\varphi]$, vergleichen sie mit den Messungen, und werden dadurch die Fehlerverteilung und eine durchgreifende Rechenprobe erhalten:

Punkt	Ausgeglichen Azimut $[\varphi]$	Gemessen und orientiert $(..) - z$	Differenz v	$\sqrt{p}$	$v\sqrt{p} = v'$	v'^2	
					dm		
1. Langenhagen	14° 9′ 2″	14° 8′ 56″	+ 6″	0,472	+ 2,8	7,84	
2. Bothfeld . .	48 25 43	48 26 14	− 31	0,410	− 12,7	161,29	
3. Marktturm .	62 42 3	62 41 23	+ 40	0,109	+ 4,4	19,36	
4. Ägidiusturm	71 18 13	71 17 35	+ 38	0,116	+ 4,4	19,36	
5. Kirchrode . .	93 5 39	93 5 13	+ 26	0,398	+ 10,4	108,16	
6. Ronneberg .	213 55 25	213 55 13	+ 12	0,292	+ 3,5	12,25	
7. Annaturm .	226 29 46	226 30 2	− 16	0,903	− 14,5	210,25	
8. Gehrden . .	232 43 5	232 42 24	+ 41	0,437	+ 17,9	320,41	
9. Kirchwehren	273 31 52	273 31 58	− 6	0,459	− 2,8	7,84	
10. Seelze. . . .	297 50 9	297 49 47	+ 22	0,408	+ 9,0	81,00	
						947,76 = $[v'v']$	(11)

Die Schlusssumme $[v'v'] = 948$ stimmt mit $[ll.3] = 930$ bei (7) genügend, da die Azimute nur auf 1″ genau berechnet wurden.

Die v' vorstehender Tabelle stellen die Fehlerverteilung an den *gegebenen* Punkten vor. Diese v' in Decimetern geben an, um wie viel die durch die Coordinaten gegebenen Punkte quer zu den Ziellinien verschoben werden müssten, um den Richtungsmessungen auf dem Lindener Wasserturm sich zu fügen.

Der Mittelwert dieser Querverschiebungen v', d. h. das wertvollste Resultat der ganzen Ausgleichung, ist in dem mittleren Fehler $m = \pm 11{,}5^{dm}$ nach (8) enthalten.

Dieses ist der mittlere Fehler der auf gleiches Gewicht reduzierten Fehlergleichungen (4), wo alles in Decimetern gezählt ist, d. h.

$$m = c = \pm 11{,}5^{dm} = 1{,}15^{m} \tag{12}$$

oder es ist $c = \pm 1{,}15^{m}$ der mittlere Coordinatenfehler der gegebenen Punkte, von welchen schon oben bei (1) gesprochen wurde.

Obgleich sich die Richtigkeit der Gleichung (12) unmittelbar überblicken lässt, wollen wir doch die Sache nochmals durch die Gleichungen (1) (2) und (4) verfolgen: Da $\delta = 0$ gesetzt wurde, ist nach (1) und (2):

$$M = \frac{c^{dm}}{10\,r}\,\varrho = \frac{1}{\sqrt{p}}\,c^{dm}$$

Setzt man $p = 1$, so wird $M = m$, also, in der Masseinheit der Ausgleichung:

$$m = c = \pm 11{,}5^{dm} \tag{13}$$

Die althannoverschen Coordinaten sind also hiernach nur auf etwa 1 Meter genau, und es ist somit begreiflich, dass auch der eingeschaltete pothenotische Punkt mit Coordinaten-Unsicherheiten von etwa 0,5 Meter aus der Ausgleichung hervorging.

Es scheint nicht unpassend, hiezu einen Ausspruch von *Gauss* selbst zu citieren, nämlich nach *Gäde*, Beiträge zur Kenntnis von *Gauss*' praktisch-geodätischen Arbeiten, Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 185: „Vor Gott ist's am Ende wohl auch einerlei, ob wir die Lage eines Kirchturms auf einen Fuss oder die eines Sternes auf eine Sekunde bestimmt haben." Hiernach wurde also bei dem Einschneiden auf weite Entfernungen die Bestimmung eines Kirchturms „auf einen Fuss" als eine gute angesehen.

In Hannover wird erst die Neutriangulierung der Landesaufnahme in einigen Jahren genauere Coordinaten liefern.

Ob man nun nach all' diesen Betrachtungen das neue Resultat (9) als endgültig annehmen, oder das frühere Resultat (10) beibehalten will, wird von den Umständen abhängen. Für Messungen in der Nähe der Stadt Hannover wird das frühere (10) den Vorzug verdienen, weil die nahen Stadtpunkte Marktturm und Ägidius mehr ins Gewicht fallen. Mag man sich für das eine oder andere entscheiden, so bleiben bei so mangelhaften Unterlagen die Coordinaten des pothenotischen Punktes immer um etwa $1/2$ Meter unsicher.

In sachlicher Beziehung können wir von einer ähnlichen Ausgleichung in Karlsruhe mit 19 Zielpunkten der badischen Triangulierung berichten, dass sich daraus der mittlere badische Coordinatenfehler etwa $= \pm 0{,}10^{m}$ ergeben hat.

Anmerkung zu § 58., § 60. und § 62.

Wir haben die pothenotische Ausgleichung für zwei verschiedene Arten der Beobachtung behandelt, nämlich in § 58. für einzelne *Winkel*messungen, und in § 60. und § 62. für je *einen* vollen Satz von *Richtungs*messungen, oder für das Mittel aus mehreren vollen Sätzen, welches offenbar hier ebenso zu behandeln ist, wie *ein* einzelner Satz.

Man kann nun weiter den Fall betrachten, dass mehrere unvollständige Richtungssätze gemessen sind.

Jeder Richtungssatz giebt ein Fehlergleichungssystem von der Art (11) § 60. S. 149, mit einer Orientierungskorrektion z, und die verschiedenen Sätze haben auch verschiedene Unbekannte $z_1\ z_2\ z_3\ \ldots$

Man kann nun offenbar die Gesamtheit aller zu diesen Messungen gehörigen Fehlergleichungen geradezu nach den allgemeinen Regeln für vermittelnde Beobachtungen behandeln, und zwar hat man bei n Richtungssätzen die folgenden $n + z$ Unbekannten:

$$z_1 \; z_2 \; z_3 \; \ldots \; z_n \; , \; x \; y.$$

Man kann daran denken, in jedem einzelnen Richtungssatze, bzw. in jeder Fehlergleichungsgruppe, welche zu einem Richtungssatze gehört, das betreffende z nach § 61. S. 151—154 zu eliminieren; eine solche Ausgleichung hat Herr *Petzold* mit Anwendung auf mehrere Messungen auf Lindener Wasserturm (vgl. § 60.) in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1883, S. 227—234, behandelt.

Indessen ist (nach einer Erörterung von *Helmert* in der Zeitschr. f. Verm. 1883, S. 454) dieses Verfahren nicht bequem. Man kommt in dem Falle mehrerer unvollständiger Sätze rascher zum Ziel, wenn man mit den ursprünglichen Fehlergleichungen, (deren jede Gruppe ein besonderes z enthält,) die Normalgleichungen bildet, weil die in verschiedenen Sätzen auftretenden ursprünglichen Fehlergleichungen für gleiche Zielpunkte gleiche Coëfficienten a b haben, die umgeformten aber nicht.

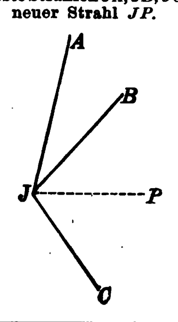
Dieses alles bezieht sich aber nur auf streng theoretische Ausgleichung.

Für praktische Fälle, in welchen die Annahme, dass die gegebenen Punkte fehlerfrei seien, doch niemals völlig erfüllt ist, wird es immer genügen, zerstreute Satzbeobachtungen zuerst auf der Station für sich auszugleichen, etwa nach der Näherungsmethode unseres späteren § 76., und das Ergebnis dieser Ausgleichung in die pothenotische Behandlung wie *einen* Richtungssatz mit einer Orientierungs-Unbekannten z einzuführen, d. h. nach § 60. zu verfahren.

§ 63. Anschluss eines Satzes von gemessenen Richtungen an mehrere feste Strahlen.

In Fig. 14. ist angenommen, man habe auf dem Punkt J 4 Strahlen in einem Satz gemessen, und zwar 3 Strahlen nach 3 unabänderlich festen (fehlerfreien) Punkten A B C, und einen Strahl nach einem neuen Punkt P. Die hier zu machende Ausgleichung ergiebt sich sofort als eine Mittelbildung aus den Differenzen zwischen den endgültigen Azimuten nach A B C, und den vorläufig orientierten Richtungen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Fig. 14.
Feste Strahlen JA, JB, JC.
neuer Strahl JP.



Strahl	Gemessene Richtungen α	Feste Azimute a	Differenz $a-\alpha$	Ausgeglichene Richtungen	$(v)-(z)$	(v)	
JA	21° 18′ 33″	21° 18′ 0″	— 33″	21° 18′ 0″	— 33″	+ 4″	
JB	48 29 43	48 29 7	— 36	48 29 7	— 36	+ 1	(1)
JP	90 37 22	. . . .	. . .	90 36 45	— 37	0	
JC	148 39 21	148 38 39	— 42	148 38 39	— 42	— 5	
		Summe	—111		—148	0	
		Mittel (z) =	— 37		— 37	0	

Will man diese sofort an und für sich verständliche Ausgleichung auch theoretisch darstellen, so hat man 3 Fehlergleichungen aufzustellen, wobei wir zur Unterscheidung von späteren v und z die Zeichen (v) und (z) nehmen:

$$\left.\begin{aligned} (v_1) &= (z) - 33'' \\ (v_2) &= (z) - 36 \\ (v_3) &= \;\; 0 \;\; - \;\; 0 \\ (v_4) &= (z) - 42 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Zu dem System (2) gehört eine Normalgleichung:

$$3\,(z) - 111 = 0, \quad \text{also } (z) = -37'' \qquad (3)$$

Wenn man die Richtungsverbesserung (z) an den gemessenen Richtungen anbringt, so erhält man die orientierten Richtungen, welche, mit den ausgeglichenen Richtungen verglichen, die Beobachtungsfehler (v) geben, wie schon oben bei (1) beigesetzt wurde, und wie hier nochmals in anderer Form sich zeigt:

Orientierte gemessene Richtungen	Ausgeglichene Richtungen	(v)
(1) = 21° 17′ 56″	21° 18′ 0″	+ 4″
(2) = 48 29 6	48 29 7	+ 1
(3) = 90 36 45	90 36 45	0
(4) = 148 38 44	148 38 39	— 5
	Summe =	0

(4)

Diese orientierten Richtungen (1) (2) (3) (4) haben immer noch den Charakter von reinen Beobachtungen, denn jeder Satz von gemessenen Richtungen darf willkürlich um eine beliebige Grösse (z) verschoben werden. Man darf deswegen auch diese Richtungen (1) (2) (3) (4) einer neuen Ausgleichung unterwerfen, deren Fehlergleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z + 4'' \\ v_2 &= z + 1'' \\ v_3 &= z + \,.\,. \\ v_4 &= z - 5'' \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die in der Tabelle (4) angegebenen (v), deren Summe = 0 ist, treten nun als Absolutglieder der Fehlergleichungen (5) auf; die neue gemeinsame Richtungsverbesserung ist z, und die neuen Verbesserungen der Richtungsbeobachtungen sind v. Für v_3 ist in (5) der Ausdruck unbestimmt gelassen, weil der dritte Strahl vorerst noch frei ist.

Wenn nun aber dieser Strahl JP nicht mehr frei endigt, sondern einen Punkt P trifft, um dessen Neubestimmung es sich handelt, so wird auch für diesen Strahl eine Fehlergleichung gelten von der Form:

$$v_3 = z + a\,x + b\,y + l$$

wo a und b die in § 55. und § 56. behandelten Coëfficienten sind.

Das ganze System der Fehlergleichungen heisst nun in allgemeinen Zeichen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z && + l_1 \\ v_2 &= z && + l_2 \\ v_3 &= z + a\,x + b\,y && + l_3 \\ v_4 &= z && + l_4 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Hiebei ist $$l_1 + l_2 + l_4 = 0 \qquad (6a)$$

was als allgemeine Beziehung dem besonderen Falle $+4'' + 1'' - 5''$ bei (4) entspricht.

Die zu (6) gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{4z} + ax + by \quad + [l] = 0 \text{ d. h. } [v] = 0 \\ \underline{a^2x} + aby + al_3 = 0 \\ \underline{b^2y} + bl_3 = 0 \\ \underline{[ll]} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Nach der Elimination von z bleibt folgendes System reduzierter Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{(a^2 - \frac{a}{4}a)}\, x + (ab - \frac{a}{4}b)\, y + (a l_3 - \frac{a}{4}[l]) = 0 \\ \underline{(b^2 - \frac{b}{4}b)}\, y + (b l_3 - \frac{b}{4}[l]) = 0 \\ \underline{([ll] - \frac{[l]}{4}[l])} \end{array}\right\} \quad (8)$$

Diese reduzierten Normalgleichungen sind nun wieder einer anderen Deutung fähig:

Man denke sich *eine* Fehlergleichung ohne z, mit dem Gewicht $\frac{3}{4}$:

$$v = ax + by + l_3 \qquad p = \frac{3}{4} \quad (9)$$

Diese einzelne Fehlergleichung giebt zu den Normalgleichungs-Coëfficienten genau dieselben Beiträge wie die Coëfficienten von (8).

Bei den Gliedern ohne l sieht man dieses unmittelbar, z. B.:

$$p a^2 = \frac{3}{4} a^2 = a^2 - \frac{1}{4} a^2 = a^2 - \frac{a}{4} a, \quad \text{wie bei (8).}$$

Bei den Gliedern, welche l enthalten, ist zum Nachweis des Gesagten zuerst die zwischen den l bestehende Beziehung zu beachten, welche schon bei (6a) erwähnt ist, nämlich:

$$l_1 + l_2 + l_4 = 0 \quad (10)$$

denn diese $l_1\ l_2\ l_4$ sind nichts anderes, als die aus der ersten Ausgleichung erhaltenen (v), deren Summe $= 0$ ist, wie schon oben bei (4) (5) und (6a) angegeben wurde. Damit wird aber:

$$[l] = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l_3$$

$$\text{also} \quad p a l_3 = \frac{3}{4} a l_3 = a l_3 - \frac{a}{4}[l], \quad \text{ebenso wie bei (8).}$$

Ebenso wird die Entwicklung von $p b l_3$; und damit ist nachgewiesen, dass die *eine* Fehlergleichung (9) dieselben Coëfficienten von x und y und dieselben Absolutglieder liefert, welche in dem System (8) auftreten; jedoch das Quadratsummenglied in (8) ist *nicht* identisch mit dem aus (9) erhaltenen $p l_3^2$, denn es ist:

$$[ll] - \frac{[l]}{4}[l] = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - \frac{l_3^2}{4} = l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + \frac{3}{4} l_3^2$$

dagegen

$$p l_3^2 = \frac{3}{4} l_3^2$$

Wenn man daher statt der 4 Fehlergleichungen (6) nur die eine Gleichung (9) benützt, so bekommt man zwar dieselben Werte x und y, aber eine andere Fehlerquadratsumme, welche um $l_1^2 + l_2^2 + l_4^2$ gegen den strengen Werth zu klein ist.

Wenn wir das System (6) als Teil eines grösseren Systems von n Fehlergleichungen auffassen, so wird das mittlere Gewichtseinheitsfehler-Quadrat:

$$m^2 = \frac{[vv] + [VV]}{n - u - 3} \quad (11)$$

wo u die Anzahl von Unbekannten sein soll, welche ausser z, x und y noch vorhanden sind, und $[VV]$ den in (6) nicht enthaltenen Beitrag bedeutet.

Geht man aber von der *einen* Fehlergleichung (9) aus, so wird:

$$m^2 = \frac{[VV] + [vv] - (l_1^2 + l_2^2 + l_4^2)}{(n-3) - u - 2} \tag{12}$$

Der Nenner ist im Vergleich mit (11) um 2 kleiner geworden, und der Zähler ist um $l_1^2 + l_2^2 + l_4^2$ kleiner geworden; diese beiden Abnahmen entsprechen einander, wenn gesetzt werden kann:

$$m^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_4^2}{2}$$

Dieses ist aber in der That der Fall, denn die $l_1\ l_2\ l_4$ sind dieselben Werte, welche wir in der ersten Ausgleichung mit $(v_1)\ (v_2)\ (v_4)$ bezeichnet haben, dort war aber zu rechnen:

$$m^2 = \frac{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_4)^2}{3-1} \tag{13}$$

weil die 3 Messungen auf den Strahlen $A\ B\ C$ zur Bestimmung der *einen* Unbekannten (z) gedient haben.

Alle bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf den Fall von Fig. 14, wo 3 feste Strahlen und 1 neuer Strahl vorhanden sind. Die Verallgemeinerung für s feste Strahlen und einen neuen Strahl giebt das Gewicht der Gleichung (9):

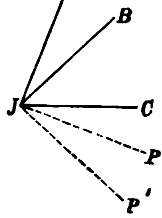
$$p = \frac{s}{s+1} \tag{14}$$

Insbesondere für *einen* festen Strahl, mit $s = 1$, wird:

$$p = \frac{1}{2}, \tag{14a}$$

was sich auch insofern unmittelbar einsehen lässt, als zwei Richtungen mit einem festen und einem freien Strahl diesen freien Strahl mit derselben Genauigkeit festlegen, wie eine Winkelmessung, welche an den festen Strahl angelegt wird; und eine solche Winkelmessung hat allerdings im Vergleich mit einer Richtungsmessung halbes Gewicht, wie schon früher bei (2) und (3) § 59. S. 144 erörtert worden ist.

Fig. 15.
Feste Strahlen JA, JB, JC.
Neue Strahlen JP, JP'.



Wir betrachten weiter den Fall, dass mehr als ein neuer Strahl, etwa 2 neue Strahlen, gegen mehrere feste Strahlen festgelegt werden; man habe etwa zunächst $s = 3$ feste Strahlen, und $s' = 2$ neue Strahlen (s. Fig. 15.).

Die Fehlergleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{ll}
\begin{array}{c}\text{Allgemein}\\ \text{Anzahl}\\ = s\end{array} & \left\{\begin{array}{l} v_1 = z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + l_1 \\ v_2 = z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + l_2 \\ v_3 = z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + l_3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} l_1 + l_2 + l_3 \\ = 0 \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Anzahl}\\ = s'\end{array} & \left\{\begin{array}{l} v_4 = z + a\,x + b\,y \quad \ldots \quad \ldots + l_4 \\ v_5 = \underbrace{z \quad \ldots \quad \ldots + a'\,x' + b'\,y'}_{\text{Allgemein: Anzahl} = u} + l_5 \end{array}\right. \\
s + s' = r &
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Die Normalgleichungen werden:

$$
[v]=0, \quad \left.\begin{array}{l}
\underline{rz}+ax+by+a'x'+b'y'+[l]=0 \\
\underline{a^2x}+aby \quad .. \quad .. \quad +a\,l_4=0 \\
\underline{b^2y} \quad .. \quad .. \quad +b\,l_4=0 \\
\underline{a'^2x'}+a'b'y'+a'l_5=0 \\
\underline{b'^2y'}+b'l_5=0 \\
\underline{[ll]}
\end{array}\right\} \quad (16)
$$

Nach Elimination von z bleibt folgendes System, in welchem berücksichtigt ist, dass wegen $l_1+l_2+l_3=0$, $[l]=l_4+l_5$ ist:

$$
\left.\begin{array}{l}
\underline{(a^2-\frac{a}{r}a)x}+(ab-\frac{a}{r}b)y+(0-\frac{a}{r}a')x'+(0-\frac{a}{r}b')y'+al_4-\frac{a}{r}(l_4+l_5)=0 \\
\underline{(b^2-\frac{b}{r}b)y}+(0-\frac{b}{r}a')x'+(0-\frac{b}{r}b')y'+bl_4-\frac{b}{r}(l_4+l_5)=0 \\
\underline{(a'^2-\frac{a'}{r}a')x'}+(a'b'-\frac{a'}{r}b')y'+a'l_5-\frac{a'}{r}(l_4+l_5)=0 \\
\underline{(b'^2-\frac{b'}{r}b')y'}+b'l_5-\frac{b'}{r}(l_4+l_5)=0 \\
\underline{[ll]-\frac{(l_4+l_5)}{r}(l_4+l_5)}
\end{array}\right\} \quad (17)
$$

In Bezug auf die Coëfficienten und Absolutglieder (mit Ausschluss des Quadratsummengliedes) kann man die Bildung dieses Systems (17) durch folgende mechanische Regel deuten:

Man schreibt 2 Fehlergleichungen ohne z:

$$
\text{Anzahl}=s' \left\{\begin{array}{l}
v'_4=ax+by \quad .. \quad .. +l_4 \text{ mit Gewicht}=1 \\
v'_5=\; .. \quad .. \; a'x'+b'y'+l_5 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad =1
\end{array}\right\} \quad (18)
$$

Hiezu nimmt man noch eine Summengleichung:

$$
v'=ax+by+a'x'+b'y'+l_4+l_5 \text{ mit Gewicht } =-\frac{1}{r} \quad (19)
$$

wobei $r=s+s'$

Diese 3 Fehlergleichungen (18) und (19), mit den angegebenen Gewichten, geben in der That dieselben Coëfficienten wie in (17), z. B. das Absolutglied von der Ordnung al wird aus (18) und (19):

$$
a\,l_4+\left(-\frac{1}{r}\right)a\,(l_4+l_5)=a\,l_4-\frac{a}{r}(l_4+l_5)
$$

d. h. ebenso wie in (17), und so ist es auch mit den übrigen Coëfficienten.

Dagegen wird das Quadratsummenglied von (18) und (19):

$$
[l'l']=l_4^2+l_5^2-\frac{1}{r}(l_4+l_5)^2, \quad (m_2) \quad (20)
$$

während in (17) das Schlussglied ist:

$$
l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2+l_5^2-\frac{1}{r}(l_4+l_5)^2=[ll\,.\,1] \quad (m_1) \quad (21)
$$

Es ist also $[ll\,.\,1]$ grösser als $[l'l']$, und zwar um den Betrag $l_1^2+l_2^2+l_3^2$, welcher nach Analogie von (13) $=(s-1)m^2$ zu achten ist. Es wird also nun für die beiden Fälle von (21) und (20):

$$
m_1^2=\frac{[ll\,.\,1]}{s'+s-u} \qquad m_2^2=\frac{[l'l']}{s'-(u-1)} \quad (22)
$$

weil im ersten Fall die Zahl der Unbekannten $x\ y\ x'\ y'$ nebst z, $= 5$, allgemein $= u$, und im zweiten Fall die Zahl der Unbekannten $x\ y\ x'\ y'$, ohne z, $= 4$, allgemein $= u - 1$ ist.

Zur besseren Vergleichung kann man schreiben:

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l\,l\,.\,1] - (s-1)\,m^2}{s' + s - u - (s-1)} \tag{23}$$

Die Formeln für m_1^2 und m_2^2 sind hiernach insofern gleichberechtigt, als nicht gesagt werden kann, dass im allgemeinen m_1 grösser oder kleiner als m_2 würde. Es ist aber m_1^2 die schärfere Formel, weil sie *alle* Proben, auch $l_1\ l_2\ l_3$, mit enthält, während m_2 nur l_4 und l_5 enthält.

Man sieht aus dieser Vergleichung, dass der Nenner von m_2^2 bei (22) so zu nehmen ist, dass nur die wirklichen Fehlergleichungen (18), nicht aber die Hilfssumme (19) in der Zahl s' mitzählen, und die Zählung der Unbekannten $(u - 1)$ erstreckt sich nur auf die Coordinaten-Unbekannten $x\ y\ x'\ y'$, nicht auch auf die Orientierungsgrösse z.

In dieser Regel für 2, oder allgemein s' freie Strahlen ist natürlich die erste Regel für *einen* freien Strahl mitenthalten, und wir wollen nun alles zusammenfassen für den allgemeinen Fall der Gleichung (15) mit s festen Strahlen und s' neuen Strahlen:

Man orientiert das ganze gemessene Richtungssystem auf die s festen Strahlen nach dem Verfahren von (1) und (2) S. 159—160, dann schreibt man für die neuen Strahlen die Fehlergleichungen ohne Rücksicht auf z an, wie in (18) geschehen ist. Hiezu setzt man die Summengleichung (19) mit dem Gewicht $= \frac{-1}{s + s'}$, und bildet die Normalgleichungen aus (18) und (19) in üblicher Weise.

Aus den Absolutgliedern von (18) und (19) bildet man auch die Fehlerquadratsumme von der Form $[l\,l]$, und nimmt am Schluss bei der Berechnung des mittleren Fehlers als Nenner den Wert $s' - (x, y)$, wo (x, y) die Summe aller Coordinaten-Unbekannten in (18) und s' die Anzahl der neuen Strahlen ist. Die Summengleichung (19) zählt also bei s' nicht mit.

In dem oft vorkommenden besonderen Fall, dass nur *ein* freier Strahl da ist, also $s' = 1$, braucht man überhaupt nur *eine* Fehlergleichung von der Form (9) oder (18) anzusetzen, (ohne z), welcher man das Gewicht $p = \frac{s}{s+1}$ giebt.

Wenn man zum Schluss auch noch z selbst bestimmen will, so hat man dazu die erste Normalgleichung (16), d. h. $[v] = 0$, oder:

$$0 = [v] = r\,z + a\,x + b\,y + a'\,x' + b'\,y' + [l]$$

Hiebei ist nach (15):

$$v_4 - z = a\,x + b\,y + l_4$$
$$v_5 - z = a'x' + b'y' + l_5$$
$$[l] = l_4 + l_5$$

$$\text{also} \quad 0 = r\,z + (v_4 - z) + (v_5 - z).$$

Nach (18) kann man hiefür schreiben:

$$0 = r\,z + v_4' + v_5'$$

$$\text{also} \quad z = -\frac{v_4' + v_5'}{r} \text{ allgemein } = -\frac{[v']}{r} \tag{24}$$

Dabei ist $[v']$ die Summe der v' für alle *freien* Strahlen, und $r = s + s'$ die Anzahl *aller* Strahlen.

§ 64. Gegenseitige Richtungen.

Hat man zwei Gegen-Richtungen gemessen, wie in Fig. 16. angedeutet ist, so bestehen zwei Fehlergleichungen, deren Coëfficienten einander gleich sind, wie die Anwendung der Formeln I. II. III. IV. von § 55. S. 133—134 sofort ergiebt.

Fig. 16. Gegen-Richtungen 1. u. 2. zwischen einem festen u. einem neuen Punkt.

Nimmt man unsere neue Fig. 16. der früheren Fig. 3. zu Fall I. S. 133 entsprechend, so hat man:

$$d\varphi = -\left(\frac{\sin\varphi}{r}\varrho\right)x + \left(\frac{\cos\varphi}{r}\varrho\right)y$$

oder mit $\varphi = (1.)$:

$$d(1.) = -\left(\frac{\sin(1.)}{r}\varrho\right)x + \left(\frac{\cos(1.)}{r}\varrho\right)y \tag{1}$$

Nimmt man dagegen unsere neue Fig. 16., mit der früheren Fig. 4. zu Fall II. S. 133 entsprechend, so wird:

$$d(2.) = +\left(\frac{\sin(2.)}{r}\varrho\right)x - \left(\frac{\cos(2.)}{r}\varrho\right)y \tag{2}$$

Da nun $(1.) = (2.) \pm 180°$, also $\sin(1.) = -\sin(2.)$ und $\cos(1.) = -\cos(2.)$ ist, so sind in der That die Coëfficienten der Gleichungen (1) und (2) einander gleich, und die Fehlergleichungen für die beiden Richtungen 1. und 2. in Fig. 16. haben folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z_1 + ax + by + l_1 \\ v_2 &= z_2 + ax + by + l_2 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Unbekannten z_1 und z_2 kann man jedenfalls eliminieren, und sei es, dass dabei Gewichtsänderungen auftreten, oder auch, wenn die obigen Gleichungen ursprünglich schon verschiedene Gewichte haben sollten, kommen wir nun zu der Betrachtung zweier Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= ax + by + l_1 \qquad \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2' &= ax + by + l_2 \qquad \quad „ \quad\;\; = p_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(p_1+p_2)\,a^2 x} + (p_1+p_2)\,ab\,y + (p_1 a l_1 + p_2 a l_2) &= 0 \\ \underline{(p_1+p_2)\,b^2 y} + (p_1 b l_1 + p_2 b l_2) &= 0 \\ + \underline{(p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2)} & \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Denkt man sich andererseits *eine* Fehlergleichung:

$$ax + by + \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2}{p_1 + p_2} = 0 \text{ mit dem Gewicht } = p_1 + p_2, \tag{6}$$

so erhält man dieselben Coefficienten wie in (5), das Fehlerquadratglied wird aber nach (6) anders, nämlich:

$$\frac{(p_1 l_1 + p_2 l_2)^2}{p_1 + p_2} \tag{7}$$

Die Rechnung mit dem Schlussglied von (5) ist schärfer als die Rechnung mit der Summe (7), weil es immer besser ist, die Originalfehler zu benützen, statt sie zusammenzufassen. Ausserdem bietet die Zusammenfassung der zwei Gleichungen (4) in eine Gleichung (6) wenig rechnerische Vorteile, dagegen den Nachteil, dass die Stationsgruppen gestört werden. Wir ziehen daher die Einzelbehandlung zweier Gleichungen von der Form (3) oder (4) der Zusammenfassung (6) vor.

(Vorstehende Betrachtung ist im wesentlichen übereinstimmend mit dem, was wir schon in § 22. S. 55 in (18') bis (20') behandelt haben; es schien aber nützlich, den Fall hier nochmals besonders zu erledigen.)

Fig. 17.
Gegen-Richtungen 5. und 3. zwischen zwei neuen Punkten.

$N\,x'y'$ — 5. — 3. — $G\,x\,y$

Zu einem Beispiel der Aufstellung der Fehlergleichungen für gegenseitige Richtungen, und zwar zwischen zwei Punkten, welche *beide* neu bestimmt werden sollen, nehmen wir (mit Bezugnahme auf den folgenden § 65.) die nebenstehende Fig. 17.

Die Näherungs-Coordinaten der Punkte N und G sind:

$$\left.\begin{array}{lll} N & (Y) = +\,135\,119{,}5^m & (X) = +\,137\,285{,}4^m \\ G & (Y') = +\,141\,871{,}6^m & (X') = +\,144\,754{,}4^m \end{array}\right\} \tag{8}$$

Hieraus berechnet man zuerst die Näherungsazimute:

$$(NG) = 42^\circ\ 6'\ 50{,}78'' \qquad (GN) = 221^\circ\ 6'\ 50{,}78'' \tag{9}$$

und die Entfernung:

$$log\,NG = 4.002\,9694 \qquad NG = 10{,}069^{km} \tag{10}$$

Die Coëfficienten a und b kann man mit Benützung der Hilfstafel S. [8] und [9] des Anhangs oder auch unmittelbar bestimmen.

Da es sich um eine scharfe Berechnung von Punkten II. Ordnung handelt, nehmen wir unmittelbar:

$$a = -\frac{sin\,(NG)}{NG}\,\varrho = -\,13{,}73 \qquad b = +\frac{cos\,(NG)}{NG}\,\varrho = +\,15{,}20 \tag{11}$$

Dabei sind die Coordinatenkorrektionen nicht wie bei der Hilfstafel S. [8] und [9] des Anhangs, in Decimetern verstanden, sondern, weil die Entfernungen gross sind, (bei Punkten II. Ordnung), sind die Coordinatenkorrektionen $x\ y$ und $x'\ y'$ in ***Metern*** verstanden.

In N und G hat man die folgenden bereits nach Azimuten vorläufig orientierten Richtungen gemessen:

$$(5) = 42^\circ\ 6'\ 29{,}30'' \qquad (3) = 222^\circ\ 6'\ 31{,}17'' \tag{12}$$

Vergleicht man dieses mit (9), so erhält man die Absolutglieder der Fehlergleichungen:

$$l_5 = +\,21{,}48'' \qquad l_3 = +\,19{,}61'' \tag{13}$$

und die Fehlergleichungen selbst werden:

$$v_5 = z_N - 13{,}73\,(x - x') + 15{,}20\,(y - y') + 21{,}48'' \tag{14}$$

$$v_3 = z_G + 13{,}73\,(x' - x) - 15{,}20\,(y' - y) + 19{,}61'' \tag{15}$$

Diese Formeln entsprechen dem Fall III. mit Fig. 5. § 55. S. 134.

§ 65. Bestimmung zweier Punkte durch innere und äussere Richtungen.

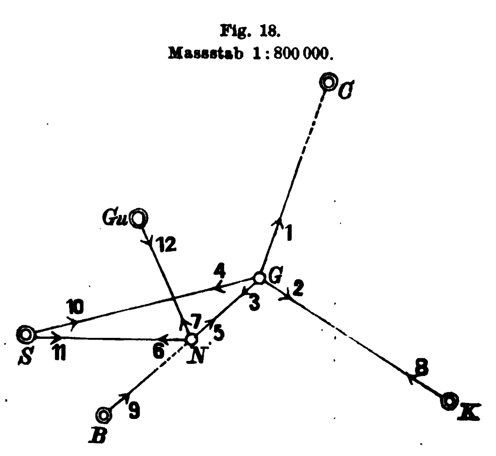
Zu einem Zahlenbeispiel nehmen wir die Ausgleichung für zwei Punkte II. Ordnung, welche Herr Oberst *Schreiber* in dem Werke „Deutsches Vermessungswesen" von *Jordan-Steppes*, Stuttgart 1882 I. Band, S. 155—168, veröffentlichen liess.

Wir behandeln hievon hier nur die Ausgleichung im *ebenen* Coordinatensystem, indem die der Erdkrümmung entsprechenden Reduktionen als bereits erledigt be-

trachtet werden. (Das Nachfolgende ist nicht ein Wiederabdruck jener Veröffentlichung von 1882, sondern eine teilweise geänderte und erweiterte Darstellung.)

In Fig. 18. sind die 5 Punkte $C\ K\ B\ S\ Gu$, welche durch Doppelringe ausgezeichnet sind, gegeben, alle durch Pfeile markierten Richtungen sind gemessen, und zwar auf den gegebenen Punkten jeweils im Anschluss an *einen* festen Strahl, dessen Lage in der Figur nicht angegeben ist. Die zwei Punkte N und G sollen bestimmt werden.

Fig. 18.
Massstab 1 : 800 000.



Gegebene ebene Coordinaten

		x	y	
Colberg	C	+ 146 434,103ᵐ	+ 16[illegible] 678,953ᵐ	(1)
Klorberg	K	+ 162 210,625	+ 132 329,267	
Backow	B	+ 125 818,346	+ 127 644,017	
Sprengelsberg	S	+ 117 130,512	+ 136 782,569	
Gummin	Gu	+ 128 715,187	+ 149 184,660	

Näherungen der gesuchten Punkte:

Gervin	G	+ 141 871,6	+ 144 754,4	(2)
Nadelfitz	N	+ 135 119,5	+ 137 285,4	

Zur Bestimmung der Punkte G und N sind 7 innere und 5 äussere Richtungen gemessen, welche, vorläufig trigonometrisch orientiert, mit (1) (2) ... (12) im Folgenden bezeichnet sind. Wir schreiben neben diese gemessenen Richtungen sofort auch die aus den Coordinaten (1) und (2) berechneten Azimute, durch deren Vergleichung mit den gemessenen (1) (2) ... (12) die Absolutglieder l hervorgehen. Auch sind die Entfernungen beigesetzt.

Standpunkt	Gemessene und vorläufig orientierte Richtungen	Trigonometrische Azimute	l	$log\ r$	R
G	(1) = 11° 45′ 32,56″	(GC) = 11° 45′ 19,75″	− 12,81″	4.35014	22,394
	(2) = 121 25 9,87	(GK) = 121 25 14,89	+ 5,02	4.37720	23,834
	(3) = 222 6 31,17	(GN) = 222 6 50,78	+ 19,61	4.00297	10,069
	(4) = 252 8 20,35	(GS) = 252 8 25,89	+ 5,54	4.41487	25,994
N	(5) = 42 6 29,30	(NG) = 42 6 50,78	+ 21,48	4.00297	10,069
	(6) = 268 23 58,22	(NS) = 268 23 55,95	− 2,27	4.25517	17,996
	(7) = 331 42 47,74	(NGu) = 331 42 37,35	− 10,39	4.13076	13,513
K	(8) = 301 25 9,54	(KG) = 301 25 14,89	+ 5,35	4.37720	23,834
B	(9) = 43 58 13,07	(BN) = 43 58 15,65	+ 2,58	4.12699	13,397
S	(10) = 72 8 21,43	(SG) = 72 8 25,89	+ 4,46	4.41487	25,994
	(11) = 88 23 56,91	(SN) = 88 23 55,95	− 0,96	4.25517	17,996
Gu	(12) = 151 42 43,22	(GuN) = 151 42 37,35	− 5,87	4.13076	13,513

(3)

Die Coëfficienten $a\ b$ ... der Fehlergleichungen werden nach § 55. und § 56. berechnet, wie im besonderen im vorigen § 64. mit Fig. 16 und den Gleichungen (14) und (15) S. 166 angegeben wurde; und da auch die Absolutglieder l soeben berechnet

wurden, kann man nun die Fehlergleichungen anschreiben: die Richtungskorrektionen sind mit $z_1\ z_2 \ldots z_6$ bezeichnet, und zwar beziehen sich die $z_3\ z_4\ z_5\ z_6$ bei den festen Punkten auf irgend welche feste Orientierungsstrahlen, welche in Fig. 18 nicht gezeichnet sind.

Standpunkt *Fehlergleichungen:*

$$
\left.\begin{array}{llllllll}
G & v_1 = z_1 & + 1{,}88\,x & - 9{,}02\,y & .\,. & .\,. & - 12{,}81 \\
 & v_2 = z_1 & + 7{,}38\,x & + 4{,}51\,y & .\,. & .\,. & + 5{,}02 \\
 & v_3 = z_1 & - 13{,}73\,x & + 15{,}20\,y & + 13{,}73\,x' & - 15{,}20\,y' & + 19{,}61 \\
 & v_4 = z_1 & - 7{,}56\,x & + 2{,}43\,y & .\,. & .\,. & + 5{,}54 \\
N & v_5 = z_2 & - 13{,}73\,x & + 15{,}20\,y & + 13{,}73\,x' & - 15{,}20\,y' & + 21{,}48 \\
 & v_6 = z_2 & .\,. & .\,. & - 11{,}46\,x' & + 0{,}32\,y' & - 2{,}27 \\
 & v_7 = z_2 & .\,. & .\,. & - 7{,}25\,x' & - 13{,}46\,y' & - 10{,}39 \\
K & v_8' = z_3 & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. \\
 & v_8 = z_3 & + 7{,}38\,x & + 4{,}51\,y & .\,. & .\,. & + 5{,}35 \\
B & v_9' = z_4 & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. \\
 & v_9 = z_4 & .\,. & .\,. & - 10{,}69\,x' & + 11{,}08\,y' & + 2{,}58 \\
S & v_{10}' = z_5 & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. \\
 & v_{10} = z_5 & - 7{,}56\,x & + 2{,}43\,y & .\,. & .\,. & + 4{,}46 \\
 & v_{11} = z_5 & .\,. & .\,. & - 11{,}46\,x' & + 0{,}32\,y' & - 0{,}96 \\
Gu & v_{12}' = z_6 & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. & .\,. \\
 & v_{12} = z_6 & .\,. & .\,. & - 7{,}25\,x' & - 13{,}46\,y' & - 5{,}87
\end{array}\right\} \quad (4)
$$

Zur Eliminierung der verschiedenen z verfahren wir nach den Regeln von § 63. und erhalten dadurch das folgende Coëfficienten-System, in welchem jedenfalls alle Coëfficienten des vorhergehenden Systems (4) wieder auftreten, zugleich aber auch bei den Stationen G, N und S (bei welchen mehr als ein neuer Strahl vorkommt) die Summengleichungen nach (19) § 63. S. 163 beigefügt sind. Auch sind die Gewichte nach den Regeln von (14), (14a) und (19) S. 162 und S. 163 angegeben, und in der letzten Spalte ist unter n diejenige Zahl von Strahlen angegeben, welche *nach* Elimination der z als Zahl unabhängiger Messungen bei der Berechnung des mittleren Fehlers dient, so dass nachher als Zahl der Unbekannten nur die $x\ y\ x'\ y'$, d. h. 4 gilt, weil die z bereits eliminiert sind.

Nr.	Stand-punkt	Ziel-punkt	x a	y b	x' c	y' d	l	p	$\sqrt{p}$	n
1.	G	C	+ 1,88	− 9,02			−12,81	1	1	
2.	G	K	+ 7,38	+ 4,51			+ 5,02	1	1	
3.	G	N	−13,73	+15,20	+13,73	−15,20	+19,61	1	1	4
4.	G	S	− 7,56	+ 2,43			+ 5,54	1	1	
		Summe	−12,03	+13,12	+13,73	−15,20	+17,36	−(1:4)	0,5 i	
5.	N	G	−13,73	+15,20	+13,73	−15,20	+21,48	1	1	
6.	N	S			−11,46	+ 0,32	− 2,27	1	1	3
7.	N	Gu			− 7,25	−13,46	−10,39	1	1	
		Summe	−13,73	+15,20	− 4,98	−28,34	+ 8,82	−(1:3)	0,577 i	
8.	K	G	+ 7,38	+ 4,51			+ 5,35	1:2	0,707	1
9.	B	N			−10,69	+11,08	+ 2,58	1:2	0,707	1
10.	S	G	− 7,56	+ 2,43			+ 4,46	1	1	
11.	S	N			−11,46	+ 0,32	− 0,96	1	1	2
		Summe	− 7,56	+ 2,43	−11,46	+ 0,32	+ 3,50	−(1:3)	0,577 i	
12.	Gu	N			− 7,25	−13,46	− 5,87	1:2	0,707	1
										12

(5)

Um nun bei der Berechnung von $[aa]$ $[ab]$ u. s. w. die verschiedenen Gewichte möglichst bequem zu berücksichtigen, kann man die $a\ b\ c\ \dots$ mit $\sqrt{p}$ multiplizieren (mit dem Rechenschieber) und dadurch folgende Tabelle bilden, in welcher die Coëfficienten alle auf die Gewichtseinheit reduziert sind. Alle Werte sind auf 0,1 abgerundet. Zur Veranschaulichung der Weiterrechnung haben wir noch a^2 und l^2 beigefügt.

a	b	c	d	l	a^2		l^2	
+ 1,9	— 9,0			—12,8	3,61		163,84	
+ 7,4	+ 4,5			+ 5,0	54,76		25,00	
—13,7	+15,2	+13,7	—15,2	+19,6	187,69		384,16	
— 7,6	+ 2,4			+ 5,5	57,76		30,25	
— 6,0 i	+ 6,6 i	+ 6,9 i	— 7,6 i	+ 8,7 i		— 36,00		— 75,69
—13,7	+15,2	+13,7	—15,2	+21,5	187,69		462,25	
		—11,5	+ 0,3	— 2,3			5,29	
		— 7,2	—13,5	—10,4			108,16	
— 7,9 i	+ 8,7 i	— 2,9 i	—16,4 i	+ 5,1 i		— 62,41		— 26,01
+ 5,2	+ 3,2			+ 3,8	27,04		14,44	
		— 7,6	+ 7,8	+ 1,8			3,24	
— 7,6	+ 2,4			+ 4,5	57,76		20,25	
		—11,5	+ 0,3	— 1,0			1,00	
— 4,4 i	+ 1,4 i	— 6,6 i	+ 0,2 i	+ 2,0 i		— 19,36		— 4,00
		— 5,1	— 9,5	— 4,1			16,81	
					576,31	—117,77	1234,69	—105,70
					458,54		1128,99	

Ebenso wie hier die a^2 und die l^2 berechnet sind, werden auch alle anderen Quadrate und Produkte $b^2 \dots ab \dots$ ausgerechnet, und damit die folgenden Normalgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} \underline{+459\,x} - 308\,y - 389\,x' + 244\,y' - & 507 = 0 \\ \underline{+464\,y} + 408\,x' - 269\,y' + & 695 = 0 \\ \underline{+676\,x'} - 331\,y' + & 653 = 0 \\ \underline{+469\,y'} - & 283 = 0 \\ & \underline{+1129} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Diese Gleichungen werden in üblicher Weise aufgelöst, wie wir in § 25. S. 64 ausführlich gezeigt haben. Die Resultate sind:

$$x = +0{,}214^m \qquad y = -1{,}462^m \qquad x' = -0{,}197^m \qquad y' = -0{,}488^m \qquad (7)$$

$$p_x = 205 \qquad p_y = 185 \qquad p_x' = 249 \qquad p_y' = 281 \qquad (7a)$$

Ausserdem $\qquad [l\,l\,.\,4] = 11 \qquad (8)$

Hiefür werden wir (S. 170) die Probe durch Quadrierung der einzelnen v finden, nämlich $[vv] = 11{,}80$, und da die Elimination nur mit dem Rechenschieber gemacht ist, stimmt dieses genügend, ist auch sachlich nicht genauer nötig, und wir nehmen

$$[vv] = 11{,}8.$$

Hieraus berechnet man den Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{11{,}8}{12-4}} = \pm 1{,}21'' \qquad (8a)$$

und dann:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{1{,}21}{\sqrt{205}} = \pm 0{,}085^m$$

Ebenso werden auch die anderen mittleren Coordinatenfehler mit den Gewichten von (7a) berechnet. Indem man dann die Korrektionen (7) nebst ihren mittleren Fehlern zu den Näherungsannahmen (2) hinzufügt, bekommt man:

Punkt G	Näherung	$+141\,871{,}600^{m}$	$+144\,754{,}400^{m}$
	Verbesserungen	$y = -1{,}462 \pm 0{,}089$	$x = +0{,}214 \pm 0{,}085$
	Resultat	$Y = +141\,870{,}138 \pm 0{,}089$	$X = +144\,754{,}614 \pm 0{,}085$ (9)
Punkt N	Näherung	$+135\,119{,}500^{m}$	$+137\,285{,}400^{m}$
	Verbesserungen	$y' = -0{,}488 \pm 0{,}072$	$x' = -0{,}197 \pm 0{,}077$
	Resultat	$Y' = +135\,119{,}012 \pm 0{,}072$	$X' = +137\,285{,}203 \pm 0{,}077$ (9')

Diese Resultate weichen von den von Oberst *Schreiber* a. a. O. S. 162 angegebenen Coordinaten ein wenig ab; es ist nämlich nach *Schreiber:*

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Punkt } G & Y = +141\,870{,}137^{m} & X = +144\,754{,}612^{m} \\ \text{Punkt } N & Y' = +135\,119{,}016^{m} & X' = +137\,285{,}201^{m}\end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Abweichungen zwischen (9), (9') und (10) betragen höchstens 4 Millimeter, und da unsere Elimination nur mit dem Rechenschieber gemacht ist, lassen wir diese Kleinigkeiten auf sich beruhen; rechnen jedoch die endgültigen trigonometrischen Azimute [φ] mit den Coordinaten (10) weiter, und gewinnen dadurch folgende Tabelle:

Nr.	Strahl	Ausgleichung Azimut [φ]	Beobachtung (. .)	[φ] — (. .) = v'	v' + z = v	v^2	
1.	*G C*	11° 45' 33,34"	(1) = 11° 45' 32,56"	+0,78"	+ 0,72"	0,52	
2.	*G K*	121 25 9,85	(2) = 121 25 9,87	—0,02	— 0,08	0,01	
3.	*G N*	322 6 30,26	(3) = 222 6 31,17	—0,91	— 0,97	0,94	
4.	*G S*	252 8 20,75	(4) = 252 8 20,35	+0,40	+ 0,34	0,12	
				$S_1 = +0{,}25$	+ 0,01		
				$-z_1 = +0{,}06''$			
5.	*N G*	42° 6' 30,26"	(5) = 42° 6' 29,30"	+0,96"	+ 1,50"	2,25	
6.	*N S*	268 23 58,08	(6) = 268 23 58,22	—0,14	+ 0,40	0,16	
7.	*N Gu*	331 42 45,29	(7) = 331 42 47,74	—2,44	— 1,90	3,61	
				$S_2 = -1{,}62$	0,00		
				$-z_2 = -0{,}54$			
8.	*K G*	301° 25' 9,85"	(8) = 301° 25' 9,54"	+0,31"	+ 0,16"	0,03	
	. .	. . . . . .	. . . . . .	0,00	— 0,16	0,03	
				$S_3 = +0{,}31$	0,00		
				$-z_3 = +0{,}16$			
9.	*B N*	43° 58' 12,42"	(9) = 43° 58' 13,07"	—0,65"	— 0,32"	0,10	
	. .	. . . . . .	. . . . . .	0,00	+ 0,33	0,11	
				$S_4 = -0{,}65$	+ 0,01		
				$-z_4 = -0{,}33$			
10.	*S G*	72° 8' 20,75"	(10) = 72° 8' 21,43"	—0,68"	— 0,84"	0,71	
11.	*S N*	88 23 58,08	(11) = 88 23 56,91	+1,17	+ 1,01	1,02	
	. .	. . . . . .	. . . . . .	0,00	— 0,16	0,03	
				$S_5 = +0{,}49$	+ 0,01		
				$-z_5 = +0{,}16$			
12.	*Gu N*	151° 42' 45,30"	(12) = 151° 42' 43,22"	+2,08"	+ 1,04"	1,08	
	. .	. . . . . .	. . . . . .	0,00	— 1,04	1,08	
				$S_6 = +2{,}08$	0,00	11,80	
				$-z_6 = +1{,}04$		= [v v]	(11)

Die Summe der v ist stationsweise = Null.

Der Schlusswert $[vv] = 11{,}80$ dieser Tabelle (11) stimmt genügend mit dem Werte $[ll.4] = 11$, den die Elimination gegeben hat, wie schon oben bei (8) erörtert wurde; und damit ist die ganze Ausgleichung genügend kontroliert.

Bei der Mittelbildung für die z auf den festen Stationen K B S Gu wurde je *ein* fester Strahl, welcher durch .. .. .. angedeutet ist, in der Tabelle (11) mit $v' = 0{,}00$ zugesetzt, und dann durch die Anzahl aller Strahlen (der festen und der neuen) dividiert. Dieses entspricht der Formel (24) am Schluss von § 63. S. 164.

Obgleich wir durch das Bisherige die ganze Ausgleichung erschöpfend behandelt haben, wollen wir doch auch noch die v aus den Fehlergleichungen bestimmen.

Abgesehen von der theoretischen Vollständigkeit kann dieses nützlich werden, wenn etwa die Summe $[vv]$ bei (11) mit $[ll.4]$ bei (8) *nicht* genügend stimmen sollte. Es kommt dann darauf an, die Rechenfehler zu suchen; und statt alles direkt nochmals zu rechnen, kann man die Fehlergleichungen (4) benützen, indem man die Unbekannten $x\ y\ x'\ y'$ von (7) in die Fehlergleichungen einsetzt; z. B. die erste Fehlergleichung von (4)

$$v_1 - z_1 = +1{,}88\,x - 9{,}02\,y - 12{,}81$$

giebt mit

$$x = +0{,}214 \qquad y = -1{,}462:$$

$$v_1 - z_1 = +0{,}40 + 13{,}19 - 12{,}81 = +0{,}78 = v'$$

d. h. ebenso wie in der Tabelle (11), und in gleicher Weise lassen sich alle übrigen Werte $v' = v - z$ der Tabelle (11) kontrolieren, und nach dieser Probe ist an der Richtigkeit der ganzen Ausgleichung innerhalb der überhaupt eingehaltenen Schärfe von $0{,}1''$ absolut nicht mehr zu zweifeln.

§ 65a. Mittlerer Fehler der Entfernung NG von § 65.

Durch die mittleren Coordinatenfehler, welche bei (9) und (9') des vorigen § 65. S. 170 angegeben sind, ist die Schärfe der Punktbedingungen klar ausgedrückt, es ist jedoch unter Umständen noch von besonderer Wichtigkeit, den mittleren Fehler der Entfernung NG selbst zu bestimmen, namentlich dann, wenn NG selbst wieder als Basis einer Triangulierungsgruppe dienen soll.

Es handelt sich um die Entfernung

$$s = \sqrt{(X' - X)^2 + (Y' - Y)^2} \tag{1}$$

Durch Differentiieren findet man:

$$ds = -\frac{X'-X}{\sqrt{\ldots}}\,dX + \frac{X'-X}{\sqrt{\ldots}}\,dX' - \frac{Y'-Y}{\sqrt{\ldots}}\,dY + \frac{Y'-Y}{\sqrt{\ldots}}\,dY'$$

oder, indem man das Azimut einführt,:

$$(GN) = (3) = 222^\circ\,7' \quad , \quad tang\,(3) = \frac{Y'-Y}{X'-X} \quad , \quad s = \frac{Y'-Y}{sin\,(3)} = \frac{X'-X}{cos\,(3)}$$

$$ds = -cos\,(3)\,dX + cos\,(3)\,dX' - sin\,(3)\,dY + sin\,(3)\,dY' \tag{2}$$

$$cos\,(3) = -0{,}742 \qquad sin\,(3) = -0{,}671 \tag{3}$$

Denkt man sich nun die Entfernung s in eine Reihe, mit dem Ausgangswert (s), entsprechend den Näherungs-Coordinaten der Ausgleichung, entwickelt, so treten die Differentiale $dX\ dY\ dX'\ dY'$ an Stelle der sonst mit $x\ y\ x'\ y'$ bezeichneten Verbesserungen, d. h. man hat dann aus (1) (2) und (3):

$$s = (s) + ds = (s) + 0{,}742\,x + 0{,}671\,y - 0{,}742\,x' - 0{,}671\,y' \tag{4}$$

Dieses ist eine Gleichung von der Form (1) § 29. S. 73, nämlich:

$$F = f_1\,x + f_2\,y + f_3\,x' + f_4\,y'$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also:} \quad f_1 = +0{,}742 \qquad f_2 = +0{,}671 \qquad f_3 = -0{,}742 \qquad f_4 = -0{,}671 \\ \qquad\qquad\qquad \text{für Meter,} \end{array}\right\} \tag{5}$$

Diese Coëfficienten gelten für Meter als Masseinheit, es ist aber für die nachfolgende Berechnung bequemer, in Centimetern zu rechnen, wir schreiben daher:

$$\left.\begin{array}{cccc} f_1 = +74 & f_2 = +67 & f_3 = -74 & f_4 = -67 \\ & \text{für Centimeter.} & & \end{array}\right\} \quad (6)$$

Die Berechnung des Gewichtes P machen wir nach der Formel (13) § 29. S. 75, nämlich:

$$-\frac{1}{P} = -\frac{f_1^2}{[aa]} - \frac{[f_2 . 1]^2}{[bb . 1]} - \frac{[f_3 . 2]^2}{[cc . 2]} - \frac{[f_4 . 3]^2}{[dd . 3]} \quad (7)$$

Wir haben dieses in *negativer* Form geschrieben, weil es sich so am einfachsten an die Elimination von S. 64 anschliesst. Man wiederholt nämlich nun jene Elimination von S. 64, indem man an Stelle der Glieder mit l nun die Glieder f von (6) setzt.

Alles dieses haben wir in der nachfolgenden Tabelle ausgeführt, und zwar sogar *doppelt*, erstens in der Ordnung $x\ y\ x'\ y'$ und zweitens in der umgekehrten Ordnung $y'\ x'\ y\ x$. Die Glieder in den 4 ersten Columnen sind dieselben, wie in den 4 ersten Columnen von S. 64, vorbehältlich kleiner Abrundungs-Unsicherheiten und kleiner Fehler unserer mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemachten Eliminationen, worüber die am Schluss dieses § 65a. gemachte Anmerkung zu beachten ist.

x a	y b	x' c	y' d	f	y' d	x' c	y b	x a	f	
+459	−308	−389	+244	+74	+469	−331	−269	+244	−67	
	+464	+408	−269	+67		+676	+408	−389	−74	
	−207	−262	+164	+50		−233	−189	+172	−47	
		+676	−331	−74			+464	−308	+67	
		−330	+207	+63			−154	+140	−39	
			+469	−67				+459	+74	
			−130	−38				−127	+35	
				0					0	
				−12					−10	
	+257	+146	−105	+117		+443	−219	−217	−121	
		+346	−124	−11			+310	−168	+28	
		−83	+60	−66			−108	+107	+60	
			+339	−105				+332	+109	
			−43	+48				−105	−59	
				−12					−10	
				−58					−33	
		+263	−64	−77			+202	−61	+88	
			+296	−57				+227	+50	
			−16	−19				−18	+26	
				−65					−43	
				−23					−38	
			+280	−76				+209	+76	
				−88					−81	
				−21					−28	
				−109					−109	(8)
				$= -\frac{1}{P}$		für Centimeter.			$= -\frac{1}{P}$	

Um die Übereinstimmung dieser tabellarischen Rechnungen mit der Formel (7) zu zeigen, können wir schreiben:

$$-\frac{1}{P} = -\frac{74^2}{459} - \frac{117^2}{257} - \frac{77^2}{263} - \frac{76^2}{280}$$
$$= 0 - 12 - 53 - 23 - 21 = -109$$

Wir rechnen nun, mit Zuziehung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers $m = 1{,}21''$ nach (8a) § 65. S. 169 den mittleren Fehler M der Seite s:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 1{,}21\sqrt{109} = \pm 12{,}6^{cm} = 0{,}126^{m} \tag{9}$$

Die Seite $s = NG$ kann man aus den bei (10) S. 170 gegebenen Coordinaten berechnen, $s = 10\,068{,}252^{m}$, also mit Zusetzung von (9):

$$\text{Seite } NG = 10068{,}252^{m} \pm 0{,}126^{m}. \tag{10}$$

Anmerkung über die Anwendung des Rechenschiebers.

Der mittlere Fehler der Rechnung mit dem gewöhnlichen 25 Centimeter langen Rechenschieber beträgt etwa 1 : 300, und das ist zu Eliminationen mit 2—3stelligen Zahlen ausreichend.

Die Eliminationen und die damit verwandten Berechnungen in § 65. und § 65a. sind, wie die meisten kleineren Zahlenrechnungen in diesem Buche, lediglich mit dem Rechenschieber gemacht, und dagegen wird *sachlich* nichts einzuwenden sein. Dagegen entstehen *formelle* Übelstände, wenn man solche Berechnungen durch den Druck veröffentlicht.

Z. B. heisst auf Seite 64 der erste Subtrahend — 208 und auf Seite 172 steht dafür — 207. Letzteres ist das richtigere, denn die genaue Ausrechnung ist $-\frac{308}{459}\,308 = -206{,}7$. Der Fehler 208 statt 207 bleibt in dem Schlussresultat unschädlich.

Da es unsere Absicht war, in diesem Buche die Anwendung des Rechenschiebers praktisch zu zeigen, mussten wir *wirkliche* Rechnungen dieser Art vorführen, und nicht etwa solche, welche *nachher* logarithmisch verbessert sind. Es war notwendig, unverfälschte Originalrechnungen mitzuteilen, und dabei kleine formelle Widersprüche zu dulden, welche bei logarithmischen Rechnungen in einem Druckwerke nicht zulässig wären.

§ 66. Genäherte Behandlung der Richtungskorrektionen z.

Die im bisherigen behandelte strenge Eliminierung der verschiedenen Richtungskorrektionen z auf den festen Punkten (bei äusseren Richtungen) macht die Ausgleichung ziemlich umständlich. Wenn ein gemessener Richtungssatz auf mehrere feste Strahlen endgültig orientiert ist, so darf man nun einen neuen Strahl nicht, wie man beim ersten Blick glauben könnte, schlechthin als unabhängige *ein*gewichtige Richtungsmessung in die weitere Ausgleichung einführen, sondern man muss, wenn man dem angenommenen Prinzip *streng* folgen will, einer solchen neuen äusseren Richtung ein Gewicht $\frac{s}{s+1}$ geben, welches von der Zahl s der festen Strahlen abhängt (vgl. (14) § 63. S. 162). Bei mehr als einer neuen Richtung reicht sogar die Annahme von

Einzelgewichten der neuen Strahlen nicht aus; man muss hier, nach (19) § 63. S. 163, eine Zusatzfehlergleichung mit dem fingierten Gewicht $-\frac{1}{s+s'}$ einführen.

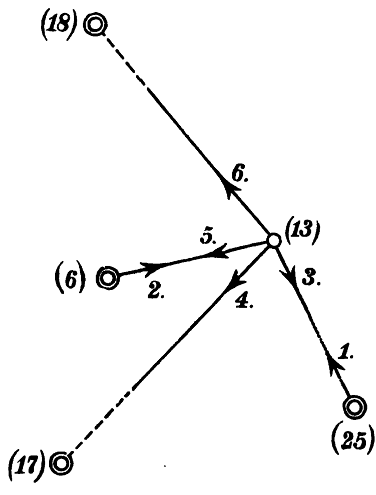
Nun enthält aber das Prinzip, aus welchem alles dieses folgt, selbst schon die in Wirklichkeit nicht erfüllte Annahme, dass alle gegebenen Punkte und gegebenen Richtungen *fehlerfrei* seien. Bei der fortgesetzten Punkteinschaltung rücken die Richtungsmessungen und die Coordinaten von dem Rang fehlerhafter Grössen allmählich zu dem Range fehlerfreier Grössen vor, was nur insofern einen Sinn hat, als durch Konzentrierung zahlreicher Messungen in je eine Ausgleichung allerdings die Fehler sich teilweise aufheben und vermindern.

Wenn nun aber die dem ganzen Verfahren zu Grunde liegende Annahme nur genähert gilt, so ist es auch gerechtfertigt, in der Ausgleichung selbst passende Näherungen eintreten zu lassen.

Die einfachste Näherungsannahme besteht darin, dass alle Richtungen gleichgewichtig in die Ausgleichung eingeführt werden.

Wir verfolgen dieses weiter an der Hand eines Zahlenbeispiels aus der Preussischen Kataster-Anweisung IX. vom 25. Oktober 1881, S. 187—190.

Fig. 19.
Bestimmung des Punktes (13).
Massstab 1 : 30 000.



Es handelt sich um einen Punkt (13), welcher durch innere und äussere Richtungen bestimmt wird. Wie Fig. 19. zeigt, ist dieser Punkt mit 4 gegebenen Punkten (25), (17), (6), (18) durch 6 gemessene Richtungen verbunden, nämlich 2 äussere Richtungen 1. 2. und 4 innere Richtungen 3. 4. 5. 6. Die festen Anschluss-Strahlen, welche in den äusseren Punkten benützt worden sind, wurden in der Figur weggelassen; es kann also z. B. die Richtung 1. den Sinn haben, dass in (25) zuerst der feste Punkt (17), und dann der neue Punkt (13) angezielt wurden. Jedenfalls sollen die äusseren Richtungen als endgültig orientiert angenommen werden, und um die *Anzahl* der in einem äusseren Punkte benützten festen Strahlen kümmern wir uns auch nicht weiter.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte und zugleich auch die genäherten Coordinaten des zu bestimmenden Punktes (13) sind:

Punkt	Ordinate Y*)			Abscisse X	
(25)	× 44 276,21ᵐ	oder	= — 55 723,79ᵐ	+ 21 591,03ᵐ	(1)
(17)	× 43 114,56	„	= — 56 885,44	+ 21 345,08	
(6)	× 43 282,03	„	= — 56 717,97	+ 22 079,51	
(18)	× 43 210,38	„	= — 56 789,62	+ 23 094,54	
(13)	$(Y) =$ × 43 949,96	„	= — 56 050,04	$(X) =$ + 22 239,44	

*) Das kleine Kreuz × dient bei der Landesaufnahme und bei der Katastervermessung als Zeichen für dekadische Ergänzung, z. B.:

× 44 276,21 = 44 276,21 — 100 000 = — 55 723,79.

Die gemessenen Richtungen sind:

Äussere Richtungen, nach festen Strahlen orientiert:

1.	153° 17′ 25″	$\pm$ 180°	=	333° 17′ 25″	(2)
2.	256 32 6	$\pm$ 180	=	76 32 6	

Innere Richtungen, willkürlich orientiert:

3.	0° 0′ 9″	(3)
4.	69 45 25	
5.	103 15 38	
6.	165 52 22	

Wir ziehen es jedoch vor, auch die inneren Richtungen sofort genähert zu orientieren, wozu die äussere Richtung 1. oder 2., oder ein beliebiger Näherungswert, z. B. das aus den Coordinaten des Punktes (25) und den Näherungs-Coordinaten des Punktes (13) berechnete Azimut 153° 17′ 26″ dienen kann. Wir erhalten auf diese Weise:

Innere gemessene Richtungen, genähert orientiert:

3.	0° 0′ 0″	+ 153° 17′ 26″	=	153° 17′ 26″	(4)
4.	69 45 25	+ 153 17 26	=	223 2 51	
5.	103 15 38	+ 153 17 26	=	256 33 4	
6.	165 52 22	+ 153 17 26	=	319 9 48	

Nun berechnet man, aus den unter (1) mitgeteilten Coordinaten, alle 5 in Betracht kommenden Azimute, und stellt sie mit den orientierten Richtungsmessungen zusammen, wodurch die Absolutglieder l der Fehlergleichungen sich als Differenzen ergeben:

	Äussere Richtungen beobachtet:	trigon. Azimut genähert:			
von (25) nach (13)	1. = 333° 17′ 25″	333° 17′ 26″	$l_1 = +\ 1''$		(5)
„ (6) „ (13)	2. = 76 32 6	76 32 4	$l_2 = -\ 2$		
	Innere Richtungen beobachtet:	**trigon. Azimut genähert:**		l'	
von (13) nach (25)	3. = 153° 17′ 26″	153° 17′ 26″	$l_3 = \ 0''$	+ 33	(6)
„ (13) „ (17)	4. = 223 2 51	223 2 52	$l_4 = +\ 1$	+ 34	
„ (13) „ (6)	5. = 256 33 4	256 32 4	$l_5 = -\ 60$	— 27	
„ (13) „ (18)	6. = 319 9 48	319 8 36	$l_6 = -\ 72$	— 39	
			Mittel	— 33	

Nun kommt die Berechnung der Coëfficienten a b nach der Hülfstafel S. [8] und [9] des Anhangs, und zwar wollen wir so wenig als möglich Stellen schreiben, und daher die Azimute sogar auf 1° abrunden.

Nr.	φ	$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	R	$a = \frac{\mathfrak{x}}{R}$	$b = \frac{\mathfrak{y}}{R}$	a'	b'	
1.	333°	+ 9,4	+ 18,4	0,73km	+ 13	+ 25			(7)
2.	77	— 20,1	+ 4,6	0,69	— 29	+ 7			
3.	333	+ 9,4	+ 18,4	0,73	+ 13	+ 25	+ 23	+ 17	(8)
4.	43	— 14,1	+ 15,1	1,22	— 12	+ 12	— 2	+ 4	
5.	77	— 20,1	+ 4,6	0,69	— 29	+ 7	— 19	— 1	
6.	139	— 13,5	— 15,6	1,13	— 12	— 14	— 2	— 22	
				Summe	— 40	+ 30			
				Mittel	— 10	+ 8			

Für die *inneren* Richtungen (8) sind die Mittelwerte der a und b gebildet, ebenso wie oben (6) bei den l. Subtrahiert man diese Mittelwerte von den Einzelwerten (der *inneren* Richtungen), so bekommt man die reduzierten Fehlergleichungen nach § 61. S. 152.

Das Gesammtsystem aller Fehlergleichungen ist nun:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= +13\,x + 25\,y + 1 \\ v_2 &= -29\,x + 7\,y - 2 \\ v_3 &= +23\,x + 17\,y + 33 \\ v_4 &= -2\,x + 4\,y + 34 \\ v_5 &= -19\,x - 1\,y - 27 \\ v_6 &= -2\,x - 22\,y - 39 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Bei so einfachen Zahlen macht sich nun auch die Ausrechnung der $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. sehr einfach:

a	b	l	a^2	b^2	l^2	$a\,b$	$a\,l$	$b\,l$	
+13	+25	+1	169	625	1	325	13	25	
−29	+7	−2	841	49	4	−203	58	−14	
+23	+17	+33	529	289	1089	391	759	561	
−2	+4	+34	4	16	1156	−8	−68	136	
−19	−1	−27	361	1	729	19	513	27	
−2	−22	−39	4	484	1521	44	78	858	
			1908	1464	4500	779 −211	1421 −68	1607 −14	
						+568	+1353	1585	(10)
			$[a\,a]$	$[b\,b]$	$[l\,l]$	$[a\,b]$	$[a\,l]$	$[b\,l]$	

Zur Elimination könnte man nun wieder eine Stelle abwerfen, denn wenn z. B. der letzte Wert $l = 39{,}5''$ wäre statt $39''$, was ja wohl sein kann, da wir nur auf $1''$ genau gerechnet haben, so würde das letzte $l^2 = 1560$ statt 1521. Statt Stellen geradezu abzuwerfen, thut man aber bei solchen Rechnungen besser daran, dieselben durch Nullen auszufüllen, damit bei der Gewichts- und Fehler-Berechnung die alte Stellenzahl, auf welche es sehr ankommt, erhalten bleibt, und man nicht genötigt ist, neue Masseinheiten in den Gewichten und mittleren Fehlern zu berücksichtigen.

Wir machen nun die Elimination mit den Coëfficienten (10) in folgender abgekürzter Form mit dem Rechenschieber, ohne auf die Schärfe der letzten Stelle Gewicht zu legen:

a	b	l	b	a	l	
+1908	+568	+1353	+1464	+568	+1585	
	+1464	+1585		+1908	+1353	
	−169	−404		−220	−615	
		+4500			+4500	
		−960			−1720	
	+1295	+1181		+1688	+738	
$y = -0{,}91^{dm}$		+8540			+2780	$x = -0{,}44^{dm}$ (11)
		−1080			−320	
		+2460			+2460	

Damit kann man das Resultat zusammensetzen:

Näherungs-Coordinaten	$(Y) = -56\,050{,}040^m$	$(X) = +22\,239{,}440^m$
Verbesserungen	$-0{,}091$	$-0{,}044$
Ausgeglichen	$Y = -56\,050{,}131^m$	$X = +22\,239{,}396^m$ (12)

Sobald man die ausgeglichenen Coordinaten (12) hat, berechnet man mit denselben alle Azimute neu, und macht die Vergleichung mit den Beobachtungen, ganz in der Form, wie vor der Ausgleichung bei (5) und (6).

Äussere Richtungen beobachtet:	trigon. Azimute ausgeglichen:	v		v^2	
von (25) nach (13) 1. = 333° 17′ 25″	333° 16′ 58″	− 27″		729	754
„ (6) „ (13) 2. = 76 32 6	76 32 11	+ 5		25	
Innere Richtungen beobachtet:	**trigon. Azimute ausgeglichen:**	v'	$v = v' + 35$	v^2	
von (13) nach (25) 3. = 153° 17′ 26″	153° 16′ 58″	− 28	+ 7	49	1634
„ (13) „ (17) 4. = 223 2 51	223 2 46	− 5	+ 30	900	
„ (13) „ (6) 5. = 256 33 4	256 32 11	− 53	− 18	324	
„ (13) „ (18) 6. = 319 9 48	319 8 54	− 54	− 19	361	
	Summe	− 140	+ 0		2388
	Mittel $-z =$	− 35	soll = 0		$= [v\,v]$

Die hier berechnete Summe $[vv] = 2388$ stimmt mit der Summe $[ll.2] = 2460$ insofern hinreichend, als überall nur auf 1^{mm} genau in den Coordinaten gerechnet wurde, und auch die Azimute nicht schärfer als 1″ angesetzt sind.

Nun hat man den mittleren Gewichtseinheitsfehler rund:

$$m = \sqrt{\frac{2400}{3}} = \pm 28'' \tag{13}$$

Der Nenner ist hiebei $= 6 - 3 = 3$, weil 3 Unbekannte, nämlich x y und z, vorhanden sind.

Bei der Elimination (11) hat man auch $p_y = 1295$ und $p_x = 1688$, also:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{28}{\sqrt{1295}} = \pm 0{,}79^{dm} \quad \text{und} \quad m_x = \frac{28}{\sqrt{1688}} = \pm 0{,}69^{dm}$$

also im ganzen, mit (12), das Hauptresultat:

$$\left.\begin{array}{ll} Y = -56\,050{,}131^m & X = +22\,239{,}396^m \\ \pm 0{,}079^m & \pm 0{,}069^m \end{array}\right\} \tag{14}$$

Bei der vorstehenden Ausgleichung sind die äusseren und die inneren Richtungen *gleichgewichtig* behandelt worden. Dass dieses nicht streng richtig ist, haben wir gleich zu Anfang bemerkt; wenn man nun aber doch einmal sich auf Näherungen einlässt, könnte man wohl auch bei den Gewichten sich der Wahrheit etwas mehr nähern. Nach (14) § 63. S. 162 soll eine äussere, auf s feste Strahlen bereits orientierte Richtung das Gewicht $p = \frac{s}{s+1}$ bekommen. Dieses giebt:

$s =$	1	2	3	4	∞
$p =$	$\frac{1}{2} = 0{,}500$	$\frac{2}{3} = 0{,}667$	$\frac{3}{4} = 0{,}750$	$\frac{4}{5} = 0{,}800$	1
$\sqrt{p} =$	0,707	0,817	0,866	0,894	1,000

Da man in den meisten Fällen wohl mehr als *einen* festen Strahl hat, also s grösser als 1 ist, könnte die Annahme $p = 1$ als eine genügende erscheinen; nun kommt aber noch hinzu, dass alle in der Unsicherheit der gegebenen Coordinaten begründeten Fehler, welche in der Theorie vernachlässigt werden, gerade bei den äusseren Richtungen am schädlichsten einwirken, und dass es auch für das formelle Zusammen-

stimmen in der *Weiter*führung, wo die ausgeglichenen inneren Strahlen nun die Rollen fester Strahlen übernehmen, dringend zu wünschen ist, die inneren Richtungen bei der Ausgleichung möglichst unverändert zu lassen. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, ein für allemal die äusseren Richtungen mit *halbem* Gewicht einzuführen.

Hiernach bekommen wir folgende neue Rechnung an Stelle der früheren (10) bis (14):

	a^2	b^2	l^2	$a\,b$	$a\,l$	$b\,l$	
Äussere Richtungen	169	625	1	+ 325	+ 13	+ 25	
	841	49	4	− 203	+ 58	− 14	
	1010	674	5	+ 122	+ 71	+ 11	
Halbes Gewicht giebt	505	337	2	+ 61	+ 36	+ 6	
Innere Richtungen	529	289	1089	391	759	561	(15)
	4	16	1156	− 8	− 68	136	
	361	1	729	19	513	27	
	4	484	1521	44	78	858	
	1403	1127	4497	+ 507	+ 1318	+ 1588	
	$[a\,a]$	$[b\,b]$	$[l\,l]$	$[a\,b]$	$[a\,l]$	$[b\,l]$	

a	b	l	b	a	l	
+ 1403	+ 507	+ 1318	+ 1127	+ 507	+ 1588	
	+ 1127	+ 1588		+ 1403	+ 1318	
	− 183	− 478		− 228	− 710	
		+ 4497			+ 4497	
		− 1240			− 2230	
$y = -1{,}17^{dm}$	+ 944	+ 1110		+ 1175	+ 618	$x = -0{,}52^{dm}$
		+ 3257			+ 2267	
		− 1300			− 320	
		+ 1957			+ 1947	

Näherung	− 56 050,040^m	+ 22 239,440^m
Verbesserungen	− 0,117	− 0,052
Ausgeglichen	− 56 050,157^m	+ 22 239,388^m

(16)

Mit den ausgeglichenen Coordinaten werden alle Azimute neu berechnet und dann hat man die Fehlerverteilung:

	Äussere Richtungen beobachtet:	trigon. Azimute ausgeglichen:		v	v^2	$p\,v^2$
1.	= 333° 17′ 25″	333° 16′ 50″		− 35	1225	
2.	= 76 32 6	76 32 12		+ 6	36	
					1261	630
	Innere Richtungen beobachtet:	**trigon. Azimute ausgeglichen:**	v'	v	v^2	
3.	= 153° 17′ 26″	153° 16′ 50″	− 36	+ 0	0	
4.	= 223 2 51	223 2 44	− 7	+ 29	841	1293
5.	= 256 33 4	256 32 12	− 52	− 16	256	
6.	= 319 9 48	319 8 58	− 50	− 14	196	
			− 145		1293	1923 = $[v\,v]$
			− 36			

Dieses stimmt hinreichend mit $[l\,l\,.\,3] = 1947$ der Elimination.

Weiter wird:
$$m = \sqrt{\frac{1923}{3}} = \pm 25'' \tag{17}$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{944}} = \pm 0{,}82^{dm} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{1175}} = \pm 0{,}74^{dm}$$

Also im ganzen:
$$\left.\begin{array}{ll} Y = -56\,050{,}157^m & X = +22\,239{,}388^m \\ \quad \pm 0{,}082^m & \quad \pm 0{,}074^m \end{array}\right\} \tag{18}$$

Vergleicht man die Resultate (17) und (18) der zweiten Ausgleichung mit den entsprechenden Resultaten (13) und (14) der ersten Ausgleichung, so wird $m = 25''$ etwas kleiner gegen $m = 28''$, die Coordinatenfehler sind dagegen etwas gewachsen, und die Coordinatenänderungen $0{,}026^m$ und $0{,}008^m$ betragen nur etwa im Mittel $\frac{1}{5}$ der mittleren Fehler.

Im ganzen halten wir die zweite Ausgleichung mit halben Gewichten der äusseren Richtungen für besser als die erste Ausgleichung mit lauter gleichen Gewichten. Eine nennenswerte Mehrarbeit an Rechnung wird durch die halben Gewichte nicht verursacht, und — sofern überhaupt *näherungsweise* hier gerechnet werden soll — ist die Annahme $p = \frac{1}{2}$ immerhin mehr zu empfehlen als die Annahme $p = 1$.

Für die Annahme, alle äusseren Richtungen mit halbem Gewichte einzuführen, spricht auch noch folgender Umstand:

Wenn die ganze Ausgleichung sich auf *ein* Dreieck reduziert, indem zwei Punkte A und B gegeben sind, und ein Punkt P bestimmt wird, dann wollen wir annehmen, es werden die drei Winkel des Dreiecks ABP alle gleich genau gemessen; folglich besteht die Ausgleichung (nach § 10. S. 26—27 oder § 44. S. 106 - 107) darin, dass der Summenwiderspruch auf alle drei Winkel *gleich* verteilt wird.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man nach dem vorstehenden Beispiel (15) bis (16) ausgleicht, d. h. wenn man den äusseren Richtungen *halbes* Gewicht giebt, während die Rechnung mit gleichen Gewichten, nach (10)—(14), ein anderes Resultat geben würde.

Kapitel III.

Ausgleichung der Triangulierungsnetze.

§ 67. Bedingungsgleichungen.

Wir betrachten ein Dreiecksnetz, in welchem *eine* Grundlinie gemessen ist, mit folgenden geometrischen Verhältnissen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Anzahl der Eckpunkte} \ldots & p \\ \text{Anzahl aller Verbindungslinien} \ldots & l \\ \text{Anzahl der nur einseitig beobachteten Verbindungslinien} \ldots & l' \\ \text{Also Anzahl der beiderseitig beobachteten Verbindungslinien} \ldots & l - l' \end{array}\right\} \tag{1}$$

Je nachdem Winkelmessungen oder Richtungsmessungen vorliegen, habe man:

$$\text{Anzahl der Winkelmessungen} \ldots \ldots W \tag{2}$$

oder
$$\text{Anzahl der Richtungsmessungen} \ldots \ldots R \tag{3}$$

Die Richtungsmessungen sollen hiebei für jede Station in je einem vollen Satze ausgeführt sein.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass man Winkelmessungen habe, und nachher den Fall der Richtungsmessungen behandeln.

Es handelt sich um die Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen. Diese ist gleich der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, denn jede überschüssige Beobachtung giebt eine selbständige Messungsprobe. Wir bezeichnen:

Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen . . . . r (4)

Die Anzahl der notwendigen Winkel findet man so: Unter Annahme *einer* Basis braucht man zur gegenseitigen Festlegung der 3 ersten Punkte 2 Winkel, und für jeden folgenden Punkt abermals 2 Winkel, also:

für die 3 ersten Punkte	2 Winkel	
„ den 4ten Punkt	2 „	$(p-3)$ Punkte
„ „ 5ten „	2 „	
. . . .		
für den p^{ten} Punkt	2 Winkel	
Summe $2+(p-3)\ 2$ Winkel.		

Wenn also W Winkel gemessen sind, so sind $W-(2+(p-3)\,2)$ überschüssig, oder

$$r = W - 2p + 4 \text{ Bedingungsgleichungen.} \tag{5}$$

Diese Bedingungsgleichungen teilen sich in zwei wesentlich verschiedene Gattungen, nämlich Winkelgleichungen und Seitengleichungen.

Die Winkelgleichungen werden z. B. geliefert durch die Bedingung, dass die Winkelsumme eines Dreiecks $= 180° +$ Excess sei, oder dass die Summe aller um um einen Punkt herum gemessenen Winkel $= 360°$ sei, u. s. w.

Die Winkelgleichungen zerfallen abermals in zwei verschiedene Arten, nämlich 1) Horizontgleichungen oder Stationsgleichungen, und 2) Dreiecksgleichungen oder allgemeiner Polygongleichungen.

Die Horizontgleichungen sind sehr einfacher Art. Auf einer Station mit s Strahlen sind $s-1$ Winkel zur Festlegung dieser Strahlen unumgänglich nötig; sind mehr Winkel, etwa s' Winkel gemessen, so hat man auf dieser Station

$$s' - s + 1 \text{ Stationsgleichungen.} \tag{6}$$

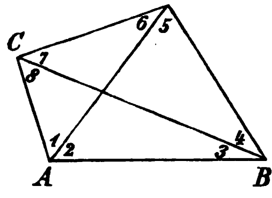
Diese Art von Gleichungen tritt bei grossen Ausgleichungen im Netze nicht mehr auf, da man sie auf den einzelnen Stationen für sich behandelt. Bei Richtungsbeobachtungen in ganzen Sätzen giebt es überhaupt keine Stationsgleichungen.

In Betreff der Dreiecksgleichungen oder Polygongleichungen bemerkt man zuerst, dass *einseitig* beobachtete Linien hier nicht in Betracht kommen, z. B. in einem Dreieck, in welchem nur auf zwei Ecken Messungen gemacht sind, hat man nur zwei Winkel, folglich keine Summenprobe. Weiter hat man hier zu beachten, dass die Anzahl der unabhängigen Dreiecks-, bzw. Polygongleichungen im allgemeinen *nicht* gleich der Anzahl der Dreiecke selbst ist, auch wenn die einseitig beobachteten Seiten ausgeschieden sind.

Wenn z. B. in einem Viereck mit zwei Diagonalen, entsprechend Fig. 1. (S. 181) 8 Winkel gemessen sind, so kann man zunächst für 3 der entstehenden 4 Dreiecke die Dreiecksgleichungen aufstellen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}(1)+(2)+(8)+(3)&=180^\circ\\(4)+(5)+(6)+(7)&=180^\circ\\(1)+(6)+(7)+(8)&=180^\circ\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Fig. 1.
Winkelgleichungen im Viereck.



Durch Addition der zwei ersten und Subtraktion der dritten Gleichung findet man:

$$(2)+(3)+(4)+(5)=180^\circ \quad (8)$$

d. h. wenn 3 Dreiecke schliessen, so schliesst das 4te von selbst, und Fig. 1. liefert nicht 4, sondern nur 3 unabhängige Dreiecksgleichungen.

Man bemerkt ferner, dass, wenn die einzelnen Dreiecke auf 180° schliessen, auch von selbst das ganze Viereck auf 360° schliesst; und man kann auch statt der 3 Gleichungen (7) nur 2 davon nebst der Vierecksgleichung:

$$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)=360^\circ \quad (9)$$

als Bedingungsgleichungen der betreffenden Art aufstellen.

Sobald man sich überzeugt hat, dass jede Polygongleichung wie (9) denselben Dienst leistet, wie eine Dreiecksgleichung, sofern überhaupt verschiedenartige Formierung der fraglichen Polygongleichungen möglich ist, so kommt man auch zur Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Polygongleichungen in folgender Weise: Man denkt sich einen geschlossenen Zug über alle p Punkte gelegt. Dieser Zug umfasst auch p Linien. Da man $l-l'$ Linien hat, welche hier in Betracht kommen (Ausscheidung der l' einseitig beobachteten Linien), so sind $(l-l')-p$ Linien von dem Zuge noch nicht getroffen, und jede dieser Linien giebt eine neue Gleichung. Man hat also

Polygonzug mit p Linien giebt . . . 1 Gleichung,
die übrigen $(l-l')-p$ Linien geben . . . $(l-l')-p$ Gleichungen,

also im ganzen:

$$1+(l-l')-p \text{ Dreiecksgleichungen oder Polygongleichungen.} \quad (10)$$

Wir gehen über zu den *Seitengleichungen.*

Die Existenz und die Zahl der Seitengleichungen erhellt am besten aus folgender Betrachtung: Man unterscheidet „Dreiecksnetz“ und „Dreieckskette“, indem man Dreieckskette eine solche Aneinanderreihung von Dreiecken nennt, bei welcher man von irgend einem Dreieck zu einem andern nur auf *einem* bestimmten Weg gelangen kann, während bei einem Dreiecksnetz verschiedene Wege möglich sind. Nach dieser Auffassung ist ein Viereck mit einer Diagonale eine Kette, ein Viereck mit zwei Diagonalen ein Netz. Ob die Seiten sich schneiden oder nicht, ist nicht entscheidend; wenn die Seiten sich schneiden, hat man jedenfalls ein „Netz“, es giebt aber auch „Netze“, ohne Diagonalenschnitte, z. B. mit Centralsystemen, vgl. das Netz von § 70.

Wenn man in einer Kette noch *einen* weiteren Winkel misst, wodurch ein Zielstrahl eingefügt wird, welcher die Kette zum Netz macht, so entsteht insofern eine neue Bedingungsgleichung, als man die Länge der neu eingefügten Seite nun zweifach ausdrücken kann. Jede nicht zum Zusammenhang der Kette nötige Seite giebt eine solche Seitengleichung. Eine Dreieckskette hat keine Seitengleichungen, es ist also die Anzahl der Seitengleichungen eines Dreiecksnetzes gleich der Anzahl von Seiten, welche gestrichen werden müssen, damit das Netz in eine Kette übergeht.

Um eine Formel hiefür zu bilden, überlegt man, dass zum Zusammenhang der 3 ersten Punkte 3 Linien und für jeden folgenden Punkt noch 2 Linien nötig sind, also:

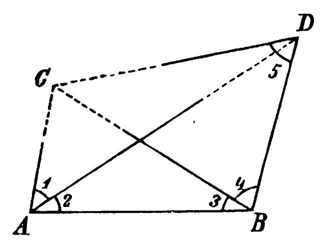
für die 3 ersten Punkte	3 Linien	
„ den 4ten Punkt	2 „	(p — 3) Punkte
„ „ 5ten „	2 „	
. . . .		
für den p^{ten} Punkt	2 Linien	

Summe $3 + (p - 3)\,2$ Linien $= 2p - 3$ Linien.

Hat man l Linien, so sind davon $l - (2p - 3)$ überschüssig, folglich bestehen

$$l - 2p + 3 \text{ Seitengleichungen} \tag{11}$$

Fig. 2.
Seitengleichung im Viereck.



Die Existenz der Seitengleichungen soll an dem einfachen Beispiel eines Vierecks erläutert werden. In Fig. 2. seien die angedeuteten 5 Winkel gemessen. Die vorstehende Formel (11) giebt hier mit $l = 6$ und $p = 4$:

$$6 - 8 + 3 = 1 \text{ Seitengleichung.}$$

Obgleich keines der 4 Dreiecke von Fig. 2. in Bezug auf 180° geschlossen ist, hat das Viereck doch eine Probe; man kann nämlich die Seite CD aus AB zweifach ableiten:

$$1)\quad CD = AB \frac{\sin((1)+(2))}{\sin((1)+(2)+(3))} \frac{\sin(4)}{\sin(5)}$$

$$2)\quad CD = AB \frac{\sin(2)}{\sin((2)+(3)+(4))} \frac{\sin(4)}{\sin((4)+(5))}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Seiten-Bedingungsgleichung:

$$\frac{\sin((1)+(2))\,\sin((2)+(3)+(4))\,\sin((4)+(5))}{\sin((1)+(2)+(3))\,\sin(2)\,\sin(5)} = 1$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man mit den 5 Winkeln (1) (2) (3) (4) (5) das Viereck Fig. 2. nicht ohne Widerspruch konstruieren, sondern man wird bei der Konstruktion in irgend einem Punkt ein fehlerzeigendes Dreieck erhalten.

Im Zusammenhang haben wir nun, indem von den Stationsgleichungen abgesehen wird, folgendes:

$$W \text{ Winkelmessungen, } p \text{ Punkte, } l \text{ Linien, darunter } l' \text{ einseitig beobachtet} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} l - 2p + 3 &\text{ Seitengleichungen,}\\ (l - l') - p + 1 &\text{ Dreiecks- oder Polygongleichungen,}\\ r = 2l - l' - 3p + 4 = W - 2p + 4 &\text{ Bedingungsgleichungen überhaupt.}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wenn alle Seiten beiderseitig beobachtet sind, so ist $l' = 0$ und dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} l - 2p + 3 &\text{ Seitengleichungen,}\\ l - p + 1 &\text{ Dreiecks- oder Polygongleichungen,}\\ r = 2l - 3p + 4 = W - 2p + 4 &\text{ Bedingungsgleichungen überhaupt.}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Diese Betrachtungen gelten zunächst für Winkelmessungen, sie lassen sich aber sofort auf Richtungsmessungen übertragen. Setzt man Richtungsmessungen mit je *einem* Satze für eine Station voraus, oder Messungen mit vollständigen Sätzen, deren arithmetische Mittel wie einfache Messungen in die Ausgleichung eingehen, so braucht

man nur zu überlegen, dass auf jedem Punkt eine Richtung mehr vorhanden ist, als Winkel, dass also die oben eingeführte Zahl W der Winkel $= R - p$ ist. Mat hat also:

für R Richtungen, p Punkte, l Linien, worunter l' einseitige, (12*)
folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ (l - l') - p + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - l' - 3p + 4 = R - 3p + 4 & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \quad (13^*)$$

Wenn alle Linien l hin und her gemessen sind, also $l' = 0$ ist, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ l - p + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - 3p + 4 = R - 3p + 4 & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \quad (14^*)$$

Dabei ist $2l = r$, denn wenn alle Linien hin und her gemessen sind, so hat man doppelt so viel Richtungen als Linien. Dagegen ist bei (13*): $2l - l' = R$, und mit $W = R - p$ lassen sich auch die Beziehungen $2l - l' - p = W$ und $2l - p = W$ bei (13) und (14) auf (13*) und (14*) zurückführen und unmittelbar einsehen.

Die im bisherigen behandelte Methode der Bestimmung der Anzahl der einzelnen Arten von Bedingungsgleichungen ist zuerst von *Gauss* angewendet und von *Gerling* in dessen „Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie“ mitgeteilt worden.

(Eine andere Anleitung zur Abzählung der Bedingungsgleichungen nach geometrischer Anschauung, speziell für Richtungsmessungen, giebt *Bessel* auf S. 139 und 140 der Gradmessung in Ostpreussen.)

Da die Anzahl der Bedingungsgleichungen hauptsächlich massgebend ist für die Arbeit einer Triangulierungsausgleichung, indem eine ebenso grosse Zahl von Gleichungen aufgelöst werden muss, so darf diese Zahl nicht zu sehr anwachsen. Die Gradmessung in Ostpreussen hat z. B. 31 Bedingungsgleichungen. Doch sind auch schon Ausgleichungen mit 80 und mehr Bedingungsgleichungen gemacht worden.

In neuerer Zeit ist man von der Anschauung zurückgekommen, dass der Wert einer Triangulierung hauptsächlich in einer (oft systemlosen) Häufung von Bedingungen, die alle zusammen auszugleichen wären, bestehen; z. B. die neueren grundlegenden Ketten und Netze der Preussischen Landesaufnahme von Oberst *Schreiber* haben nur eine mässige Zahl von solchen Gleichungen.

§ 68. Aufstellung und Umformung der Bedingungsgleichungen.

Wenn ein Netz sich in lauter Dreiecke zerlegen lässt, so lassen sich alle Winkelgleichungen unmittelbar anschreiben; die Seitengleichungen erhält man, indem man zuerst so viele Seiten streicht, dass aus dem Netze eine Kette wird, und dann jede gestrichene Seite zweifach ausdrückt.

Wenn die Dreiecksseiten sich nicht schneiden, so liefert jeder nach allen Richtungen von Dreiecken umgebene Knotenpunkt eine Seitengleichung, die man durch Betrachtung der rings um den Punkt herumliegenden Dreiecke erhält (vgl. das Netz von § 70.). Wenn die Seiten sich schneiden, so liefert jeder Diagonalenschnitt eine Seitengleichung.

Wenn das Netz sich in einzelne Dreiecke zerlegen lässt, so werden sich alle Gleichungen leicht anschreiben lassen. Wir betrachten zunächst nur solche einfache Fälle.

Wir verstehen nun unter (1) (2) (3) . . . die beobachteten Winkel oder Richtungen, und unter v_1 v_2 v_3 . . . die an ihnen anzubringenden Verbesserungen; die ausgeglichenen Werte sind dann:

$$(1) + v_1 = [1] \qquad (2) + v_2 = [2] \qquad (3) + v_3 = [3] \ldots \tag{1}$$

Die Bedingungsgleichungen sollen in lineare Form gebracht werden:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{2}$$

Man muss hiezu die Bedingungsgleichungen, sofern sie nicht an und für sich schon linear sind, durch Differentiieren linear machen.

Wir betrachten vorerst nur Winkelbeobachtungen, weil die geometrischen Bedingungen sich unmittelbar nur auf Winkel beziehen, und die linearen Winkelbedingungsgleichungen sich nachher sofort in Richtungsbedingungsgleichungen umsetzen lassen, indem man jeden Winkel in zwei Richtungen zerfällt.

I. Dreiecksgleichungen (und Polygongleichungen).

Hat man eine Bedingung:

$$\text{Es } \textit{soll} \text{ sein: } (1) + (2) + (3) - (180° + \varepsilon) = 0 \tag{3}$$

so ist diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt, sondern es wird sich ein Widerspruch einstellen:

$$\text{Es } \textit{ist:} \quad (1) + (2) + (3) - (180° + \varepsilon) = w \tag{4}$$

Um diesen Widerspruch zu heben, fügt man den Beobachtungen (1) (2) (3) die Verbesserungen v_1 v_2. v_3 zu, so dass man hat:

$$(1) + v_1 + (2) + v_2 + (3) + (v_3) = 180° + \varepsilon \tag{5}$$

aus (4) und (5) folgt:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \tag{6}$$

und dieses ist die gewünschte Gleichung. (Kommen mehr als 3 Winkel in der Polygonsumme vor, so bleibt doch die Sache im wesentlichen dieselbe.)

II. Horizontgleichungen.

Wenn z. B. (1) (2) (3) drei gemessene Winkel sind, deren Summe mit dem Winkel (4) zur Probe gemessen wurde, so hat man die Bedingung:

$$\text{Es } \textit{soll} \text{ sein: } (1) + (2) + (3) - (4) = 0 \tag{7}$$

Diese Bedingung sei nicht erfüllt, sondern man habe einen Widerspruch, d. h.:

$$\text{Es } \textit{ist:} \quad (1) + (2) + (3) - (4) = w \tag{8}$$

Dieser Widerspruch soll durch Zufügung der Korrektionen v zu den gemessenen Winkeln gehoben werden, also:

$$(1) + v_1 + (2) + v_2 + (3) + v_3 - ((4) + (v_4)) = 0 \tag{9}$$

Aus (8) und (9) ergiebt sich:

$$v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + w = 0. \tag{10}$$

III. Seitengleichungen.

Es liege die Bedingung vor:

$$\text{Es } \textit{soll} \text{ sein: } \frac{\sin(1) \sin(3) \sin(5)}{\sin(2) \sin(4) \sin(6)} = 1 \tag{11}$$

oder in logarithmischer Form:

Es *soll* sein:

$$\log\sin(1) + \log\sin(3) + \log\sin(5) - \log\sin(2) - \log\sin(4) - \log\sin(6) = 0 \tag{12}$$

Die *Sinus*gleichung (11) oder (12) gilt für ein ebenes und für ein sphärisches Dreiecksnetz.

Die Gleichung (11) wurde logarithmiert, weil die Differentiierung eines mehrfach zusammengesetzten Produktes durch vorhergehende Logarithmierung erleichtert wird. Zugleich steht die Logarithmierung in innigem Zusammenhang mit der praktisch ohnehin nötigen logarithmischen Rechnung.

Wegen der Beobachtungsfehler stellt sich statt (12) folgendes ein: Es *ist:*

$$log\, sin\,(1) + log\, sin\,(3) + log\, sin\,(5) - log\, sin\,(2) - log\, sin\,(4) - log\, sin\,(6) = w \qquad (13)$$

Der Widerspruch w soll durch Beifügung der Korrektionen $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ zu den gemessenen Winkeln (1) (2) ... weggeschafft werden. Wir betrachten vorerst ein einzelnes Glied von (13) und finden nach dem *Taylor*schen Satz:

$$log\, sin\,((1) + v_1) = log\, sin\,(1) + \frac{\mu}{\varrho}\, cotg\,(1)\, v_1 \qquad (14)$$

Hiebei bedeutet $\mu = 0{,}4342945$ den Modulus des *Brigg*schen Logarithmensystems, und der Nenner $\varrho = 206265''$ ist zugesetzt, damit v_1 im letzten Glied von (14) in Sekunden verstanden wird. Durch Ausrechnung findet man:

$$log\, \frac{\mu}{\varrho} = 4.32336 - 10 \qquad \frac{\mu}{\varrho} = 0{,}0000021.055 \qquad (15)$$

Für Einheiten der 7ten Logarithmendecimale ist:

$$log\, \frac{\mu}{\varrho} = 1.32336 \qquad \frac{\mu}{\varrho} = 21{,}055 \text{ (für 7. Dec.)} \qquad (16)$$

oder, was meist bequemer ist, für Einheiten der 6. Logarithmendecimale:

$$log\, \frac{\mu}{\varrho} = 0.32336 \qquad \frac{\mu}{\varrho} = 2{,}1055 \text{ (für 6. Dec.)} \qquad (17)$$

Bezeichnet man diese Coëfficienten kurz mit a, so hat man nach (14):

$$log\, sin\,((1) + v_1) - log\, sin\,(1) = a_1\, v_1 \qquad (18)$$

Dieser Coëfficient a_1 hat eine sehr einfache Bedeutung, welche man erkennt, wenn man $v_1 = 1''$ setzt; damit giebt (18):

$$log\, sin\,((1) + 1'') - log\, sin\,(1) = a_1 \qquad (19)$$

d. h. a_1 ist die aus der logarithmisch-trigonometrischen Tafel zu entnehmende, *einer* Sekunde entsprechende Differenz von *log sin* (1). Wenn z. B. (1) = 43° 0′ ist, so ist nach der Logarithmentafel von *Schrön* S. 462 die Differenz für 10″ bei *log sin*, = 226 Einheiten der 7. Decimale, oder was dasselbe ist, für 1″ Differenz = 2,26 Einheiten der 6. Decimale. (Ein Zahlenbeispiel hiefür wird in § 70. (11) S. 197 gegeben.) Die genauere Rechnung nach (17) giebt $a = + 225{,}79$.

Ein stumpfer Winkel, z. B. (1) = 137° 0′, würde entsprechend geben $a = -225{,}79$.

Streng genommen ist es überflüssig, die Coëfficienten a genauer zu berechnen, als sie diejenige Logarithmentafel liefert, mit welcher man den Widerspruch w rechnet, und mit welcher man nachher das Dreiecksnetz selbst zu berechnen gedenkt; da man aber wegen der verschiedenen im Lauf der langen Rechnung sich häufenden Abrundungsfehler die Coëfficienten der Bedingungsgleichungen gewöhnlich mit mehr Decimalstellen anschreibt, als man schliesslich braucht, so wird man lieber in wichtigen Fällen die Coëfficienten nach (17) genauer berechnen, als weitere Stellen durch Nullen ausfüllen.

Nachdem die Coëfficienten a nach (17) oder (19) bestimmt sind, hat man für die Sinusgleichung (11) die lineare Seitenbedingungsgleichung:

$$a_1\, v_1 - a_2\, v_2 + a_3\, v_3 - a_4\, v_4 + a_5\, v_5 - a_6\, v_6 + w = 0 \qquad (20)$$

Es wird hiebei jedem Coëfficient a das Vorzeichen + oder — vorgesetzt, je nachdem der betreffende Winkel in der ursprünglichen Sinusgleichung (11) im Zähler

oder im Nenner stand, jedoch abgesehen von dem Werte des Coëfficienten *a* selbst, welcher an sich negativ wird, wenn der Winkel stumpf ist. Da eine Willkürlichkeit in Bezug auf Zähler und Nenner stattfindet, so sind auch die Vorzeichen der Coëfficienten *a* nicht absolut, sondern nur in ihren gegenseitigen Beziehungen bestimmt, d. h. schreibt man die ursprüngliche Sinusgleichung umgekehrt, d. h. so:

$$\frac{\sin(2)\sin(4)\sin(6)}{\sin(1)\sin(3)\sin(5)} = 1 \qquad (21)$$

so ändern in (20) alle Coëfficienten und das Absolutglied ihre Vorzeichen, womit die Gleichung (20) an sich doch unverändert bleibt.

Eine besondere Bemerkung ist noch über die Masseinheit für die linearen Seitengleichungen zu machen. In (17) beziehen sich die Coëfficienten und das Absolutglied auf Einheiten der 6. Logarithmendecimale; dieses ist nützlich, aber nicht absolut nötig, man kann statt nach (17) auch nach (16) mit der 7. Logarithmendecimale rechnen.

Zahlreiche Ausgleichungen findet man in Einheiten der 7. Logarithmendezimale bei den linearen Seitengleichungen gemacht, wahrscheinlich infolge der Anleitung, welche *Gauss* selbst für die numerische Rechnung in den 2 Beispielen des „supplementum theoriae combinationis" gegeben hat. Man kann sich aber durch jede Versuchsrechnung überzeugen, dass man mit Einheiten der 7. Logarithmendecimale wegen der Ungleichheit der Coëfficienten im Vergleich mit den Coëfficienten $+1$ und -1 der Winkelgleichungen sehr unbequeme vielstellige Zahlen erhält, ohne an sachlicher Genauigkeit etwas zu gewinnen.

Man braucht überhaupt keine bestimmte Logarithmendecimale als Einheit der linearen Seitengleichungen zu nehmen, sondern man kann die Seitengleichungen mit jeder beliebigen Konstanten multiplizieren.

Eine Bemerkung auf S. 24 der „Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, I. Teil" bespricht diesen Umstand, und nimmt die Coëfficienten geradezu gleich den Cotangenten der Winkel. Dieses hat zur Folge, dass die logarithmischen Absolutglieder w mit $\frac{\varrho}{\mu}$ zu multiplizieren sind (s. oben bei (16)). Für einen Winkel $\alpha = 45°$ wird also hier der Coëfficient $= 1{,}00$, oder es sind die Seitengleichungs-Coëfficienten, für den Mittelwert eines Winkels, den Winkelgleichungs-Coëfficienten in befriedigender Weise gleich gemacht.

Andererseits hat die Rechnung mit Einheiten der 6. Logarithmendecimale den Vorzug der Bequemlichkeit und Anschaulichkeit.

Das Absolutglied w wird unmittelbar nach (13) logarithmisch ausgerechnet.

Eine Probe für die sehr wichtige Berechnung dieses Absolutgliedes w erhält man, wenn man jeden Winkel (1) (2) (3) ... um den dritten Teil des dem betreffenden Dreieck entsprechenden Excesses vermindert, und dann wie oben verfährt. Die Gleichungen (11) (12) (13) gelten in aller Strenge für ebene Dreiecke und für sphärische Dreiecke. Nach dem *Legendre*schen Satze gelten aber ganz gleiche Formeln, wenn man unter (1) (2) (3) ... die um $1/3$ der betreffenden Excesse verminderten Winkel versteht.

Ein Zahlenbeispiel hiefür wird in (10) § 70. gegeben werden.

Es muss noch kurz angedeutet werden, wie die Bedingungsgleichungen für *Richtungsbeobachtungen* aufgestellt werden. Man bildet zu diesem Zweck zuerst die für Winkelbeobachtungen gültigen Gleichungen, und man ist hiezu gezwungen, weil

alle geometrischen Bedingungen eines Netzes sich nur auf Winkel, nicht auf Richtungen beziehen, hat man aber die Bedingungsgleichungen für Winkel, so geht man auf Richtungen über, indem man jede Winkelkorrektion als Differenz zweier Richtungskorrektionen auffasst. Ist z. B. (1) ein Winkel, und (l) und (r) die Richtungen seiner Schenkel, also

$$(1) = (r) - (l) \tag{22}$$

und ist v_1 die Winkelkorrektion, sowie v_l und v_r die entsprechenden Richtungskorrektionen, so besteht die Beziehung:

$$v_1 = v_r - v_l \tag{23}$$

womit man überall v_1 durch v_r und v_l ersetzen kann. Wenn z. B. eine Winkelbedingungsgleichung für ein Dreieck so heisst:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \tag{24}$$

so heisst die entsprechende Richtungsbedingungsgleichung:

$$v_1'' - v_1' + v_2'' - v_2' + v_3'' - v_3' + w = 0 \tag{25}$$

wobei mit v' und v'' Richtungskorrektionen bezeichnet sind.

Für Netze, welche sich nicht in lauter Dreiecke zerlegen lassen, reichen die im Vorstehenden entwickelten Regeln zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen nicht immer aus. Die Winkelsummengleichungen wird man auch hier immer zusammenbringen. Im übrigen ist hier namentlich der Fall von Wichtigkeit, dass ein leeres Polygon von einer Dreieckskette umgrenzt wird. Am sichersten kommt man hier zum Ziel, wenn man zuerst den Zusammenschluss durch Coordinatengleichungen ausdrückt, und diese differentiiert. Das ist die von Oberst *Schreiber* bei der Preussischen Landesaufnahme eingeführte Methode der Polygonschluss-Ausgleichungen (vgl. *Jordan-Steppes*, Deutsches Vermessungswesen I. S. 83—84).

In dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“ von *Zachariae*, deutsch von *Lamp* (Rec. Zeitschr. f. Verm. 1879, S. 52) sind auf S. 156 die Seitengleichungen für Kranzsysteme behandelt durch Einführung fingierter Winkelmessungen und Wiedereliminierung derselben.

§ 69. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck.

(Beim ersten Studium zu übergehen.)

Ebenso wie die Winkelsummen-Bedingungen in verschiedenen Formen ausgedrückt werden konnten (s. § 67. Fig. 1. und Gleichungen (7), (8), (9) S. 181), so kann auch die Bedingung übereinstimmender Seitenberechnung in einem Viereck in verschiedene Formen festgelegt werden, und es ist für die Schärfe der Rechnung nicht gleichgültig, welche von diesen Formen gewählt wird.

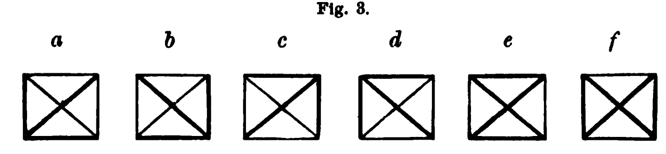
Eine erste Regel, welche sich von selbst darbietet, lautet, man soll die *spitzen* Winkel, welche bei Schnittpunktsbestimmungen auftreten, unmittelbar in die Seitengleichungen einführen; man erhält dadurch grosse Cotangenten als Coëfficienten.

Eine erste tiefergehende Untersuchung dieser Frage wurde von *Zachariae* angestellt in dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten“, aus dem Dänischen ins Deutsche übersetzt von *Lamp*, S. 152 u. ff. Wir haben hierüber in der Zeitschr. für Verm. 1880 S. 65—73 berichtet und noch einige Resultate hinzu gewonnen, wie im Folgenden dargelegt wird:

Das Wesen der Seitengleichung im Viereck besteht darin, dass, bei Annahme einer beliebigen Seite als Basis, jede andere Seite auf allen möglichen Wegen aus dieser

Basis übereinstimmend erhalten werden muss, man hat daher zunächst so viele Formen von Seitengleichungen, als die Zahl der Kombinationen der 6 Seiten zu zweien beträgt, nämlich $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$. Diese 15 Fälle sind durch Fig. 3. *a, b, c, d, e, f* veranschaulicht.

Fig. 3.



a bis *d* enthalten je 3 Kombinationen, nämlich die Verbindung von je 2 solchen Seiten, welche einen Winkelpunkt gemeinsam haben, *e* und *f* enthalten zusammen 3 Fälle, nämlich die Verbindungen von je 2 Gegenseiten und die Diagonalenkombination doppelt.

Z. B. entspricht es der Fig. 3. *a*, wenn in Fig. 4. bestimmt wird, dass AD aus der Basis AB abgeleitet, eindeutig werden soll, d. h.:

Fig. 4.
Vollständiges Viereck.

$$AD = \frac{AB \sin(3)}{\sin(8)} = \frac{AB \sin(3+4) \sin(6)}{\sin(5) \sin(7+8)} \quad (1)$$

oder

$$\frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(3+4) \sin(6) \sin(8)} = 1 \quad (2)$$

Genau dieselbe Gleichung bekommt man durch die Bestimmung, dass AC aus der Basis AB gleichwertig hervorgehe, überhaupt liefert jede der Figuren *a, b, c, d* nur je *eine* Gleichung, welche mit Bezugnahme auf Fig. 4. bzw. mit (A), (B), (C), (D) bezeichnet sein möge.

Ferner entspricht es der Fig. 3. *e*, wenn in Fig. 4. bestimmt wird, dass DC aus AB abgeleitet eindeutig werde, d. h.:

$$DC = \frac{AB \sin(1+2) \sin(4)}{\sin(8) \sin(5+6)} = \frac{AB \sin(3+4) \sin(1)}{\sin(5) \sin(7+8)}$$

oder

$$\frac{\sin(1+2) \sin(4) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(1) \sin(3+4) \sin(5+6) \sin(8)} = 1 \quad (3)$$

Die Fälle von Fig. 3. *a* bis *d* liefern 6gliederige, *e* und *f* liefern 8gliederige Seitengleichungen.

Wir behandeln zunächst nur die Fälle Fig. 1. *a* bis *d*, d. h. die Zentralsysteme (A), (B), (C), (D) und machen folgende Vergleichung der Günstigkeit:

Den Zentralsystemen (A) und (B) entsprechen die folgenden 2 Bedingungsgleichungen:

$$(A) \qquad \frac{\sin(3) \sin(5) \sin(7+8)}{\sin(6) \sin(8) \sin(3+4)} = 1 \quad (4)$$

$$(C) \qquad \frac{\sin(2) \sin(4) \sin(7+8)}{\sin(1) \sin(7) \sin(3+4)} = 1 \quad (5)$$

Diese 2 Gleichungen können aber nicht unmittelbar verglichen werden, weil sie sich auf verschiedene Winkel beziehen. Es wird nun zunächst angenommen, dass entweder nur 5 Winkel gemessen sind, welche keine Winkelgleichung, aber eben deswegen eine Seitengleichung bilden, oder dass beim Vorhandensein weiterer Winkelmessungen

die hierauf bezüglichen Summenproben stimmen, oder kurz, wir nehmen zunächst an, dass alle *einzelnen* Dreiecke für sich schliessen, dass aber bei der Zusammensetzung dieser einzelnen Dreiecke zu einem Viereck, oder bei der Konstruktion des Vierecks aus den Winkeln der Einzeldreiecke an irgend welcher Stelle ein *fehlerzeigendes* Dreieck entsteht, wie z. B. $D_1\ D_2\ D_3$ in Fig. 5.

Fig. 5.
Fehlerzeigendes Dreieck $D_1\ D_2\ D_3$.

Wenn die 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) gemessen sind, so muss man die 2 Seitengleichungen (A) und (C) auf diese 5 Winkel reduzieren, wozu man hat:

$$\left.\begin{aligned} (3) &= 180° - (1+2+8) \\ (7)+(8) &= 180° - (1+6) \\ (3)+(4) &= 180° - (2+5) \\ (4) &= (1)+(8)-(5) \\ (7) &= 180° - (1+6+8) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Damit gehen (A) und (C) über in:

$$(A') \qquad \frac{\sin(1+2+8)\sin(5)\sin(1+6)}{\sin(6)\sin(8)\sin(2+5)} = 1 \qquad (7)$$

$$(C') \qquad \frac{\sin(2)\sin(1+8-5)\sin(1+6)}{\sin(1)\sin(1+6+8)\sin(2+5)} = 1 \qquad (8)$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, sondern es stellen sich Widersprüche ein, welche in logarithmischer Form in der Rechnung auftreten. Wenn man die Gleichung (7) vermöge ihrer Entstehung aus (1), (2) und (4) mit Fig. 5. vergleicht, so findet man:

$$\frac{\sin(1+2+8)\sin(5)\sin(1+6)}{\sin(6)\sin(8)\sin(2+5)} = \frac{A\,D_1}{A\,D_2} = 1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}$$

oder wenn man die Gleichung (7) logarithmisch ausführt, so erhält man auf der rechten Seite statt $\log 1 = 0$ den Widerspruch:

$$\log\left(1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}\right) = -\mu\,\frac{D_1\,D_2}{A\,D_2} \qquad (9)$$

wo μ der logarithmische Modul ist. Dieser Wert (9) ist das Absolutglied der linearen Seitengleichung, welche durch Differentiieren von (7) entsteht, man hat daher, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, für den Zentralpunkt A das relative Mass für das Absolutglied der Seitengleichung:

$$(a) = \frac{D_1\,D_2}{A\,D} \qquad (10)$$

wo im Nenner schlechthin $A\,D$ statt $A\,D_2$ hinreichend genau geschrieben ist.

Wenn man Alles analog für den Zentralpunkt C macht, so bekommt man:

$$(c) = \frac{D_2\,D_3}{C\,D} \qquad (11)$$

Aus (10) und (11) findet man die Vergleichung:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{D_1\,D_2}{D_2\,D_3}\,\frac{C\,D}{A\,D} \qquad (12)$$

Es ist aber:

$$\frac{D_1\,D_2}{D_2\,D_3} = \frac{\sin(7)}{\sin(8)}$$

und nach Fig. 4:

$$\frac{C\,D}{A\,D}\,\frac{\sin(7)}{\sin(8)} = \frac{C\,M}{A\,M} \qquad (13)$$

folglich ist das Verhältnis der Absolutglieder in den Seitengleichungen (7) und (8):

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{CM}{AM} \tag{14}$$

Dasselbe Verhältnis würde man erhalten, wenn man die Absolutglieder der Seitengleichungen für A und C nicht durch das fehlerzeigende Dreieck in D, sondern durch das fehlerzeigende Dreieck in B zur Anschauung brächte, wie man durch Wiederholung der Untersuchung in Bezug auf B finden würde, was jedoch auch schon daraus erhellt, dass in dem Verhältnis $(a):(c)$ keine auf D oder B bezügliche Vierecksgrösse vorkommt.

Fig. 6.
Vollständiges Viereck
(*Schwerds* Basisnetz).

In dieser Vergleichung (14) der Absolutglieder ist der *Zachariae*sche Satz enthalten, denn für die Schärfe der logarithmischen Rechnung sind die Grössen der Absolutglieder der Seitengleichungen (A), (B), (C), (D) massgebend.

Wir machen die Vergleichung im Anschluss an Fig. 6. und erhalten Folgendes:

$$\left.\begin{array}{lllll} A & \text{ist günstiger als} & C & \text{weil} & AM < CM \\ B & \text{"} & D & \text{"} & BM < DM \\ A & \text{"} & B & \text{"} & AS' < BS' \\ A & \text{"} & D & \text{"} & AS < DS \\ B & \text{"} & C & \text{"} & BS < CS \\ D & \text{"} & C & \text{"} & DS' < CS' \end{array}\right\} \tag{14a}$$

Aus allen 6 Vergleichungen folgt, dass A der günstigste Zentralpunkt für den Ansatz einer Seitengleichung ist. Dabei sind nur die 6gliederigen Seitengleichungen entspr. (Fig. 3. *a* bis *d*) verglichen.

Wie weit sich die Sache ändert, wenn nicht bloss 5 Winkel gemessen sind, oder allgemeiner ausgedrückt, wenn ausser einer Seitengleichung auch noch Winkelsummen mit Widerspruchsgliedern existieren, behandeln wir im Anschluss an ein Zahlenbeispiel, welches sich auf Fig. 6. bezieht, und zwar mag gelegentlich erwähnt werden, dass diese Figur das *Schwerd*sche Basisnetzviereck vorstellt, das wir nachher in § 72. ausgleichen werden. Die auf 1′ abgerundeten und insofern fingierten Winkel sind diese:

$$\left.\begin{array}{llll} (1) = 49^\circ 44' & (1) = 49^\circ 44' & (2) = 31^\circ 38' & (7) = 76^\circ 34' \\ (2) = 31 \;\; 38 & (8) = 25 \;\; 17 & (3) = 73 \;\; 22 & (4) = 67 \;\; 4 \\ (3) = 73 \;\; 22 & (7) = 76 \;\; 34 & (4) = 67 \;\; 4 & (6) = 28 \;\; 26 \\ (8) = 25 \;\; 17 & (6) = 28 \;\; 26 & (5) = 7 \;\; 57 & (5) = 7 \;\; 57 \\ \hline 180^\circ \;\; 1' & 180^\circ \;\; 1' & 180^\circ \;\; 1' & 180^\circ \;\; 1' \end{array}\right\} \tag{15}$$

Bezeichnet man die Winkelverbesserungen mit $v_1, v_2 \ldots$, so erhält man hieraus zunächst die (nicht von einander unabhängigen) 4 Winkelbedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + 1' = 0 \\ v_1 + v_8 + v_7 + v_6 + 1' = 0 \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + 1' = 0 \\ v_7 + v_4 + v_6 + v_5 + 1' = 0 \end{array}\right\} \tag{16}$$

Der Zentralpunkt A giebt eine Seitengleichung (2), welche auf folgende logarithmische Rechnung führt:

		log Diff. für 1′
$(7+8) = 101^\circ\ 51'$	$\log \sin (7+8) = 9.99064$	$-\ 2$
$(5) = \ \ 7\ \ 57$	$\log \sin (5) = 9.14085$	$+90$
$(3) = 73\ \ 22$	$\log \sin (3) = 9.98144$	$+\ 3$
	9.11293	
$(6) = 28^\circ\ 26'$	$\log \sin (6) = 9.67773$	$+23$
$(3+4) = 140\ \ 26$	$\log \sin (3+4) = 9.80412$	-15
$(8) = 25\ \ 17$	$\log \sin (8) = 9.63052$	$+27$
	9.11237	

$$9.11293 - 9.11237 = +\ 0.00056$$

also in Einheiten der fünften Dezimale hat man die Seitengleichung:

$$-2\,(v_7 + v_8) + 90\,v_5 + 3\,v_3 - 23\,v_6 + 15\,(v_3 + v_4) - 27\,v_8 + 56 = 0$$

$$(A) \qquad 18\,v_3 + 15\,v_4 + 90\,v_5 - 23\,v_6 - \ 2\,v_7 - 29\,v_8 + 56 = 0 \qquad (17)$$

Ganz in derselben Weise findet man auch die 3 Seitengleichungen für die Zentralpunkte B, C und D, nämlich:

$$(B) \qquad +\ 2\,v_1 - 19\,v_2 + 73\,v_5 - 17\,v_6 + \ 3\,v_7 - 27\,v_8 + 41 = 0 \qquad (18)$$

$$(C) \qquad +11\,v_1 - 21\,v_2 - 15\,v_3 - 20\,v_4 + \ 5\,v_7 + \ 2\,v_8 + \ 1 = 0 \qquad (19)$$

$$(D) \qquad +\ 9\,v_1 - \ 2\,v_2 + \ 3\,v_3 - \ 5\,v_4 + 17\,v_5 - \ 6\,v_6 + 16 = 0 \qquad (20)$$

In Verbindung mit dreien Gleichungen der Gruppe (16) genügt *eine* von den Gleichungen (17)—(20) zum allseitigen Schliessen des Vierecks, es muss daher möglich sein, alle diese 4 Gleichungen (17)—(20) auf *eine* Form zu bringen, und wenn etwa nur 5 Winkel gemessen wären, welche keine Winkelgleichung bildeten, so müsste *eine* einzige Seitengleichung bestehen, welche aus (17), (18), (19) oder (20) ableitbar sein müsste. In Folge dieser Überlegungen stellen wir die Aufgabe: Es sollen die 4 Formen (17), (18), (19), (20) auf eine gemeinsame Form gebracht werden, in welcher nur v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 vorkommen, d. h. die Verbesserungen solcher 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8), welche für sich allein das Viereck mit einer Seitengleichung bestimmen.

Man hat nun mit Hilfe der Gruppe (16) alle übrigen v in v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 auszudrücken, und damit diese übrigen v aus (17)—(20) zu eliminieren. Aus (16) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} v_3 &= -v_1 - v_2 - v_8 - 1 \\ v_4 &= +v_1 - v_5 + v_8 \\ v_7 &= -v_1 - v_6 - v_8 - 1 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (17)—(20) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (A') \qquad & -1\,v_1 - 18\,v_2 + 75\,v_5 - 21\,v_6 - 30\,v_8 + 40 = 0 \\ (B') \qquad & -1\,v_1 - 19\,v_2 + 73\,v_5 - 20\,v_6 - 30\,v_8 + 38 = 0 \\ (C') \qquad & +1\,v_1 - \ 6\,v_2 + 20\,v_5 - \ 5\,v_6 - \ 8\,v_8 + 11 = 0 \\ (D') \qquad & +1\,v_1 - \ 5\,v_2 + 22\,v_5 - \ 6\,v_6 - \ 8\,v_8 + 13 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Abgesehen von einer erklärlichen Abrundungsunsicherheit von ± 1 in den Coëfficienten sind diese 4 Gleichungen algebraisch *identisch*, wie es sein soll, praktisch genommen ist aber die erste (A') wegen der grösseren Coëfficienten allen anderen vorzuziehen.

Das Verhältnis der Coëfficienten und Absolutglieder in (22), nämlich 40:38:11:13 hängt nicht von der Wahl der 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) ab, sondern nur von der Gestalt des Vierecks, und dieses theoretische Verhältnis stellt sich immer ein, wenn die Gleichungen auf irgend welche 5 Winkel reduziert werden. Wenn aber mehr als

5 Winkel gemessen sind, so ist ein solches Reduzieren praktisch nicht nötig, wenn z. B. die 8 Winkel von Fig. 6. gemessen sind, so kann man irgend eine der Gleichungen (17)—(20) unmittelbar in die Rechnung einführen; fragt man aber hiebei wieder nach der Grösse der Absolutglieder, so ist doch wieder das Verhältnis derselben in den reduzierten Gleichungen (22) massgebend, denn die Gleichungen (16) und alle hierauf bezüglichen Operationen, durch welche der Übergang zwischen (A) und (A'), (B) und (B') etc. vermittelt wird, sind im Vergleich mit den logarithmischen Absolutgliedern selbst als fehlerfrei zu betrachten.

Alles Bisherige ist im wesentlichen von *Zachariae* angegeben worden; eine Vervollständigung dieser Theorie ist in dem Sinn möglich, dass erstens auch die 8gliederigen Seitengleichungen für Fig. 3. *e* und *f* hinzugezogen werden, und dass zweitens das geometrisch - lineare Kriterium (14) mit seiner 6fachen Anwendung in (14a) auf *eine* mehr anschauliche geometrische Flächenbedingung übergeführt wird.

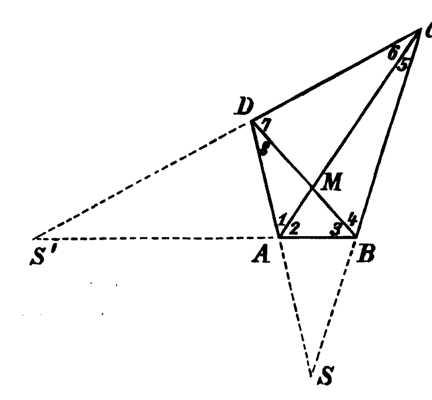


Fig. 7.
Zentralpunkte S und S'.

Der 8gliederigen Seitengleichung (3) kann man eine Beziehung zu dem Punkt S von Fig. 7. geben, es ist nämlich:

$$SB = SA\,\frac{\sin(1+2)}{\sin(3+4)}$$

$$SD = SB\,\frac{\sin(4)}{\sin(8)}$$

$$SC = SD\,\frac{\sin(7+8)}{\sin(5+6)}$$

$$SA = SC\,\frac{\sin(5)}{\sin(1)}$$

Alles multipliziert giebt in Übereinstimmung mit (3):

$$(S)\qquad \frac{\sin(1+2)\sin(4)\sin(5)\sin(7+8)}{\sin(8)\sin(5+6)\sin(1)\sin(3+4)} = 1$$

Diese Gleichung (S) ist der Quotient aus (A) und (D), nämlich:

$$(A)\qquad \frac{\sin(7+8)\sin(5)\sin(3)}{\sin(6)\sin(3+4)\sin(8)} = 1$$

$$(D)\qquad \frac{\sin(5+6)\sin(3)\sin(1)}{\sin(4)\sin(1+2)\sin(6)} = 1$$

also wenn man die logarithmischen Absolutglieder mit (s), (a), (d) bezeichnet:

$$(s) = (a) - (d) \tag{23}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass bei (A) und (D) in ***demselben Sinn*** gezählt wird, d. h. wenn in (A) der Weg $DCBD$ von links nach rechts genommen ist, so muss auch in (D) der Weg $CBAC$ von links nach rechts genommen werden.

Mit analogen Bezeichnungen hat man auch

$$(s) = (b) - (c) \tag{24}$$

und ebenso findet man

$$(s') = (a) - (b) = (d) - (c) \tag{25}$$

Endlich kann man die auf Fig. 3. *e* und *f* bezügliche 8gliederige Gleichung, welche die Beziehung zwischen den Diagonalen AC und BD herstellt, dem Punkte M

zuteilen, dem sie auch als Zentralpunkt zugehört, wenn man **M** als fingierte Winkelstation nimmt; die Gleichung heisst nämlich:

$$(M) \qquad \frac{\sin(1)\,\sin(3)\,\sin(5)\,\sin(7)}{\sin(2)\,\sin(4)\,\sin(6)\,\sin(8)} = 1 \qquad (26)$$

Diese Gleichung ist das Produkt aus (A) und (C) oder (B) und (D), z. B.:

$$(A) \qquad \frac{\sin(7+8)\,\sin(5)\,\sin(3)}{\sin(6)\,\sin(3+4)\,\sin(8)} = 1$$

$$(C) \qquad \frac{\sin(3+4)\,\sin(1)\,\sin(7)}{\sin(2)\,\sin(7+8)\,\sin(4)} = 1$$

woraus durch Multiplikation (26) folgt. Die Absolutglieder geben die Beziehung:

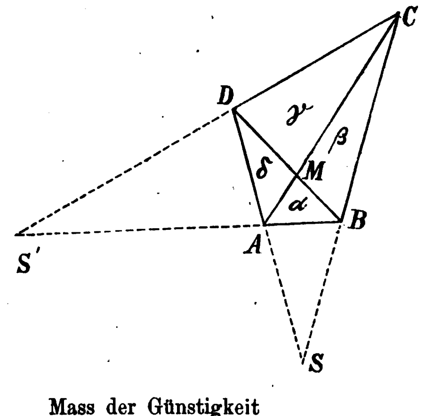
$$(m) = (a) + (c) = (b) + (d) \qquad (27)$$

Um endlich eine anschaulichere geometrische Deutung der Verhältnisse $(a):(c)$ u. s. w. zu erhalten, betrachten wir die Formel (14) in Verbindung mit Fig. 7. oder Fig. 8. und finden:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{CM}{AM} = \frac{\triangle BDC}{\triangle ABD}$$

d. h. die Absolutglieder (a) und (c) sind den *Flächen* der Dreiecke BDC und ABD proportional. Nimmt man nun noch die Gleichungen (23), (24), (26) und (25) hinzu, so bekommt man folgende Zusammenstellung, und damit das Gesamtresultat unserer Untersuchung:

Fig. 8.
Flächenverhältnisse $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ zu Gleichung (28) und (29).

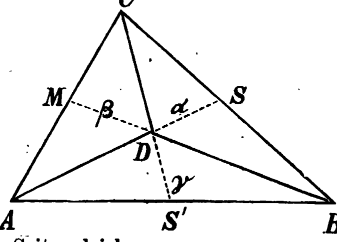


Zentralpunkt		Mass der Günstigkeit		
A mit 6gliederiger Seitengleichung	Fläche	$\beta+\gamma$	(Fig. 8.)	(28)
B „ „ „	„	$\gamma+\delta$		
C „ „ „	„	$\alpha+\delta$		
D „ „ „	„	$\alpha+\beta$		
S mit 8gliederiger Seitengleichung	Fläche	$\gamma-\alpha$		(29)
S' „ „ „	„	$\beta-\delta$		
M „ „ „	„	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$		

Am günstigsten ist die Seitengleichung (26) für den Zentralpunkt M, jedoch ist dieselbe 8gliederig.

Wenn 2 Vierecksseiten *parallel* werden, so versagt die ihrem Schnitt entsprechende 8gliederige Gleichung vollständig, wenn z. B. AB parallel DC ist, so wird $\beta = \delta$ und die Gleichung für S' löst sich auf in $0 \ldots + 0 \ldots \ldots = 0$, was man auch direkt nachweisen kann.

Fig. 9.
Flächenverhältnisse $\alpha\ \beta\ \gamma$ zu Gleichung (30) und (31).



Wenn die 4 Punkte $ABCD$ nicht ein eigentliches Viereck wie Fig. 8. bilden, sondern ein Dreieck ABC mit einem Innenpunkt D, wie z. B. Fig. 9., so bekommt man folgende Resultate betreffs der Günstigkeit der 7 möglichen Seitengleichungen:

Zentralpunkt		Mass der Günstigkeit	
A	mit 6gliederiger Seitengleichung	Fläche α	(30)
B	„ „ „	„ β (Fig. 9.)	
C	„ „ „	„ γ	
D	„ „ „	„ $\alpha+\beta+\gamma$	
S	mit 8gliederiger Seitengleichung	Fläche $\beta+\gamma$	(31)
S'	„ „ „	„ $\alpha+\beta$	
M	„ „ „	„ $\alpha+\gamma$	

In diesem Falle ist unbedingt die Seitengleichung für den Zentralpunkt D die günstigste, denn sie ist nur 6gliederig und hat die grössten Zahlen-Coëfficienten.

Wenn im vorstehenden auch die 8gliederigen Formen zur Vergleichung beigezogen wurden, so geschah dieses mehr wegen der theoretischen Vollständigkeit als aus praktischen Gründen.

Bei wirklichen Ausgleichungsrechnungen überwiegt die Rücksicht auf geringe Zahl der Glieder, und man wird daher nur unter den 4 Fällen A B C D zu wählen haben, und die Wahl auf einen Blick nach (28) oder (30) treffen.

§ 70. Triangulierungsausgleichung mit Winkelmessungen von gleicher Genauigkeit. Badisches Netz.

Die Winkelmessungen für dieses Netz sind der badischen Landesvermessung entnommen. Die Messungen sind mit einem *Ertel*schen Theodolit nach der Repetitionsmethode gemacht.

Das Dreiecksnetz ist durch Fig. 10. (Seite 195) veranschaulicht. Die gemessenen Winkel sind im Folgenden nach Dreiecken gruppiert zusammengestellt. Es sind sofort auch die richtigen Summen $180° + \varepsilon$ beigefügt, nebst den daraus folgenden Widersprüchen w. Die Excesse ε sind durch eine vorläufige Dreiecksberechnung unter Zugrundlegung der Basis

$$\text{Speyer—Oggersheim} = 19\,794{,}643^{\text{m}} \; (log = 4.296\,5476{\cdot}9) \tag{1}$$

erhalten worden.

(2)

		I				IV				VII		
(1) =	57°	21′	40,298″	(10) =	55°	21′	8,132″	(19) =	55°	34′	56,212″
(2) =	81	7	33,535	(11) =	45	27	47,758	(20) =	51	47	9,632
(3) =	41	30	47,171	(12) =	79	11	1,162	(21) =	72	37	55,776
	180	0	1,004		179	59	57,052		180	0	1,620
soll	180	0	1,796	soll	180	0	1,125	soll	180	0	1,744
w =			−0,792	w =			−4,073	w =			−0,124

		II				V				VIII	
(4) =	63°	30′	31,054″	(13) =	46°	7′	40,660″	(22) =	75°	24′	9,727″
(5) =	57	13	2,870	(14) =	37	41	59,793	(23) =	42	4	30,194
(6) =	59	16	25,363	(15) =	96	10	20,212	(24) =	62	31	20,791
	179	59	59,287		180	0	0,665		180	0	0,712
soll	180	0	2,113	soll	180	0	1,550	soll	180	0	1,272
w =			−2,826	w =			−0,885	w =			−0,560

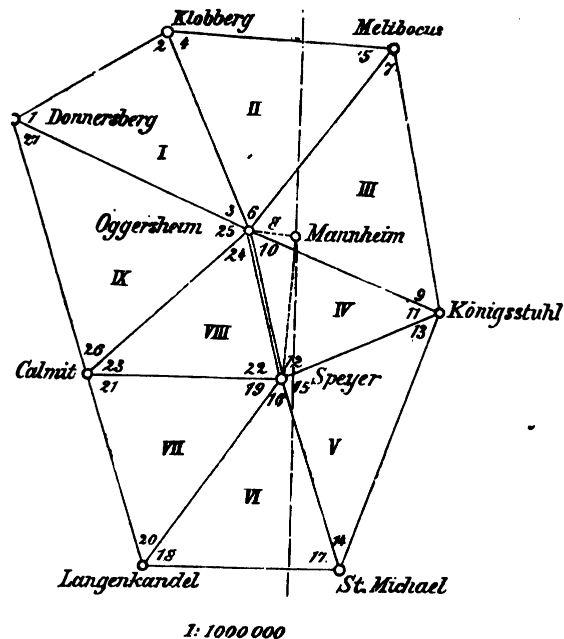
		III				VI				IX	
(7) =	46°	24′	50,850″	(16) =	53°	39′	29,318″	(25) =	66°	20′	48,296″
(8) =	74	59	26,909	(17) =	72	32	22,104	(26) =	66	6	32,936
(9) =	58	35	42,565	(18) =	53	48	11,347	(27) =	47	32	39,124
	180	0	0,324		180	0	2,769		180	0	0,356
soll	180	0	2,145	soll	180	0	1,749	soll	180	0	2,350
w =			−1,821	w =			+1,020	w =			−1,994

Die dritten Dezimalen der Sekunden (0,001″), welche praktisch keinen Sinn mehr haben, sind nur zur Sicherung der vorhergehenden Decimalen gegen Häufung der Abrundungsfehler beibehalten.

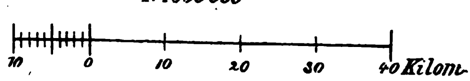
Hier kann man nach Anleitung von (4) und (6) § 68. S. 134 sofort die Dreiecksgleichungen herauslesen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} v_1+v_2+v_3-0{,}792''=0 & v_{10}+v_{11}+v_{12}-4{,}073''=0 & v_{19}+v_{20}+v_{21}-0{,}124''=0 \\ v_4+v_5+v_6-2{,}826''=0 & v_{13}+v_{14}+v_{15}-0{,}885''=0 & v_{22}+v_{23}+v_{24}-0{,}560''=0 \\ v_7+v_8+v_9-1{,}821''=0 & v_{16}+v_{17}+v_{18}+1{,}020''=0 & v_{25}+v_{26}+v_{27}-1{,}994''=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Fig. 10.
Nördlicher Teil des Gr. Badischen Triangulierungsnetzes.



1: 1000 000



Als Vorbereitung der Horizontgleichungen für Oggersheim und Speyer bilden wir die betreffenden Summen:

Horizont Oggersheim		Horizont Speyer	
(6) =	59° 16′ 25,363″	(12) =	79° 11′ 1,162″
(8) =	74 59 26,909	(15) =	96 10 20,212
(10) =	55 21 8,132	(16) =	53 39 29,318
(24) =	62 31 20,791	(19) =	55 34 56,212
(25) =	66 20 48,296	(22) =	75 24 9,727
(3) =	41 30 47,171		
Summe	359° 59′ 56,662″	Summe	359° 59′ 56,631″
soll	360 0 0,000	soll	360 0 0,000
w =	— 3,338	w =	— 3,369

(4)

folglich sind, nach Anleitung von (8) und (10) § 68. S. 134, die beiden Horizontgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_6 + v_8 + v_{10} + v_{24} + v_{25} + v_3 - 3{,}338 = 0 \\ v_{12} + v_{15} + v_{16} + v_{19} + v_{22} - 3{,}369 = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese 11 Gleichungen (3) und (5) haben sich sofort von selbst dargeboten. Ehe wir zu den Seitengleichungen übergehen, überlegen wir nach den Regeln von § 67. (14) S. 182, welches die Anzahl der Bedingungsgleichungen überhaupt sein wird. Man hat:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Anzahl der gemessenen Winkel} & W = 27 \\ \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{Punkte} & p = 9 \\ \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{Linien} & l = 17 \end{array}\right\} \quad (6)$$

folglich $W - 2p + 4 = 27 - 18 + 4 = 13$ Bedingungsgleichungen, und insbesondere:

$$\left.\begin{array}{l} l - 2p + 3 = 17 - 18 + 3 = 2 \text{ Seitengleichungen} \\ l - p + 1 = 17 - 9 + 1 = 9 \text{ Dreiecksgleichungen} \\ \text{und für Speyer und Oggersheim 2 Horizontgleichungen} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die Dreiecksgleichungen und Horizontgleichungen sind schon bei (3) und (5) festgestellt. Die 2 Seitengleichungen beziehen sich auf die Zentralsysteme um Oggersheim und Speyer.

Für das Zentralsystem Oggersheim hat man:

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin(12)\sin(9)\sin(5)\sin(2)\sin(27)\sin(23)}{\sin(11)\sin(7)\sin(4)\sin(1)\sin(26)\sin(22)} = 1 \quad (8)$$

Die unter (2) mitgeteilten Winkel geben folgende logarithmische Rechnung nach *Schröns* Tafel, wobei die nicht scharfen 8ten Stellen nur zur Sicherung der 7ten Stellen angegeben sind.

(9)

Winkel					Diff. für 10″
(12) =	79° 11′ 1,162″	*log sin* (12)	9.992 2148·4	+	40
(9) =	58 35 42,565	*log sin* (9)	9.931 2069·6	+	128
(5) =	57 13 2,870	*log sin* (5)	9.924 6574·3	+	136
(2) =	81 7 33,535	*log sin* (2)	9.994 7700·9	+	33
(27) =	47 32 39,124	*log sin* (27)	9.867 9375·9	+	192
(23) =	42 4 30,194	*log sin* (23)	9.826 1418·8	+	234
		Summe Z	9.536 9287·9		
(11) =	45° 27′ 47,758″	*log sin* (11)	9.852 9682·3	+	207
(7) =	46 24 50,850	*log sin* (7)	9.859 9435·7	+	200
(4) =	63 30 31,054	*log sin* (4)	9.951 8237·8	+	105
(1) =	57 21 40,298	*log sin* (1)	9.925 3571·3	+	135
(26) =	66 6 32,936	*log sin* (26)	9.961 0975·8	+	94
(22) =	75 24 9,727	*log sin* (22)	9.985 7501·3	+	54
		Summe N	9.536 9404·2		

Es ist nun Summe Z — Summe N = — 0,000 0116·3
soll 0,000 0000·0

Widerspruch w = — 116.3

Diese wichtige Rechnung lässt man nicht gerne ohne Probe, und zwar erhält man eine solche mittelst der sphärischen Excesse (s. o. § 68. S. 186). Wenn man die um $1/3$ des betreffenden Excesses, verminderten Winkel bzw. mit (12′) (9′) . . . bezeichnet, so findet man folgende zweite logarithmische Rechnung:

$(12') = 79°11'\ 0{,}787''$	*log sin* (12')	9.992 2146·9	
$(9') = 58\ 35\ 41{,}850$	*log sin* (9')	9.931 2060·4	
$(5') = 57\ 13\ 2{,}166$	*log sin* (5')	9.924 6564·7	
$(2') = 81\ 7\ 32{,}936$	*log sin* (2')	9.994 7698·9	
$(27') = 47\ 32\ 38{,}341$	*log sin* (27')	9.867 9360·9	
$(23') = 42\ 4\ 29{,}770$	*log sin* (23')	9.826 1408·9	
	Summe Z'	9.536 9240·7	
$(11') = 45°27'\ 47{,}383''$	*log sin* (11')	9.852 9674·6	(10)
$(7') = 46\ 24\ 50{,}135$	*log sin* (7')	9.859 9421·4	
$(4') = 63\ 30\ 30{,}350$	*log sin* (4')	9.951 8230·4	
$(1') = 57\ 21\ 39{,}699$	*log sin* (1')	9.925 3563·2	
$(26') = 66\ 6\ 32{,}153$	*log sin* (26')	9.961 0968·5	
$(22') = 75\ 24\ 9{,}303$	*log sin* (22')	9.985 7499·0	
	Summe N'	9.536 9357·1	

Widerspruch w = Summe Z' — Summe N' = — 116·4

hinreichend übereinstimmend mit dem Schlussresultat von (9).

Indem man also das Absolutglied im Mittel = — 116·35 Einheiten der 7ten Decimale oder $w = -11{,}635$ in Einheiten der 6ten Decimale setzt, hat man nach der Anleitung (19) § 68. S. 185 die lineare Seitengleichung für Einheiten der 6ten Decimale:

$$\left.\begin{array}{l} +0{,}40\,v_{12}+1{,}28\,v_9+1{,}36\,v_5+0{,}33\,v_2+1{,}92\,v_{27}+2{,}34\,v_{23} \\ -2{,}07\,v_{11}-2{,}00\,v_7-1{,}05\,v_4-1{,}35\,v_1-0{,}94\,v_{26}-0{,}54\,v_{22}-11{,}635=0 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Wenn man die Coëfficienten nach (17) § 68. S. 185 genauer ausrechnen will, so hat man für die 3 ersten Fälle:

	(12) = 79° 11′ 0″	(9) = 58° 35′ 40″	(5) = 57° 13′ 0″
log cotg (..)	9.28117	9.78571	9.80892
log ($\mu : \varrho$)	0.32336	0.32336	0.32336
log a	9.60453	0.10907	0.13228
a =	0,402	1,285	1,356

und die ganze Gleichung wird:

$$\left.\begin{array}{l} +0{,}402\,v_{12}+1{,}285\,v_9+1{,}356\,v_5+0{,}329\,v_2+1{,}926\,v_{27}+2{,}332\,v_{23} \\ -2{,}072\,v_{11}-2{,}004\,v_7-1{,}049\,v_4-1{,}349\,v_1-0{,}933\,v_{26}-0{,}548\,v_{22}-11{,}635=0 \end{array}\right\} (12)$$

Obgleich der Vorteil einer solchen genaueren Berechnung der Coëfficienten ein sehr bedingter ist, haben wir doch bei diesem ersten Beispiel so scharf gerechnet, um eine konsequente Anwendung aller Formeln zu haben. Es wird nun nicht nötig sein, auch für die zweite Seitengleichung alle Zahlen einzeln herzusetzen. Diese zweite Gleichung bezieht sich auf das Zentralsystem um Speyer; die Gleichung heisst in Sinus-Form:

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin(10)\sin(13)\sin(17)\sin(20)\sin(23)}{\sin(11)\sin(14)\sin(18)\sin(21)\sin(24)} = 1 \qquad (13)$$

Macht man dieselbe Behandlung wie bei (8) und (12), so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} +1{,}455\,v_{10}+2{,}024\,v_{13}+0{,}662\,v_{17}+1{,}658\,v_{20}+2{,}332\,v_{23} \\ -2{,}072\,v_{11}-2{,}724\,v_{14}-1{,}541\,v_{18}-0{,}658\,v_{21}-1{,}095\,v_{24}+1{,}650 \end{array}\right\} \quad (14)$$

Die Coëfficienten der Bedingungsgleichungen (12) (14) (5) und (3) schreibt man geordnet in die Tabelle I. auf S. 198:

I. Bedingungsgleichungen.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	w
1)	a	− 1,849	+ 0,329		− 1,049	+ 1,856		− 2,004		+ 1,285		− 2,072	+ 0,402										− 0,548	+ 2,332			− 0,938	+ 1,926	− 11,635
2)	b										+ 1,455	− 2,072		+ 2,024	− 2,724			+ 0,662	− 1,541		+ ,658	− 0,658		+ 2,332	− 1,095				+ 1,650
3)	c			+1			+1		+1		+1														+1	+1			− 3,338
4)	d												+1			+1	+1			+1			+1						− 3,369
5)	e	+1	+1	+1																									− 0,792
6)	f				+1	+1	+1																						− 2,826
7)	g							+1	+1	+1																			− 1,821
8)	h										+1	+1	+1																− 4,073
9)	i													+1	+1	+1													− 0,885
10)	k																+1	+1	+1										+ 1,020
11)	l																			+1	+1	+1							− 0,124
12)	m																						+1	+1	+1				− 0,560
13)	n																									+1	+1	+1	− 1,994
	f										+ 1,455	− 2,072		+ 2,024	− 2,724														

II. *Normalgleichungen.*

		1 a]	2 b]	3 c]	4 d]	5 e]	6 f]	7 g]	8 h]	9 i]	10 k	11 l]	12 m]	13 n]	w	f]
1)	[a	+ 25,308	+ 9,731		− 0,146	− 1,020	+ 0,307	− 0,719	− 1,670				+ 1,784	+ 0,998	− 11,635	+ 4,293
2)	[b	+ 9,731	+ 30,559	+ 0,360					− 0,617	− 0,700	− 0,879	+ 1,000	+ 1,237		+ 1,650	+ 17,927
3)	[c		+ 0,360	+ 0,600		+ 1	+ 1	+ 1	+ 1				+ 1	+ 1	− 3,338	+ 1,455
4)	[d	− 0,146			+ 5,000				+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1		− 3,369	
5)	[e	− 1,020		+ 1		+ 3									− 0,792	
6)	[f	+ 0,307		+ 1			+ 3								− 2,826	
7)	[g	− 0,719		+ 1				+ 3							− 1,821	
8)	[h	− 1,670	− 0,617	+ 1	+ 1				+ 3						− 4,073	− 0,617
9)	[i		− 0,700		+ 1					+ 3					− 0,885	− 0,700
10)	[k		− 0,879		+ 1						+ 3				+ 1,020	
11)	[l		+ 1,000		+ 1							+ 3			− 0,124	
12)	[m	+ 1,784	+ 1,237	+ 1	+ 1								+ 3		− 0,560	
13)	[n	+ 0,998		+ 1										+ 3	− 1,994	
																17,927

Die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen ist hiebei:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots a_{27} v_{27} + w_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 + \ldots n_{27} v_{27} + w_{13} = 0$$

In der Tabelle der geordneten Coëfficienten der Bedingungsgleichungen auf S. 198 bleibt die unterste stärker abgetrennte Linie mit der Bezeichnung f und den 4 Werten

$$f_{10} = +1{,}455 \qquad f_{11} = -2{,}072 \qquad f_{13} = +2{,}024 \qquad f_{14} = -2{,}724 \qquad (15)$$

vorerst ausser Betracht, denn diese f werden erst im folgenden § 71. zur Berechnung eines Funktionsgewichtes gebraucht. (Zugleich mag bemerkt werden, dass die f in der letzten Linie eine andere Bedeutung haben, als die f in der 6ten Linie; in dieser 6ten Linie steht nämlich f lediglich als 6ter Buchstabe in der Reihenfolge $a\ b\ c\ d\ e\ f$, während die f in der letzten Linie die Bedeutung von f in § 42. (1) S. 102 haben).

Es folgt nun, nachdem die Coëfficienten-Tabelle S. 198 aufgestellt ist, die Berechnung der Coëfficienten der Normalgleichungen, deren allgemeine Form bei gleichen Gewichten nach (10) § 39. S. 99 ist:

$$[a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + \ldots [a\,n]\,k_{13} + w_1 = 0$$
$$[a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + \ldots [b\,n]\,k_{13} + w_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[a\,n]\,k_1 + [b\,n]\,k_2 + [c\,n]\,k_3 + \ldots [n\,n]\,k_{13} + w_{13} = 0$$

Die Summen-Coëfficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ gestalten sich sehr einfach, weil eine ganze Menge der Coëfficienten die einfachen Werte 0 oder 1 haben.

Beispielshalber nehmen wir hier:

b	b^2	a	b	ab
+ 1,455	2,1170	— 2,072	— 2,072	+ 4,2932
— 2,072	4,2932	+ 2,332	+ 2,332	+ 5,4382
+ 2,024	4,0966			+ 9,7314
— 2,724	7,4202			
+ 0,662	0,4382			
— 1,541	2,3747			
+ 1,658	2,7490			
— 0,658	0,4330			
+ 2,332	5,4382			
— 1,095	1,1990			
	30,5591			

Die so berechneten Summen-Coëfficienten schreibt man wieder geordnet in eine zweite Tabelle, welche auf S. 199 gegeben ist. Dabei bleiben aber wieder die Werte für $f]$ in der letzten Columne zunächst ausser Betracht.

Gegen sonstige Gewohnheit haben wir in der Tabelle II. auf S. 199 die Coëfficienten $[a\,b]$ $[a\,c]$ ... d. h. alle nicht quadratischen Coëfficienten doppelt geschrieben, damit die Gleichungen sich besser überblicken lassen, und die Eliminationsfolge bequem gewählt werden kann. In den Gleichungen 5) bis 13) dieser Tabelle II. kommt von den Unbekannten k_5 bis k_{13} nur je *eine* vor, mit dem einfachen Coëfficienten 3, und um dieses deutlicher hervorzuheben, sind entsprechend stärkere Trennungslinien gezogen. Den günstigen Umstand des Wegfalls vieler Coëfficienten, und namentlich des Wegfalls aller nicht quadratischen Coëfficienten von $[c\,e]$ an, wird man bei der Elimination

dadurch ausnützen, dass man zuerst mit Hilfe der 9 letzten Gleichungen die Korrelaten k_5 bis k_{13} in den übrigen $k_1\ k_2\ k_3\ k_4$ ausdrückt, und die dabei erhaltenen Ausdrücke nachher in die 4 ersten Gleichungen einsetzt, so dass 4 Gleichungen entstehen, welche nur noch $k_1\ k_2\ k_3\ k_4$ enthalten, und danach aufgelöst werden können. Wenn man in der angedeuteten Weise mit Hilfe der Normalgleichungen 5) bis 13) (S. 199) die 9 letzten Korrelaten $k_5\ k_6 \ldots k_{13}$ in den 4 ersten $k_1\ k_2\ k_3\ k_4$ ausdrückt, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} k_5 = +0{,}3400\,k_1 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_3 \quad .. \quad +0{,}2640 \\ k_6 = -0{,}1023\,k_1 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_3 \quad .. \quad +0{,}9420 \\ k_7 = +0{,}2397\,k_1 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_3 \quad .. \quad +0{,}6070 \\ k_8 = +0{,}5567\,k_1 + 0{,}2057\,k_2 - 0{,}3333\,k_3 - 0{,}3333\,k_4 + 1{,}3577 \\ k_9 = \quad .. \quad +0{,}2333\,k_2 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_4 + 0{,}2950 \\ k_{10} = \quad .. \quad +0{,}2930\,k_2 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_4 - 0{,}3400 \\ k_{11} = \quad .. \quad +0{,}3333\,k_2 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_4 + 0{,}0413 \\ k_{12} = -0{,}5947\,k_1 - 0{,}4123\,k_2 - 0{,}3333\,k_3 - 0{,}3333\,k_4 + 0{,}1867 \\ k_{13} = -0{,}3310\,k_1 \quad .. \quad -0{,}3333\,k_3 \quad .. \quad +0{,}6647 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Diese Ausdrücke substituiert man in die 4 ersten Gleichungen der Tabelle II. (S. 199) und erhält dadurch:

$$\left.\begin{array}{l} +22{,}438\,k_1 + 8{,}652\,k_2 + 0{,}109\,k_3 - 0{,}184\,k_4 - 13{,}325 = 0 \\ +8{,}652\,k_1 + 29{,}168\,k_2 + 0{,}153\,k_3 - 0{,}014\,k_4 + 1{,}177 = 0 \\ +0{,}109\,k_1 + 0{,}153\,k_2 + 4{,}000\,k_3 - 0{,}667\,k_4 + 0{,}685 = 0 \\ -0{,}184\,k_1 - 0{,}014\,k_2 - 0{,}667\,k_3 + 3{,}333\,k_4 - 1{,}828 = 0 \end{array}\right\} \quad (17)$$

Hiebei hat man die Rechenprobe, dass wieder die symmetrische Form $[aa]$ $[ab] \ldots$ der Coëfficienten vorhanden sein muss, wodurch alle Coëfficienten, ausser den quadratischen 22,438 u. s. w. und den Absolutgliedern, kontroliert werden, weshalb man diese besonders nachzurechnen hat.

Die Auflösung dieser 4 Gleichungen (17) wird in der systematischen Weise von § 25. S. 64 gemacht, wie folgendes System der Endgleichungen zeigt:

$$\left.\begin{array}{ll} [aa] & +22{,}438\,k_1 + 8{,}652\,k_2 + 0{,}109\,k_3 - 0{,}184\,k_4 - 13{,}325 = 0 \\ [bb.1] & \qquad +25{,}832\,k_2 + 0{,}111\,k_3 + 0{,}057\,k_4 + 6{,}315 = 0 \\ [cc.2] & \qquad\qquad +3{,}999\,k_3 - 0{,}666\,k_4 + 0{,}723 = 0 \\ [dd.3] & \qquad\qquad\qquad +3{,}220\,k_4 - 1{,}830 = 0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

Die letzte Gleichung giebt $k_4 = -\dfrac{-1{,}830}{+3{,}220} = +0{,}5683$ (19)

Durch Rückwärtssubstituieren von k_4 in (18) oder durch abermalige Elimination aus (17) findet man auch:

$$k_3 = -0{,}0865 \qquad k_2 = -0{,}2454 \qquad k_1 = +0{,}6936 \quad (20)$$

Die so gewonnenen $k_1\ k_2\ k_3\ k_4$ setzt man in (16), und erhält damit alle übrigen k, so dass alle Korrelaten k zusammen diese sind:

$$\left.\begin{array}{llll} k_1 = +0{,}6936 & k_5 = +0{,}5286 & k_8 = +1{,}5327 & k_{11} = -0{,}0663 \\ k_2 = -0{,}2454 & k_6 = +0{,}8998 & k_9 = +0{,}0484 & k_{12} = -0{,}2852 \\ k_3 = -0{,}0865 & k_7 = +0{,}8021 & k_{10} = -0{,}6013 & k_{13} = +0{,}4639 \\ k_4 = +0{,}5683 & & & \end{array}\right\} \quad (21)$$

Die Korrektionen v bildet man, indem man der Tabelle I. der Bedingungsgleichungen nach Vertikalreihen folgt, z. B.:

$$v_1 = -1{,}349\,k_1 + k_5 = -0{,}936 + 0{,}529 = -0{,}407 \quad (22)$$

Die sämtlichen v, welche wir der Übersichtlichkeit wegen wieder ebenso ordnen, wie die beobachteten Winkel (2) S. 194, sind diese:

	$v_1 = -0{,}407''$		$v_{10} = +1{,}090''$		$v_{19} = +0{,}502''$
I	$v_2 = +0{,}757$	*IV*	$v_{11} = +0{,}604$	*VII*	$v_{20} = -0{,}473$
	$v_3 = +0{,}443$		$v_{12} = +2{,}380$		$v_{21} = +0{,}095$
	$v_4 = +0{,}172''$		$v_{13} = -0{,}449''$		$v_{22} = -0{,}097''$
II	$v_5 = +1{,}841$	*V*	$v_{14} = +0{,}716$	*VIII*	$v_{23} = +0{,}761$
	$v_6 = +0{,}816$		$v_{15} = +0{,}616$		$v_{24} = -0{,}102$
	$v_7 = +0{,}588''$		$v_{16} = -0{,}033''$		$v_{25} = +0{,}378''$
III	$v_8 = +0{,}716$	*VI*	$v_{17} = -0{,}763$	*IX*	$v_{26} = -0{,}183$
	$v_9 = +1{,}692$		$v_{18} = -0{,}223$		$v_{27} = +1{,}800$

(23)

Fügt man diese v den gemessenen Winkeln der Tabelle (2) S. 194 zu, so erhält man die ausgeglichenen Winkel:

	[1] =	57° 21′ 39,891″		[10] =	55° 21′ 9,222″		[19] =	55° 34′ 56,714″
I	[2] =	81 7 34,292	*IV*	[11] =	45 27 48,362	*VII*	[20] =	51 47 9,159
	[3] =	41 30 47,614		[12] =	79 11 3,542		[21] =	72 37 55,871
		180° 0′ 1,797″			180° 0′ 1,126″			180° 0′ 1,744″
	soll	180 0 1,796		soll	180 0 1,125		soll	180 0 1,744
	[4] =	63° 30′ 31,226″		[13] =	46° 7′ 40,211″		[22] =	75° 24′ 9,630″
II	[5] =	57 13 4,711	*V*	[14] =	37 42 0,509	*VIII*	[23] =	42 4 30,955
	[6] =	59 16 26,177		[15] =	96 10 20,828		[24] =	62 31 20,689
		180° 0′ 2,114″			180° 0′ 1,548″			180° 0′ 1,274
	soll	180 0 2,113		soll	180 0 1,550		soll	180 0 1,272
	[7] =	46° 24′ 50,262″		[16] =	53° 39′ 29,285″		[25] =	66° 20′ 48,674″
III	[8] =	74 59 27,625	*VI*	[17] =	72 32 21,341	*IX*	[26] =	66 6 32,753
	[9] =	58 35 44,257		[18] =	53 48 11,124		[27] =	47 32 40,924
		180° 0′ 2,144″			180° 0′ 1,750″			180° 0′ 2,351″
	soll	180 0 2,145		soll	180 0 1,749		soll	180 0 2,350

(24)

Hiemit ist zugleich bewiesen, dass die 9 Dreiecksgleichungen genügend befriedigt sind. Die beiden Horizontgleichungen stimmen ebenfalls genügend, sie geben nämlich:

Horizont Oggersheim		Horizont Speyer	
[6] =	59° 16′ 26,177″	[12] =	79° 11′ 3,542″
[8] =	74 59 27,625	[15] =	96 10 20,828
[10] =	55 21 9,222	[16] =	53 39 29,285
[24] =	62 31 20,689	[19] =	55 34 56,714
[25] =	66 20 48,674	[22] =	75 24 9,630
[3] =	41 30 47,614		
	360° 0′ 0,001″		359° 59′ 59,999″

(26)

Man könnte die noch bleibenden Widersprüche, welche noch höchstens 0,002″ betragen, in rein empirischer Weise tilgen, das hat aber gar keinen praktischen Wert, denn die letzte Stelle 0,001″ ist ja von Anfang an nur dazu bestimmt gewesen, dass 0,01″ gesichert wird, und dieses ist genügend erreicht.

Auch die Seitengleichungen stimmen genügend, und die Durchführung der Seitenberechnung nach der Additamentenmethode oder nach dem *Legendre*schen Satz giebt mit der schon zu Anfang bei (1) S. 194 mitgeteilten Basis Speyer-Oggershein folgendes:

	$\log s$	s	
Basis *Speyer—Oggersheim* .	4.296 5476·9	19794,643ᵐ	(26)
Speyer—Calmit	4.418 4219·3	26207,275	
Oggersheim—Calmit . . .	4.456 1549·3	28586,096	
Oggersheim—Donnersberg .	4.549 3120·0	35425,173	
Calmit—Donnersberg . . .	4.550 1058·1	35489,986	
Donnersberg—Klobberg . .	4.375 9182·8	23763,932	
Oggersheim—Klobberg. . .	4.479 8976·0	30192,397	
Klobberg—Melibocus . . .	4.489 5442·5	30870,542	
Oggersheim—Melibocus . .	4.507 0618·5	32141,183	
Melibocus—Königsstuhl . .	4.560 7787·3	36372,967	
Oggersheim—Königsstuhl . .	4.435 7945·9	27276,872	
Speyer—Königsstuhl . . .	4.358 8019·0	22845,563	
Königsstuhl—Michael . . .	4.569 8613·7	37141,663	
Speyer—Michael	4.430 2529·8	26931,031	
Michael—Langenkandel . .	4.429 4468·0	26881,085	
Langenkandel—Speyer . . .	4.502 8974·0	31834,452	
Langenkandel—Calmit . . .	4.439 5852·2	27515,995	

Mit den ausgeglichenen Winkeln (24) und mit diesen Dreiecksseiten (26) lässt sich alles für geodätische Zwecke Nötige berechnen.

Wir haben die rechtwinkligen *Soldner*schen Coordinaten der 9 Punkte berechnet in Bezug auf das badische System mit dem Ursprung Mannheim, mit $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen. Es war hiezu noch das Anschlussdreieck Mannheim-Speyer-Oggersheim nötig, dessen Winkel und Seiten sind:

Mannheim	90° 1′ 56,941″	$\log$ Sp.-O.	4.2965476·9	(27)
Speyer	17 41 17,738	$\log$ M.-O.	3.7791890·3	
Oggersheim	72 16 45,608	$\log$ M.-Sp.	4.2754362·8	
	180° 0′ 0,287″			

Das Azimut Mannheim—Speyer ist = 3° 40′ 25,291″.

Damit sind folgende Coordinaten y, x berechnet:

	y	x	$y_B - y$	$x_B - x$
Mannheim.	0,00ᵐ	0,00ᵐ	0,00ᵐ	0,00ᵐ
Oggersheim	+ 6001,78	— 388,77	— 0,06	+ 0,10
Speyer	+ 1208,14	+ 18816,68	0,00	0,00
Calmit	+ 27414,07	+ 18550,13	— 0,02	+ 0,08
Donnersberg	+ 38145,69	— 15278,87	— 0,34	+ 0,28
Klobberg	+ 18104,63	— 28049,30	— 0,21	+ 0,47
Melibocus	— 12727,47	— 26509,10	+ 0,38	+ 0,59
Königsstuhl	— 19525,48	+ 9223,07	+ 0,18	+ 0,01
Michael	— 7407,50	+ 44332,39	— 0,08	— 0,14
Langenkandel	+ 19467,72	+ 44893,92	— 0,13	+ 0,04

Die hier mit aufgenommenen Differenzen $y_B - y$ und $x_B - x$ beziehen sich auf die amtlichen Badischen Coordinaten y_B, x_B, welche wir gelegentlich hier mit

erwähnt haben, weil sie ein erwünschtes Genauigkeits-Beispiel enthalten, wobei zu bemerken ist, dass unsere Berechnung und die amtliche Badische Berechnung auf *denselben* Winkelmessungen (jedoch allerdings in etwas verschiedener Auswahl und Vereinigung) beruhen, aber verschiedene Basiswerte zu Grunde legen, nämlich y_B und x_B beruhen auf der Annahme Sp.-Ogg. $= 19794{,}54^m$ gegen unsere Annahme $19794{,}64^m$ (vgl. hiezu die Anmerkung S. 207).

§ 71. Genauigkeit des badischen Netzes.

Die Grundlage aller Genauigkeits-Untersuchungen ist die Quadratsumme $[v\,v]$ der übrig bleibenden Fehler v. Man kann diese Summe unmittelbar aus den einzelnen v von (23) § 70. S. 202 berechnen; zur Probe hat man auch nach (4) § 41. S. 101 die Gleichung $[v\,v] = -[w\,k]$.

Diese beiden Methoden geben:

$v_1 = -0{,}407$	$v_1^2 = 0{,}1656$	$w_1 = -11{,}635$	$k_1 = +0{,}6936$	$-w_1\,k_1 = +\ 8{,}060$
$v_2 = +0{,}757$	$v_2^2 = 0{,}5730$	$w_2 = +\ 1{,}650$	$k_2 = -0{,}2454$	$-w_2\,k_2 = +\ 0{,}405$
$v_3 = +0{,}443$	$v_3^2 = 0{,}1962$	$w_3 = -\ 3{,}338$	$k_3 = -0{,}0865$	$-w_3\,k_3 = -\ 0{,}279$
$v_4 = +0{,}172$	$v_4^2 = 0{,}0296$	$w_4 = -\ 3{,}369$	$k_4 = +0{,}5683$	$-w_4\,k_4 = +\ 1{,}915$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
$v_{27} = +1{,}800$	$v_{27}^2 = 3{,}2400$	$w_{13} = -\ 1{,}994$	$k_{13} = +0{,}4639$	$-w_{13}k_{13} = +\ 0{,}925$
	$[v\,v] = 22{,}1817$			$-[w\,k] = 22{,}170$

In hinreichender Übereinstimmung:

$$[v\,v] = 22{,}18 \tag{1}$$

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist $r = 13$, also der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{22{,}18}{13}} = \pm 1{,}31'' \tag{2}$$

Es soll noch der mittlere Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Winkel bestimmt werden, und zwar wählen wir hiezu die Seite Speyer-Michael. Diese Seite wird nach Fig. 10. S. 195 als Funktion der Dreieckswinkel und der Basis Speyer-Oggersheim angegeben durch die Gleichung:

$$(\text{Speyer-Michael}) = (\text{Speyer-Oggersheim}) \frac{\sin[10]\,\sin[13]}{\sin[11]\,\sin[14]} \tag{3}$$

Die Basis (Speyer-Oggersheim) wird dabei als fehlerfrei betrachtet.

Es ist nicht bequem, die Funktion (3) selbst in Betracht zu ziehen; die Rechnung wird bequemer mit deren Logarithmus, d. h. wir betrachten die logarithmische Funktion:

$$F = \log\sin[10] + \log\sin[13] - \log\sin[11] - \log\sin[14] \tag{4}$$

Dieses hat man nach den Veränderlichen [10] , [13] , [11] , [14] zu differentiieren. Die Differentialquotienten sind:

$$\left.\begin{array}{ll} f_{10} = \dfrac{\partial F}{\partial[10]} = \dfrac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[10] & f_{11} = -\dfrac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[11] \\ f_{13} \qquad\quad = \dfrac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[13] & f_{14} = -\dfrac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[14] \end{array}\right\} \tag{5}$$

Es sind dieses dieselben Coëfficienten, welche bereits in der Bedingungsgleichung (14) § 70. S. 197 vorgekommen sind; die Ausrechnung giebt, wie dort:

$$f_{10} = +1{,}455 \qquad f_{11} = -2{,}072 \qquad f_{13} = +2{,}024 \qquad f_{14} = -2{,}724 \tag{6}$$

Dieses ist das ganze System der f, denn alle andern f sind gleich Null, und die Gleichung (1) § 42. S. 102 heisst somit in unserem Fall:

$$\left.\begin{aligned} F &= f_0 + f_{10}\,x_{10} + f_{11}\,x_{11} + f_{13}\,x_{13} + f_{14}\,x_{14} \\ &= f_0 + 1{,}455\,x_{10} - 2{,}072\,x_{11} + 2{,}024\,x_{13} - 2{,}724\,x_{14} \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

Diese Coëfficienten f sind bereits in der untersten Linie der Tabelle I. S. 198 beigefügt.

Auch die Summen-Coëfficienten $[af]$ $[bf]$ $[cf]$ ... sind bereits in der Tabelle II. S. 199 angegeben, nämlich in der letzten Columne; die letzte Zahl rechts unten in dieser Tabelle, nämlich 17,927, ist $= [ff]$.

Von den verschiedenen Gewichtsberechnungsmethoden wollen wir zuerst die Methode der Übertragungs-Coëfficienten anwenden.

Die Übertragungsgleichungen liest man aus der Tabelle II., indem man die Schlussglieder f_3 an Stelle von w setzt:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad +25{,}308\,r_1 + 9{,}731\,r_2 - 0{,}146\,r_4 - 1{,}020\,r_5 + 0{,}307\,r_6 - 0{,}719\,r_7 - 1{,}670\,r_8 \\
&\qquad + 1{,}784\,r_{12} + 0{,}993\,r_{13} + 4{,}293 = 0 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&8)\quad -1{,}670\,r_1 - 0{,}617\,r_2 + r_3 + r_4 + 3\,r_8 - 0{,}617 = 0 \\
&9)\quad \ldots\ldots - 0{,}700\,r_2 \ldots + r_4 + 3\,r_9 - 0{,}700 = 0 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&13)\quad +0{,}993\,r_1 + 1{,}000\,r_3 + 3{,}000\,r_{13} + 0{,}000 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Die Auflösung der 13 Übertragungsgleichungen, von denen wir nur 4 hier wirklich geschrieben haben, macht man genau so wie früher die Auflösung der 13 Normalgleichungen. Man findet:

$$\left.\begin{array}{llll}
r_1 = +0{,}0640 & r_5 = +0{,}165 & r_8 = +0{,}329 & r_{11} = +0{,}279 \\
r_2 = -0{,}6215 & r_6 = +0{,}137 & r_9 = +0{,}160 & r_{12} = +0{,}433 \\
r_3 = -0{,}4293 & r_7 = +0{,}158 & r_{10} = -0{,}110 & r_{13} = +0{,}122 \\
r_4 = -0{,}2165 & & &
\end{array}\right\} \quad (8)$$

An Stelle der v von S. 202 treten nun die F nach den Formeln (13) § 43. S. 106, z. B. $F_1 = f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + \ldots = -1{,}349\,r_1 + 1{,}000\,r_5 = +0{,}079$. Alle F sind:

$$\left.\begin{array}{lll}
F_1 = +0{,}079 & F_{10} = +0{,}451 & F_{19} = +0{,}063 \\
F_2 = +0{,}186 & F_{11} = -0{,}588 & F_{20} = -0{,}751 \\
F_3 = -0{,}264 & F_{12} = +0{,}138 & F_{21} = +0{,}688 \\[6pt]
F_4 = +0{,}070 & F_{13} = +0{,}926 & F_{22} = +0{,}181 \\
F_5 = +0{,}223 & F_{14} = -0{,}864 & F_{23} = +0{,}866 \\
F_6 = -0{,}292 & F_{15} = -0{,}057 & F_{24} = +0{,}685 \\[6pt]
F_7 = +0{,}030 & F_{16} = -0{,}327 & F_{25} = -0{,}307 \\
F_8 = -0{,}271 & F_{17} = -0{,}521 & F_{26} = +0{,}063 \\
F_9 = +0{,}240 & F_{18} = +0{,}848 & F_{27} = +0{,}246
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Diese 27 Werte sind hier ähnlich gruppiert wie die v auf S. 202, damit die Analogie in der Bezeichnung hervortritt. Die Quadratsumme der F wird:

$$[FF] = 6{,}1062 \quad (10)$$

und nach (14) § 43. S. 106 ist dieses der reciproke Wert des gesuchten Gewichtes, denn die Beobachtungsgewichte p sind alle $= 1$.

Übrigens benützen wir diesen Wert (10) nicht sofort, sondern bestimmen ihn noch auf einem andern Wege. Dieser andere Weg ist durch die Formeln (16) § 43. S. 106 angedeutet, indessen ist dabei zu berücksichtigen, dass eine grosse Zahl von

Coëfficienten der Übertragungsgleichungen gleich Null ist, wodurch die Ausrechnung ebenso erleichtert wird, wie auch die Elimination aus den Normalgleichungen der Tabelle II. S. 199 durch das Ausfallen vieler Glieder erleichtert wurde.

Man hat an die Auflösung der Übertragungsgleichungen (7) noch das Schlussglied $[ff] = 17{,}927$ anzuhängen, oder, was dasselbe ist, man fügt zu den 13 Übertragungsgleichungen noch die folgende fingierte 14te Übertragungsgleichung hinzu (vgl. letzte Columne der Tafel II. S. 199):

$$+4{,}293\,r_1 + 17{,}927\,r_2 + 1{,}455\,r_3 - 0{,}617\,r_8 - 0{,}700\,r_9 + 17{,}927 = 0 \qquad (11)$$

Um auf ein Übertragungs-System mit nur 4 Unbekannten $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ zu kommen, hat man hier r_8 und r_9 zu eliminieren, und zwar mit Hilfe der beiden Gleichungen (8) und (9) in der Gruppe (7), welche wir dort zur Verdeutlichung des Verfahrens besonders geschrieben haben. Thut man dieses, so wird (11):

$$+3{,}950\,r_1 + 17{,}637\,r_2 + 1{,}661\,r_3 + 0{,}438\,r_4 + 17{,}637 = 0 \qquad (12)$$

Nachdem auf diese Weise alle r bis auf $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ eliminiert sind, lautet das Schlusssystem mit Zuziehung des Gliedes von der Ordnung $[ff]$:

$$\left.\begin{array}{l}
+22{,}438\,r_1 + 8{,}652\,r_2 + 0{,}109\,r_3 - 0{,}184\,r_4 + 3{,}950 = 0 \\
+\ 8{,}652\,r_1 + 29{,}168\,r_2 + 0{,}153\,r_3 - 0{,}014\,r_4 + 17{,}637 = 0 \\
+\ 0{,}109\,r_1 + 0{,}153\,r_2 + 4{,}000\,r_3 - 0{,}667\,r_4 + 1{,}661 = 0 \\
-\ 0{,}184\,r_1 - 0{,}014\,r_2 - 0{,}667\,r_3 + 3{,}333\,r_4 + 0{,}438 = 0 \\
+\ 3{,}950\,r_1 + 17{,}637\,r_2 + 1{,}661\,r_3 + 0{,}438\,r_4 + 17{,}637 = 0
\end{array}\right\} \qquad (13)$$

Dieses System (13) entspricht dem früheren System (17) § 70. S. 201 hinsichtlich $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$. Die 5te Gleichung in (13) hat Coëfficienten, welche mit den Absolutgliedern der vorhergehenden 4 Gleichungen identisch sind, was als Rechenprobe dienen kann. Die 5te Gleichung (13) hat also nur das Absolutglied 17,637 neu herzugebracht. Deswegen kann man auch die Gruppe (13) als ein Normalgleichungssystem mit einer neuen fingierten Unbekannten r' schreiben; z. B. die erste Gleichung von (13):

$$+22{,}438\,r_1 + 8{,}652\,r_2 + 0{,}109\,r_3 - 0{,}184\,r_4 + 3{,}950\,r' = 0 \qquad (13a)$$

Macht man die Elimination in üblicher Weise, so bekommt man als Analogon zu dem früheren (18) § 70. S. 201 das folgende System von Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
[aa] & +22{,}438\,r_1 + 8{,}652\,r_2 + 0{,}109\,r_3 - 0{,}184\,r_4 + 3{,}950 = 0 \\
[bb.1] & \qquad +25{,}832\,r_2 + 0{,}111\,r_3 + 0{,}057\,r_4 + 16{,}114 = 0 \\
[cc.2] & \qquad\qquad +3{,}999\,r_3 - 0{,}666\,r_4 + 1{,}573 = 0 \\
[dd.3] & \qquad\qquad\qquad +3{,}220\,r_4 + 0{,}697 = 0 \\
[ff.4] & \qquad\qquad\qquad\qquad + 6{,}119
\end{array}\right\} \qquad (14)$$

Das Schlussglied 6,119 ist die gesuchte Gewichtsreciproke, welche mit dem früheren Resultat 6,106 bei (10) genügend übereinstimmt. Wir nehmen im Mittel abgerundet:

$$\frac{1}{P} = 6{,}11 \qquad (15)$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wurde bereits bei (2) S. 204 gefunden $m = \pm 1{,}31''$, man hat also jetzt den mittleren Fehler der Funktion F:

$$\pm 1{,}31 \sqrt{6{,}11} = 3{,}24 \qquad (16)$$

Dieses ist ein logarithmischer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, er gehört zu dem Logarithmus der Seite Speyer-Michael, also:

$$\begin{array}{rl}
\log\ (\text{Sp.-Mich.}) = 4.4302529{\cdot}8 & = \log s \\
\pm \qquad 32{\cdot}4 & = d \log s
\end{array}$$

Zum Übergang auf den Fehler ds der Seite s hat man:

$$d \log s = \frac{\mu}{s} ds$$

$$\frac{ds}{s} = \frac{d \log s}{\mu} = \frac{\pm 0{,}00000324}{0{,}43429} = \pm 0{,}0000074 \cdot 6 \qquad (17)$$

$$ds = \frac{d \log s}{\mu} s = \pm 0{,}20^m \qquad (18)$$

Das Resultat (17) giebt den sogenannten relativen Fehler $=$ 7,46 Milliontel oder 7,46 Millimeter pro 1 Kilometer. Das Resultat (18) giebt den absoluten Fehler $= \pm$ 20 Centimeter.

Anmerkung zu § 70. und § 71.

Die Berechnungen von § 70. und § 71. geben ein Bild von dem geodätischen Material etwa vor der Mitte dieses Jahrhunderts.

Unser Beispiel hat zufällig genau die Form des ersten Beispiels von *Gauss* in der Abhandlung „Supplementum theoriae combinationis", wobei die Winkel als einzeln unabhängig von einander gemessen vorausgesetzt sind.

Wie jedoch die als „gemessen" in die Ausgleichung eingeführten Winkel aus der grossen Menge der wirklichen Originalwinkel hervorgegangen sind, dafür ist in solchen Fällen der Nachweis gewöhnlich schwer zu führen. In dem Falle unseres badischen Netzes (dessen Ausgleichung von § 70. und § 71. übrigens mit der amtlichen badischen Ausgleichung in keiner Beziehung steht) ist die gegenseitige Unabhängigkeit der 27 als gemessen behandelten Winkel nicht vorhanden, und das Ganze gilt also in dieser Hinsicht nur als ein formell konsequentes, teilweise fingiertes Rechenbeispiel.

Diese Art der Messung und Ausgleichung eines Dreiecksnetzes ist zur Anwendung im Grossen nicht geeignet, sie ist aber vorzüglich geeignet zur ersten Einführung in die Theorie und die Praxis der Triangulierungsausgleichungen.

Zum Teil wegen des historischen Interesses nehmen wir nun noch ein solches Netz mit Winkelmessungen, und zwar von ungleicher Genauigkeit vor, nämlich *Schwerds* Basisnetz.

§ 72. Triangulierungsausgleichung mit Winkelbeobachtungen von ungleicher Genauigkeit. *Schwerds* Basisnetz.

Professor *Schwerd* am Lyzeum in Speyer hat im Jahr 1820 (gewissermassen als Konkurrenz- und Trutz-Arbeit gegen die amtliche Basismessung Speyer-Oggersheim) mit seinen Lyzeumsschülern eine kleine 860 Meter lange Basis gemessen, und dieselbe durch ein trigonometrisches Netz mit der Linie Speyer-Oggersheim verbunden.

Schwerd hat seine Messungen veröffentlicht in der Schrift: „Die kleine Speyrer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann, von *Friedr. M. Schwerd*, Professor der Mathematik und Physik am k. Lyzeum zu Speyer. Speyer, gedruckt bei *Jakob Christian Kolb*. 1822." Da aber *Schwerd* seine trigonometrischen Messungen nur nach Gutdünken („auf die natürlichste Weise" S. 64) ausgeglichen hat, schien eine Nachrechnung von *Schwerds* Resultaten nach der Methode der kleinsten Quadrate umsomehr am Platz, als dadurch die treffliche Gewichtsunterscheidung, welche *Schwerd* in richtiger Erkenntnis der

verschiedenen Bedeutung der mehr oder weniger spitzen Winkel traf, voll ausgenützt werden kann.

Der Teil des *Schwerd*schen Netzes, welchen wir behandeln wollen, ist in dem Viereck Fig. 11. gezeichnet. Das punktierte Dreieck Mannheim-Speyer-Oggersheim dient zum Anschluss an die badische Triangulierung, vgl. § 70. S. 195.

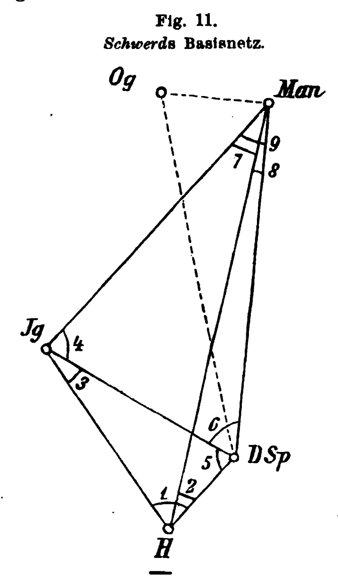
Als Basis nehmen wir die aus der eigentlichen, nur 860^m langen gemessenen Basis trigonometrisch abgeleitete Linie (*Schwerd* S. 69):

$$D\,Sp - H = 4962{,}8282^m \tag{1}$$

($D\,Sp$ = Dom in Speyer, H = Heiligenstein.)

Die Originalwinkelmessungen, welche für unser Netz Fig. 11. in Betracht kommen, sind von *Schwerd* auf S. 48—50 seines Buches mitgeteilt, und auf S. 56 und 57 daselbst sind die zugehörigen Zentrierungsreduktionen, sowie die Drittel von sphärischen Exzessen angegeben. Indem wir die Zentrierungsreduktionen an den gemessenen Winkeln anbringen, die von *Schwerd* mit hereingezogenen sphärischen Exzesse aber hier gänzlich ausser Betracht lassen, bekommen wir folgende Tabelle der gemessenen Winkel:

Fig. 11.
Schwerds Basisnetz.



Schwerd Seite	Nr.	Winkel	Gewicht p
48 u. 56	58	(1) = 81° 21′ 43,36″	70
48 u. 56	60	(2) = 31 37 39,73	7
49 u. 56	64	(3) = 25 16 28,85	101
49 u. 56	65	(4) = 76 33 44,65	47
48 u. 55	61	(5) = 73 21 46,35	85
49 u. 55	62	(6) = 67 4 27,96	57
50 u. 57	68	(7) = 28 25 42,53	10
50 u. 57	67	(8) = 7 56 6,92	28
50 u. 57	66	(9) = 36 21 49,55	30
		Summa $[p]$ =	435

(2)

Als Gewichte p sind hier geradezu die von *Schwerd* angegebenen Repetitionszahlen genommen, was insofern zulässig erscheint, als nicht durchlaufend bis zur angegebenen Zahl repetiert ist, sondern z. B. der Winkel Nr. 58 4mal mit je 10 Repetitionen und 6mal mit je 5 Repetitionen gemessen ist (*Schwerd* S. 48).

Wie man sieht, sind die Gewichte p sehr ungleich. *Schwerd* hat mit Recht die *spitzen* Winkel, welche den Grundlinien gegenüber liegen, verstärkt gemessen.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen findet man nach Anleitung von § 67. S. 182. Es ist nämlich die Anzahl der gemessenen Winkel $W = 9$, die Anzahl der Punkte $p = 4$, die Anzahl der Verbindungslinien $l = 6$, folglich hat man nach (14) § 67. S. 182:

$$W - 2p + 4 = 9 - 8 + 4 = 5 \text{ Bedingungsgleichungen,}$$

und insbesondere:

$$\left.\begin{array}{l} l - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1 \text{ Seitengleichung} \\ l - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 \text{ Dreiecksgleichungen} \\ \quad\text{und für den Punkt } M \text{ 1 Horizontgleichung.} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Diese Gleichungen sind im Einzelnen die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Es soll sein } \dfrac{\sin(1)\sin(4)\sin(8)}{\sin(3)\sin(9)\sin(2)} = 1\,^{*)} \\ \text{Es soll sein } (1)+(3)+(5)-(180^\circ+\varepsilon_2)=0 \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad (4)+(6)+(9)-(180+\varepsilon_3)=0 \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad (2)+(5)+(6)+(8)-(180+\varepsilon_4)=0 \\ \text{Es soll sein } (7)+(8)-(9)=0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Für die sphärischen Exzesse ε_2, ε_3, ε_4 berechnet man auf Grund der Basis $DH = 4962{,}8282^m$ nach (1), mit den gemessenen Winkeln, die sämtlichen Dreiecke vorläufig, die mittlere geographische Breite ist etwa 49° 30′, also $\log r = 6.80487$, damit findet man nach der Formel $\varepsilon = \frac{\varrho}{r^2}\triangle$:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für das Dreieck } DHJ & \varepsilon_2 = 0{,}138'' \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad DJM & \varepsilon_3 = 0{,}505 \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad DHM & \varepsilon_4 = 0{,}151 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Exzesse braucht man jedenfalls zum Aufstellen der Dreiecksgleichungen, man kann sie aber auch zur Bildung der Seitengleichung benützen.

Wir bilden zuerst die Dreieckssummenproben

			(6)
(1) = 81° 21′ 43,36″	(4) = 76° 33′ 44,65″	(2) = 31° 37′ 39,73″	
(3) = 25 16 28,85	(6) = 67 4 27,96	(5) = 73 21 46,35	
(5) = 73 21 46,35	(9) = 36 21 49,55	(6) = 67 4 27,96	
		(8) = 7 56 6,92	
179 59 58,560	180 0 2,160	180 0 0,960	
soll 180 0 0,138	soll 180 0 0,505	soll 180 0 0,151	
$w_2 = -1{,}578$	$w_3 = +1{,}655$	$w_4 = +0{,}809$	

Die Bedingungsgleichungen werden nach Anleitung von § 68. oder nach den Beispielen von § 70. S. 194—197 gebildet. Die Resultate sind:

a) Seitengleichung:

$$+0{,}320\,v_1 + 0{,}503\,v_4 + 15{,}105\,v_8 - 4{,}459\,v_3 - 2{,}860\,v_9 - 3{,}419\,v_2 + 4{,}715 = 0 \quad (7)$$

Es ist dabei in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale gerechnet.

Die drei Dreiecksgleichungen werden nach (6):

$$\left.\begin{array}{ll} b) & v_2+v_5+v_6+v_8+0{,}809=0 \\ c) & v_1+v_3+v_5-1{,}578=0 \\ d) & v_4+v_6+v_9+1{,}655=0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Endlich ist die Horizontalgleichung:

$$e) \qquad v_7+v_8-v_9-0{,}100=0 \qquad (9)$$

Man schreibt die Coëfficienten dieser Bedingungsgleichungen nebst den Gewichten in eine Tabelle:

---

*) Diese Seitengleichung drückt aus, dass die Seite *DSp.* — *Man.* aus der Basis *DSp.* — *H.* auf beiden möglichen Wegen gleich erhalten werde. Diese Gleichung entspricht dem Zentralsystem *DSp.* Nach § 69. S. 193 ist diese Wahl nicht ungünstig, doch würde der Punkt *H.* als Zentralpunkt eine noch ein wenig günstigere Seitengleichung geben.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	w
p	70	7	101	47	85	57	10	28	30	
$\frac{1}{p}$	0,0143	0,1429	0,0099	0,0213	0,0118	0,0175	0,1000	0,0357	0,0333	
1) a	+0,320	−3,419	−4,459	+0,503	. .	. .	. .	+15,105	−2,860	+4,715
2) b	. .	+1	. .	. .	+1	+1	. .	+1	. .	+0,809
3) c	+1	. .	+1	. .	+1	. .	. .	. .	. .	−1,578
4) d	. .	. .	. .	+1	. .	+1	. .	. .	+1	+1,655
5) e	. .	. .	. .	. .	. .	. .	+1	+1	−1	−0,100

(10)

Wenn man nun die Summen $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$ $\left[\frac{a\,b}{p}\right]$ u. s. w. bildet, so sieht man bereits, dass es von *Schwerd* mit Einsicht so geordnet wurde, dass zu den grossen Coëfficienten auch die grösseren Gewichte kommen. Die Ausrechnung giebt:

$$\left.\begin{array}{l}
+\underline{10{,}2941\,k_1} + 0{,}0511\,k_2 - 0{,}0396\,k_3 - 0{,}0846\,k_4 + 0{,}6348\,k_5 + 4{,}7150 = 0 \\
\qquad + \underline{0{,}2079\,k_2} + 0{,}0118\,k_3 + 0{,}0175\,k_4 + 0{,}0357\,k_5 + 0{,}8090 = 0 \\
\qquad\qquad + \underline{0{,}0360\,k_3} \quad . . \quad . . \quad - 1{,}5780 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad + \underline{0{,}0721\,k_4} - 0{,}0333\,k_5 + 1{,}6550 = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \underline{0{,}1690\,k_5} - 0{,}1000 = 0
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = -0{,}3436\,,\ k_2 = -4{,}0814\,,\ k_3 = +44{,}7898\,,\ k_4 = -23{,}2072\,,\ k_5 = -1{,}8279 \quad (12)$$

Bei der Berechnung der Verbesserungen v folgt man, wie immer, der Tabelle (10) der Bedingungsgleichungen nach Vertikalreihen, z. B.:

$$v_1 = +\frac{0{,}320}{70}k_1 + \frac{1}{70}k_3 = +0{,}638''$$

$$v_2 = -\frac{3{,}419}{7}k_1 + \frac{1}{7}k_2 = -0{,}415''$$

. . . .

Die Tabelle aller v nebst ihrer Verwendung zur Verbesserung der gemessenen Winkel zeigt folgendes:

Gemessen	v	Verbessert
(1) = 81° 21′ 43,360″	+ 0,638″	[1] = 81° 21′ 43,998″
(2) = 31 37 39,730	− 0,415	[2] = 31 37 39,315
(3) = 25 16 28,850	+ 0,459	[3] = 25 16 29,309
(4) = 76 33 44,650	− 0,497	[4] = 76 33 44,153
(5) = 73 21 46,350	+ 0,479	[5] = 73 21 46,829
(6) = 67 4 27,960	− 0,479	[6] = 67 4 27,481
(7) = 28 25 42,530	− 0,183	[7] = 28 25 42,347
(8) = 7 56 6,920	− 0,396	[8] = 7 56 6,524
(9) = 36 21 49,550	− 0,680	[9] = 36 21 48,870

(13)

Nach Vollendung der Ausgleichung überzeugt man sich zuerst, ob die Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Dieses ist der Fall; und man kann nun alle Dreiecksseiten eindeutig berechnen. Die Resultate für 4 Seiten sind:

$$\left.\begin{array}{llll} D\,H = & 4\,962{,}8282^m & \text{(Basis)} & \log D\,H = 3.695\,7292{\cdot}3 \\ D\,M = & 18\,851{,}510 & \pm 0{,}12^m & \log D\,M = 4.275\,3461{\cdot}4 \\ H\,M = & 22\,896{,}729 & & \log H\,M = 4.359\,7734{\cdot}4 \\ J\,M = & 17\,851{,}153 & \pm 0{,}11^m & \log J\,M = 4.251\,6662{\cdot}4 \end{array}\right\} \quad (14)$$

Die bei zwei Seiten angegebenen mittleren Fehler $\pm 0{,}12^m$ und $\pm 0{,}11^m$ sind aus späteren Berechnungen hergesetzt.

Die Seite $D\,M$ von (14) ist dieselbe, wie *M.-Sp.* in (27) S. 203; es besteht jedoch eine logarithmische Differenz 901·4, welche davon herrührt, dass die *Schwerd*sche Basis $D\,H$ sich auf eine vorläufige Masseinheit bezieht.

Zu Genauigkeitsberechnungen übergehend, bilden wir zuerst die Summe $[p\,v\,v]$ unmittelbar aus den einzelnen v und p, und dann zur Kontrolle nach der Formel $[p\,v\,v] = -[w\,k]$. Man findet auf beiden Wegen übereinstimmend:

$$[p\,v\,v] = 113{,}8 \tag{15}$$

wie aus der Ausrechnung im einzelnen hervorgeht:

	v	v^2	p	$p\,v^2$
1)	+ 0,638	0,4070	70	28,49
2)	— 0,415	0,1722	7	1,21
3)	+ 0,459	0,2107	101	21,28
4)	— 0,497	0,2470	47	11,61
5)	+ 0,479	0,2294	85	19,50
6)	— 0,479	0,2294	57	13,08
7)	— 0,183	0,0335	10	0,34
8)	— 0,396	0,1568	28	4,39
9)	— 0,680	0,4624	30	13,87
			435	113,77 = $[p\,v\,v]$

Kontrolle:

	w	k	$w\,k$
1)	+ 4,715	— 0,3436	— 1,62
2)	+ 0,809	— 4,0814	— 3,30
3)	— 1,578	+ 44,7898	— 70,68
4)	+ 1,655	— 23,2072	— 38,41
5)	— 0,100	— 1,8279	+ 0,18
			113,83 = $[p\,v\,v]$

Die Übereinstimmung ist genügend.

Es mag hiebei bemerkt werden, dass die entsprechende Summe für die von *Schwerd* angenommenen Korrektionen etwas mehr beträgt, nämlich 130,23.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist:

$$m = \sqrt{\frac{113{,}8}{5}} = \pm 4{,}77'' \tag{16}$$

Es soll noch das Gewicht und der mittlere Fehler der Seite $D\,M$ nach der Ausgleichung bestimmt werden.

Die Seite $D\,M$ wird aus $D\,H$ am kürzesten abgeleitet durch die Gleichung:

$$D\,M = \frac{D\,H}{\sin[8]} \sin[2] \tag{17}$$

Es ist, wie immer in solchen Fällen, bequemer, zunächst die Funktion zu logarithmieren, d. h. aus (17) zu bilden:

$$F = \log \sin [2] - \log \sin [8] \tag{17a}$$

Die Rechnung geht nun denselben Gang wie in § 71. S. 204—207. Es wird:

$$f_2 = +3{,}419 \qquad f_8 = -15{,}105 \tag{18}$$

$$\left[\frac{af}{p}\right] = -9{,}82 \quad \left[\frac{bf}{p}\right] = -0{,}05 \quad \left[\frac{cf}{p}\right] = 0{,}00 \quad \left[\frac{df}{p}\right] = 0{,}00 \quad \left[\frac{ef}{p}\right] = -0{,}54$$

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = +9{,}82$$

Diese Glieder setzt man an Stelle der Schlussglieder von (11), eliminiert durch, und findet:

$$\left[\frac{ff}{p} \cdot 5\right] = 0{,}31 = \frac{1}{P} \tag{19}$$

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P}} = 4{,}77 \sqrt{0{,}31} = \pm 2{,}66 \text{ Einheiten der 6ten Logarithmen-Stelle,}$$

d. h.

$$d \log s = \pm 0{,}0000026 \cdot 6 = \frac{\mu}{s} \, d s \quad , \quad s = 18852^m$$

$$d s = \pm 0{,}115^m$$

Also im ganzen hat man die Entfernung:

$$D\,M = 18\,851{,}510^m \pm 0{,}115^m \text{ (Triangulierungsfehler)} \tag{20}$$

wie auch schon bei (14) angegeben ist.

Dabei ist die Berechnungsbasis $D\,H = 4962{,}8282^m$ als fehlerfrei angenommen, wir wollen nun aber auch den mittleren Fehler dieser Linie berücksichtigen, und seine Fortpflanzung auf die Linie $D\,M$ berechnen.

Den mittleren Fehler von $D\,H$ schätzten wir auf Grund verschiedener Angaben von *Schwerd* zu $\pm 9{,}7^{mm}$.

Dieser Fehler vergrössert sich durch trigonometrische Übertragung auf die 18852^m lange Linie $D\,M$, so dass er giebt:

$$\frac{18852}{4963} 9{,}7 = \pm 36{,}8^{mm} \tag{21}$$

und dazu tritt der Triangulierungsfehler der Linie $D\,M$, welcher nach (20) den Wert $\pm 115^{mm}$ hat, es ist also der mittlere Gesamtfehler der Linie $D\,M$

$$= \sqrt{36{,}8^2 + 115^2} = \pm 124^{mm}$$

Statt (20) werden wir also jetzt schreiben:

$$D\,M = 18\,851{,}510^m \pm 0{,}124^m \text{ (Gesamtfehler).} \tag{22}$$

§ 73. Triangulierungsausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. *Schwerds* Basisnetz.

Schon in der allgemeinen Theorie § 37. S. 95—96 wurde angegeben, dass man Messungen, welche sich zunächst in der Form von bedingten Beobachtungen darbieten, auch auf vermittelnde Beobachtungen reduzieren kann. Ob dieses nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an; bei unserem *Schwerd*schen Basisnetz kann man wohl so verfahren, und zwar bekommt man dann nur 4 Normalgleichungen aufzulösen, gegen 5 bei der ersten Methode. Die Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen wird aber auch noch andere Vorteile, bei Genauigkeitsuntersuchungen, bieten.

Nach dem vorigen § 72. (7) und (8) S. 209 bestehen für das *Schwerd*sche Netz Fig. 11. folgende 5 unabhängige Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
+0{,}320\,v_1 - 3{,}419\,v_2 - 4{,}459\,v_3 + 0{,}503\,v_4 \\
+15{,}105\,v_8 - 2{,}860\,v_9 + 4{,}715 = 0 \\
v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0{,}809 = 0 \\
v_1 + v_3 + v_5 - 1{,}578 = 0 \\
v_4 + v_6 + v_9 + 1{,}655 = 0 \\
v_7 + v_8 - v_9 - 0{,}100 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

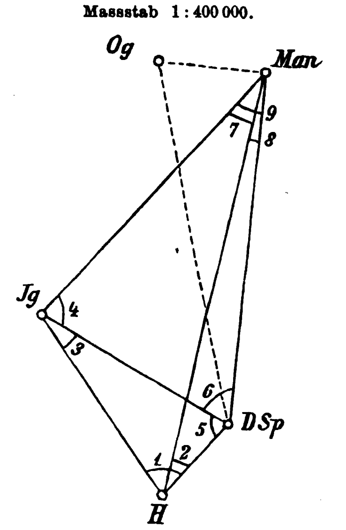


Fig. 11. *Schwerds* Basisnetz. Massstab 1 : 400 000.

Von den 9 gemessenen Winkeln wählen wir die Winkel (1) (2) (3) und (8) als unabhängige Unbekannte aus, oder, sofort zu den Verbesserungen übergehend, nehmen wir die Verbesserungen v_1 v_2 v_3 v_8 als unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es entsteht die Aufgabe, mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (1) alle anderen v in diesen v_1 v_2 v_3 v_8 auszudrücken.

Nach gewöhnlichen algebraischen Methoden erhalten wir hiefür:

$$\left.\begin{aligned}
v_5 &= -v_1 - v_3 + 1{,}578 \\
v_6 &= +v_1 - v_2 + v_3 - v_8 - 2{,}387 \\
v_9 &= -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 4{,}641\,v_8 + 1{,}511 \\
v_4 &= -0{,}946\,v_1 + 1{,}867\,v_2 + 0{,}475\,v_3 - 3{,}641\,v_8 - 0{,}779 \\
v_7 &= -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 3{,}641\,v_8 + 1{,}611
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Dazu kommen noch die Fehlergleichungen für die unabhängigen v selbst, nämlich:

$$v_1 = v_1 \qquad v_2 = v_2 \qquad v_3 = v_3 \qquad v_8 = v_8 \qquad (3)$$

Die Gewichte p sind schon bei (2) S. 208 angegeben, es ist uns aber dieses Mal bequemer, die Gewichtseinheit 100fach kleiner zu nehmen, und damit bekommen wir folgende Tabelle der Coëfficienten der Fehlergleichungen (2) und (3) und der Gewichte p, nebst $\sqrt{p}$.

Fehlergleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_8		p	$\sqrt{p}$
$v_1 =$	$+1{,}000\,v_1$	. .	. .	. .	. .	0,70	0,837
$v_2 =$	. .	$+1{,}000\,v_2$	. .	. .	. .	0,07	0,265
$v_3 =$	. .	. .	$+1{,}000\,v_3$	. .	. .	1,01	1,005
$v_8 =$	. .	. .	. .	$+1{,}000\,v_8$	. .	0,28	0,529
$v_5 =$	$-1{,}000\,v_1$	. .	$-1{,}000\,v_3$	. .	$+1{,}578$	0,85	0,922
$v_6 =$	$+1{,}000\,v_1$	$-1{,}000\,v_2$	$+1{,}000\,v_3$	$-1{,}000\,v_8$	$-2{,}387$	0,57	0,755
$v_4 =$	$-0{,}946\,v_1$	$+1{,}867\,v_2$	$+0{,}475\,v_3$	$-3{,}641\,v_8$	$-0{,}779$	0,47	0,686
$v_7 =$	$-0{,}054\,v_1$	$-0{,}867\,v_2$	$-1{,}475\,v_3$	$+3{,}641\,v_8$	$+1{,}611$	0,10	0,316
$v_9 =$	$-0{,}054\,v_1$	$-0{,}867\,v_2$	$-1{,}475\,v_3$	$+4{,}641\,v_8$	$+1{,}511$	0,30	0,548

(4)

Um die Gewichte ein für alle mal zu berücksichtigen, multiplizieren wir die Coëfficienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen bzw. mit $\sqrt{p}$ und bekommen damit folgende neue Tabelle:

Gleichgewichtige Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\sqrt{p_1}\,v_1 = & +0{,}84\,v_1 & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\
\sqrt{p_2}\,v_2 = & \cdot\,\cdot & +0{,}26\,v_2 & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\
\sqrt{p_3}\,v_3 = & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & +1{,}00\,v_3 & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot \\
\sqrt{p_8}\,v_8 = & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & +0{,}53\,v_8 & \cdot\,\cdot \\
\sqrt{p_5}\,v_5 = & -0{,}92\,v_1 & \cdot\,\cdot & -0{,}92\,v_3 & \cdot\,\cdot & +1{,}46 \\
\sqrt{p_6}\,v_6 = & +0{,}75\,v_1 & -0{,}75\,v_2 & +0{,}75\,v_3 & -0{,}75\,v_8 & -1{,}80 \\
\sqrt{p_4}\,v_4 = & -0{,}65\,v_1 & +1{,}28\,v_2 & +0{,}33\,v_3 & -2{,}49\,v_8 & -0{,}53 \\
\sqrt{p_7}\,v_7 = & -0{,}02\,v_1 & -0{,}27\,v_2 & +0{,}46\,v_3 & +1{,}15\,v_8 & +0{,}51 \\
\sqrt{p_9}\,v_9 = & -0{,}03\,v_1 & -0{,}48\,v_2 & -0{,}81\,v_3 & +2{,}55\,v_8 & +0{,}83
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Die Abrundung auf 0,01 ist hinreichend zur Erlangung einer Winkelgenauigkeit von 0,01″.

Die hiezu gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
+\underline{2{,}54\,v_1} & -1{,}37\,v_2 & +1{,}23\,v_3 & +0{,}96\,v_8 & -2{,}38 = 0 \\
 & +\underline{2{,}57\,v_2} & +0{,}37\,v_3 & -4{,}16\,v_8 & +0{,}14 = 0 \\
 & & +\underline{3{,}39\,v_3} & -3{,}98\,v_8 & -3{,}77 = 0 \\
 & & & +\underline{14{,}87\,v_8} & +5{,}37 = 0 \\
 & & & & +\underline{6{,}60}
\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Die Auflösung dieses Systems gab:

$$v_1 = +0{,}64 \qquad v_2 = -0{,}41 \qquad v_3 = +0{,}46 \qquad v_8 = -0{,}40 \qquad (7)$$

Durch Einsetzen dieser 4 ersten v in die Fehlergleichungen (4) bekommt man auch alle anderen v, und zwar überall auf etwa 0,01″ übereinstimmend mit den früheren Resultaten v von (13) § 72 S. 210, weshalb wir diese Zahlen nicht noch einmal hersetzen.

Die Elimination der Normalgleichungen (6) giebt auch ein Schlussglied:

$$[ll.4] = 1{,}14 \qquad (8)$$

was ebenfalls mit 113,8 nach (15) § 72. S. 211 genügend stimmt, mit Rücksicht auf die nun 100 mal kleinere Gewichtseinheit.

Der mittlere Winkelfehler für die Gewichtseinheit ist jetzt:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{9-4}} = \sqrt{\frac{1{,}14}{5}} = \pm\,0{,}477'' \qquad (9)$$

Dieses entspricht dem früheren 4,77″ nach (16) § 72. S. 211 bei 100fach grösserer Gewichtseinheit.

Wir wollen noch das Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Winkel bestimmen, und zwar soll diese Funktion die Seite JM sein. Die Seite DH gilt als fehlerfreie Basis, die Funktion ist daher:

$$JM = DH \frac{\sin\,[1]\,\sin\,[6]}{\sin\,[3]\,\sin\,[9]} \qquad (10)$$

oder logarithmisch:

$$\log JM = \log DH + \log\sin\,[1] + \log\sin\,[6] - \log\sin\,[3] - \log\sin\,[9] \qquad (11)$$

Das Differential ist:

$$d\log JM = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg[1]\,d[1] + \frac{\mu}{\varrho}\,cotg[6]\,d[6] - \frac{\mu}{\varrho}\,cotg[3]\,d[3] - \frac{\mu}{\varrho}\,cotg[9]\,d[9]$$

$$d\log JM = 0{,}32\,d[1] + 0{,}90\,d[6] - 4{,}46\,d[3] - 2{,}86\,d[9] \qquad (12)$$

Hier sind aber nur [1] und [3] unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es dürfen daher nur $d[1]$ und $d[3]$, oder die Differentiale $d[2]$ und $d[8]$ der ebenfalls unabhängigen ausgeglichenen Unbekannten [2] und [8] in (12) vorkommen. Um daher $d[6]$ und $d[9]$ zu eliminieren, betrachten wir die Fehlergleichungen (2) und bilden daraus:

$$\left.\begin{aligned} d[9] &= -0{,}054\,d[1] - 0{,}867\,d[2] - 1{,}475\,d[3] + 4{,}641\,d[8] \\ d[6] &= d[1] - d[2] + d[3] - d[8] \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Diese Gleichungen sind deswegen richtig, weil in den Fehlergleichungen die Absolutglieder l verschwinden, wenn man von den ausgeglichenen Winkeln [1] [2] ... statt von den beobachteten Winkeln (1) (2) ... ausgeht, und entsprechend $d[1]$ $d[2]$ ... statt v_1 v_2 ... setzt Die zweite Gleichung (13) kann man unmittelbar aus der Figur ablesen.

Setzt man also (13) in (12), so erhält man:

$$d \log JM = +1{,}37\,d[1] + 1{,}58\,d[2] + 0{,}66\,d[3] - 14{,}17\,d[8] \quad (14)$$

also:

$$f_8 = -14{,}17 \qquad f_3 = +0{,}66 \qquad f_1 = +1{,}37 \qquad f_2 = +1{,}58 \quad (15)$$

Wir haben hier die Ordnung f_8 f_3 f_1 f_2 angenommen, weil es uns für spätere Zwecke interessiert, v_2 als letzte Unbekannte zu haben, um das Gewicht von v_2 gelegentlich mit zuerhalten. Setzt man nun, um der Anweisung von § 29. S. 74 und 75 zu entsprechen, die bei (15) berechneten Werte f an Stelle der Absolutglieder der Normalgleichungen (6), und ordnet nach der Folge f_8 f_3 f_1 f_2, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{14{,}87\,q_8} - 3{,}98\,q_3 + 0{,}96\,q_1 - 4{,}16\,q_2 + 14{,}17 &= 0 \\ +\underline{3{,}39\,q_3} + 1{,}23\,q_1 + 0{,}37\,q_2 - 0{,}66 &= 0 \\ +\underline{2{,}54\,q_1} - 1{,}37\,q_2 - 1{,}37 &= 0 \\ +\underline{2{,}57\,q_2} - 1{,}58 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Die Weiterelimination giebt:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{2{,}32\,q_3} + 1{,}49\,q_1 - 0{,}74\,q_2 + 3{,}12 &= 0 \\ +\underline{2{,}48\,q_1} - 1{,}10\,q_2 - 2{,}28 &= 0 \\ +\underline{1{,}41\,q_2} + 2{,}39 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} +\underline{1{,}52\,q_1} - 0{,}62\,q_2 - 4{,}28 &= 0 \\ +\underline{1{,}17\,q_2} + 3{,}38 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$+\underline{0{,}92\,q_2} - 1{,}61 = 0 \quad (19)$$

Die hier geschriebenen q sind bloss Zeichen für die Ordnung der früheren v.

Nach Anleitung von (13) § 29. S. 75 hat man nun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} &= \frac{14{,}17^2}{14{,}87} + \frac{3{,}12^2}{2{,}32} + \frac{4{,}28^2}{1{,}52} + \frac{1{,}61^2}{0{,}92} \\ &= 13{,}50 + 4{,}20 + 12{,}05 + 2{,}81 = 32{,}56 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 0{,}477\sqrt{32{,}56} = \pm 2{,}72 \quad (21)$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Funktion (11) in Einheiten der 6ten Decimale, also:

$$\log JM = 4.251\,6662{\cdot}4 \pm 27{\cdot}2 \quad (22)$$

$$JM = 17\,851{,}15^m \pm 0{,}11^m \quad (23)$$

Gelegentlich hat man auch in dem letzten Coëfficienten von q_2 in (19) das Gewicht der Winkelkorrektion v_2 erhalten, nämlich:

$$P_2 = 0{,}92 \quad (24)$$

(derselbe Coëfficient 0,92 würde auch erhalten, wenn man die schon früher vorhandenen Gleichungen (6) so auflöste, dass v_2 die letzte Unbekannte wäre).

Hieraus findet man auch den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels $(2) + v_2 = [2]$, nämlich:

$$M_2 = \frac{m}{\sqrt{0,92}} = \pm 0,50''$$

(die Eliminationen dieses § sind mit dem Rechenschieber und mit der Rechenscheibe gemacht, also überall nur auf etwa 2—3 Stellen genau).

§ 74. Ausgleichung einer Triangulierung mit vollen Richtungs-Sätzen.

Wenn man auf allen Stationen je einen vollen Richtungs-Satz gemessen hat, oder wenn man auf allen Stationen je gleichviele volle Sätze gemessen, und diese durch Mittelbildungen in je *einen* vollen Satz vereinigt hat, so ist die folgende Methode der Triangulierungsausgleichung anzuwenden.

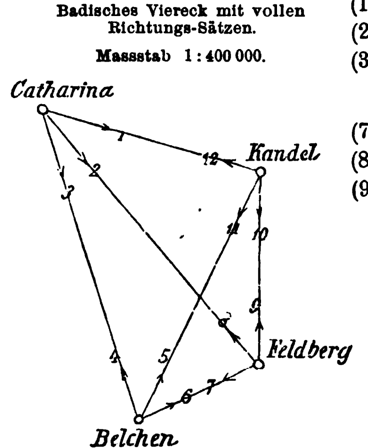
Auch in gewissen anderen Fällen der Stationsbeobachtungen ist dieses Verfahren streng richtig, und in vielen Fällen empfiehlt es sich als sehr zweckmässige Näherungsmethode.

Zu diesen Fällen gehört das Viereck Fig. 12. der badischen Triangulierung, welches wir im Folgenden behandeln, ohne über die Art der Messung hier Rechenschaft zu geben (vgl. hierüber Zeitschr. f. Verm. 1878 S. 18—25).

Man möge zunächst das folgende als ein fingiertes Beispiel der Netzausgleichung mit lauter vollen Richtungs-Sätzen betrachten (vgl. den späteren § 77).

Die gemessenen Richtungen haben wir näherungsweise nach dem Koordinatensystem orientiert ($+x$ nach Süden, badisches System):

Fig. 12.
Badisches Viereck mit vollen Richtungs-Sätzen.
Massstab 1 : 400 000.



Catharina.	Belchen.
(1) = 284° 33′ 24,00″	(4) = 162° 22′ 40,13″
(2) = 319 25 51,44	(5) = 206 59 7,20
(3) = 342 22 44,90	(6) = 246 26 53,07
Feldberg.	**Kandel.**
(7) = 66° 26′ 53,07″	(10) = 1° 49′ 59,47″
(8) = 139 25 48,91	(11) = 26 59 9,14
(9) = 181 49 59,47	(12) = 104 33 24,00

(1)

Die Richtung (1) stimmt mit der Gegenrichtung (12), ebenso stimmt (10) mit (9), (7) mit (6) überein, weil dieses bei der willkürlichen Festsetzung der Anfangsrichtungen so angenommen worden ist; dass die übrigen Richtungen, z. B. (5) und (11) nicht stimmen, hat seinen Grund teils in den Beobachtungsfehlern, teils aber auch in dem Umstand, dass die Dreiecke nicht eben, sondern sphärisch sind.

Zur Netzausgleichung braucht man zuerst die sphärischen Excesse, und hiezu *eine* Seite des Netzes. Z. B. *log* (Catharina—Belchen) = 4.53697. Die geographische Breite ist ungefähr 48°, und der Logarithmus des Erdhalbmessers daher $log\, r = 6.80479$,

womit die Excesse berechnet wurden, wie sie in der folgenden Zusammenstellung angegeben sind, welche alle 4 Summenproben enthält:

Beobachtet: (2)

(1,3) =	57°	49′	20,90″	(2,3) =	22°	56′	53,46″
(4,5) =	44	36	27,07	(7,8) =	72	58	55,84
(11,12) =	77	34	14,86	(4,6) =	84	4	12,94
Summe	180°	0′	2,83″	Summe	180°	0′	2,24″
soll	180	0	1,83	soll	180	0	1,22
		$w =$	$+ 1,00''$			$w =$	$+ 1,02''$
(5,6) =	39°	27′	45,87″	(8,9) =	42°	24′	10,56″
(7,9) =	115	23	6,40	(10,12) =	102	43	24,53
(10,11) =	25	9	9,67	(1,2) =	34	52	27,44
Summe	180°	0′	1,94″	Summe	180°	0′	2,53″
soll	180	0	0,67	soll	180	0	1,28
		$w =$	$+ 1,27''$			$w =$	$+ 1,25''$

Bezeichnet man die Richtungs-Korrektionen mit $v_1\ v_2 \ldots v_{12}$, so folgen aus diesen Probesummen folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
v_3 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} + 1{,}00'' &= 0\\
v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 1{,}02'' &= 0\\
v_6 - v_5 + v_9 - v_7 + v_{11} - v_{10} + 1{,}27'' &= 0\\
v_9 - v_8 + v_{12} - v_{10} + v_2 - v_1 + 1{,}25'' &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

In jeder dieser Gleichungen ist die Summe der Coëfficienten = Null; $+1-1+1-1+1-1=0$, wie sich aus der Entstehung dieser Gleichungen unmittelbar ergiebt (vgl. die Anmerkung am Schluss dieses §. S. 221).

Wenn irgend welche 3 von diesen 4 Bedingungsgleichungen erfüllt sind, so ist die 4te von selbst erfüllt, man hat daher nur 3 dieser Gleichungen in die Ausgleichung einzuführen.

Es besteht ferner eine Seitenbedingungsgleichung:

$$\text{Es soll sein}\quad \frac{\sin(1,2)\,\sin(4,6)\,\sin(10,11)}{\sin(2,3)\,\sin(5,6)\,\sin(10,12)} = 1$$

Hiezu wird mit den beobachteten Richtungsdifferenzen die Probe gemacht:

Beobachtet: (4)

						Δ *log sin* für 10″
(1,2) =	34°	52′	27,44″	*log sin* (1,2)	9.757 2273	+ 302
(4,6) =	84	4	12,94	*log sin* (4,6)	9.997 6699	+ 22
(10,11) =	25	9	9,67	*log sin* (10,11)	9.628 4216	+ 449
					9.383 3188	
(2,3) =	22°	56′	53,46″	*log sin* (2,3)	9.590 9515	+ 498
(5,6) =	39	27	45,87	*log sin* (5,6)	9.803 1677	+ 256
(10,12) =	102	43	24,53	*log sin* (10,12)	9.989 2025	— 48
					9.383 3217	
				$w =$	— 0.000 0029	

Für Einheiten der 6ten Logarithmenstelle hat man die Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned}
&+ 3{,}02\,(v_2 - v_1) + 0{,}22\,(v_6 - v_4) + 4{,}49\,(v_{11} - v_{10})\\
&- 4{,}98\,(v_3 - v_2) - 2{,}56\,(v_6 - v_5) + 0{,}48\,(v_{12} - v_{10}) \quad 2{,}9 = 0
\end{aligned}$$

oder nach $v_1\ v_2\ v_3\ .\ .\ .$ geordnet:

$$-3{,}02\,v_1 + 8{,}00\,v_2 - 4{,}98\,v_3 - 0{,}22\,v_4 + 2{,}56\,v_5 - 2{,}34\,v_6 - 4{,}97\,v_{10} + 4{,}49\,v_{11} + 0{,}48\,v_{12} - 2{,}9 = 0 \qquad (5)$$

Die Coëfficienten-Summe $-3{,}02 + 8{,}00 \ldots + 0{,}48$ ist auch wieder $= 0$, wie bei den Gleichungen (3) (vgl. die Anmerkung am Schlusse S. 221).

Die lineare Seitengleichung (5), nebst *dreien* von den 4 Winkelgleichungen (3), bilden das vollständige System der Bedingungsgleichungen. Mit Ausscheidung der dritten Gleichung der Gruppe (3) bilden wir die Tabelle der Coëfficienten der Bedingungsgleichungen:

Coëfficienten der Bedingungsgleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
$k_1\,a$	−3,02	+8,00	−4,98	−0,22	+2,56	−2,34	. .	. .	. .	−4,97	+4,49	+0,48	−2,90
$k_2\,b$	−1	. .	+1	−1	+1	. .	. .	. .	. .	. .	−1	+1	+1,00
$k_3\,c$	. .	−1	+1	−1	. .	+1	−1	+1	. .	. .	. .	. .	+1,02
$k_4\,d$	−1	+1	. .	. .	. .	. .	. .	−1	+1	−1	. .	+1	+1,25

(6)

Die Berechnung der Summen-Coëfficienten ist sehr einfach, es ist z. B.:

$$[aa] = 3{,}02^2 + 8{,}00^2 + 4{,}98^2 + \ldots\ \ldots + 0{,}48^2 = 155{,}09$$
$$[ab] = +3{,}02 - 4{,}98 + 0{,}22 + 2{,}56 - 4{,}49 + 0{,}48 = -3{,}19 \text{ u. s. w.}$$

Die Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{rrrrl} \underline{155{,}09\,k_1} & -\,3{,}19\,k_2 & -\,15{,}10\,k_3 & +\,16{,}47\,k_4 & -\,2{,}90 = 0 \\ & \underline{6{,}00\,k_2} & +\,2{,}00\,k_3 & +\,2{,}00\,k_4 & +\,1{,}00 = 0 \\ & & \underline{6{,}00\,k_3} & -\,2{,}00\,k_4 & +\,1{,}02 = 0 \\ & & & \underline{6{,}00\,k_4} & +\,1{,}25 = 0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = +0{,}044 \qquad k_2 = +0{,}078 \qquad k_3 = -0{,}232 \qquad k_4 = -0{,}431 \qquad (8)$$

Nach Anleitung der Tabelle der Bedingungsgleichungen (6) macht man folgende tabellarische Berechnung der Korrektionen v:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+ 0,044	−0,132	+0,352	−0,218	−0,010	+0,112	−0,103	. .	. .	. .	−0,217	+0,197	+0,021
+ 0,078	−0,078	. .	+0,078	−0,078	+0,078	. .	. .	. .	. .	. .	−0,078	+0,078
− 0,232	. .	+0,232	−0,232	+0,232	. .	−0,232	+0,232	−0,232	. .	. .	. .	. .
− 0,431	+0,431	−0,431	. .	. .	. .	. .	. .	+0,431	−0,431	+0,431	. .	−0,431
v	+0,221	+0,153	−0,372	+0,144	+0,190	−0,335	+0,232	+0,199	−0,431	+0,214	+0,119	−0,332
Summe		− 0,002			− 0,001			0,000			+ 0,001	

(9)

Diese Werte v geben stationsweise je die Summe 0,000″, abgesehen von Abrundungsfehlern (vgl. die Anmerkung S. 221).

Fügt man die so erhaltenen v zu den beobachteten Richtungen hinzu, wobei wir auf 0,01″ abrunden, so erhält man folgendes:

Beobachtet	v	Ausgeglichen	v^2	
(1) = 284° 33′ 24,00″	+ 0,22″	[1] = 284° 33′ 24,22″	0,0484	
(2) = 319 25 51,44	+ 0,15	[2] = 319 25 51,59	0,0225	
(3) = 342 22 44,90	— 0,37	[3] = 342 22 44,53	0,1369	
(4) = 162° 22′ 40,13″	+ 0,14″	[4] = 162° 22′ 40,27″	0,0196	
(5) = 206 59 7,20	+ 0,19	[5] = 206 59 7,39	0,0361	
(6) = 246 26 53,07	— 0,33	[6] = 246 26 52,74	0,1089	
(7) = 66° 26′ 53,07″	+ 0,23″	[7] = 66° 26′ 53,30″	0,0529	(10)
(8) = 139 25 48,91	+ 0,20	[8] = 139 25 49,11	0,0400	
(9) = 181 49 59,47	— 0,43	[9] = 181 49 59,04	0,1849	
(10) = 1° 49′ 59,47″	+ 0,21″	[10] = 1° 49′ 59,68″	0,0441	
(11) = 26 59 9,14	+ 0,12	[11] = 26 59 9,26	0,0144	
(12) = 104 33 24,00	— 0,33	[12] = 104 33 23,67	0,1089	
			$[vv]$ = 0,8176	

Durch Subtraktionen der ausgeglichenen Richtungen bildet man die ausgeglichenen Winkel und stellt dieselben abermals wie bei (2) in Dreiecken zusammen. Zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln, welche mit (1,3), (4,5) . . . bezeichnet waren, bezeichnen wir die ausgeglichenen Winkel mit [1,3], [4,5] . . .:

Ausgeglichen:

[1,3] = 57° 49′ 20,31″	[2,3] = 22° 56′ 52,94″	
[4,5] = 44 36 27,12	[7,8] = 72 58 55,81	
[11,12] = 77 34 14,41	[4,6] = 84 4 12,47	
Summe 180° 0′ 1,84″	Summe 180° 0′ 1,22″	
soll 1,83	soll 1,22	(11)
[5,6] = 39° 27′ 45,35″	[8,9] = 42° 24′ 9,93″	
[7,9] = 115 23 5,74	[10,12] = 102 43 23,99	
[10,11] = 25 9 9,58	[1,2] = 34 52 27,37	
Summe 180° 0′ 0,67″	Summe 180° 0′ 1,29″	
soll 0,67	soll 1,28	

Zur Untersuchung, ob die Seitengleichung stimmt, macht man statt der früheren logarithmischen Rechnung (4) die folgende logarithmische Rechnung:

Ausgeglichen:

[1,2] = 34° 52′ 27,37″	*log sin* [1,2]	9.757 2271	
[4,6] = 84 4 12,47	*log sin* [4,6]	9.997 6699	
[10,11] = 25 9 9,58	*log sin* [10,11]	9.628 4212	
		9.383 3181	(12)
[2,3] = 22° 56′ 52,94″	*log sin* [2,3]	9.590 9490	
[5,6] = 39 27 45,35	*log sin* [5,6]	9.803 1664	
[10,12] = 102 43 23,99	*log sin* [10,12]	9.989 2028	
		9.383 3182	

Mit den ausgeglichenen Richtungen berechnet man alle Dreiecksseiten auf allen

Wegen übereinstimmend. Als Basis nehmen wir hiezu die Seite Catharina—Belchen nach Angabe der badischen Landestriangulierung:

$$\text{Catharina} - \text{Belchen} = 34\,432{,}57^m \tag{13}$$

Unter Annahme dieser Länge wurden mit den ausgeglichenen Winkeln (12) oder den entsprechenden Sinuslogarithmen (13) folgende Entfernungen widerspruchsfrei berechnet:

Catharina—Belchen . .	$= 34\,432{,}57^m$	$log = 4.536\,9695$	(14)
Catharina—Feldberg . .	$= 35\,816{,}62$	$4.554\,0846$	
Catharina—Kandel . . .	$= 24\,760{,}43$	$4.393\,7582$	
Belchen—Feldberg . . .	$= 14\,039{,}83$	$4.147\,3617$	
Belchen—Kandel	$= 29\,843{,}17$	$4.474\,8450$	
Feldberg—Kandel . . .	$= 20\,994{,}59$	$4.322\,1074$	

(Eine Vergleichung dieser Resultate mit den entsprechenden Seiten der offiziellen badischen Triangulierung, nebst den Koordinaten der Eckpunkte, ist in der Zeitschr. für Verm. 1878 S. 33—34 gegeben.)

In Bezug auf Genauigkeitsbestimmung hat man zuerst die Summe $[vv]$ nach (10) ins Auge zu fassen. Eine Probe dafür bekommt man durch die Formel $[vv] = -[wk]$, welche $[vv] = 0{,}825$, also genügende Übereinstimmung mit (11) giebt. Wir nehmen im Mittel $[vv] = 0{,}82$, und haben damit den mittleren Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{0{,}82}{4}} = \pm 0{,}45'' \tag{15}$$

oder den mittleren Fehler eines Winkels vor der Ausgleichung:

$$m' = m\sqrt{2} = \pm 0{,}64'' \tag{16}$$

Als Funktion der ausgeglichenen Elemente nehmen wir diesesmal den Winkel Kandel-Catharina-Belchen; derselbe wird angegeben durch die Funktion:

$$F = [3] - [1] \tag{17}$$

Da diese Funktion an und für sich schon linear ist, so erhält man sofort die Coëfficienten f der allgemeinen Formel (1) § 42. S. 102, nämlich:

$$f_1 = -1 \qquad f_3 = +1 \tag{18}$$

alle andern f sind hier gleich Null.

Unter Zuziehung der Coëfficienten $a\ b\ c\ \ldots$ der Bedingungsgleichungen nach (6) bildet man:

$$[af] = -1{,}96 \quad [bf] = +2{,}00 \quad [cf] = +1{,}00 \quad [df] = +1{,}00 \quad [ff] = +2{,}00 \tag{19}$$

Diese Werte setzt man an Stelle der Absolutglieder der Normalgleichungen (7), d. h. man bildet das Coëfficienten-System:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
+\underline{155{,}09} & -3{,}19 & -15{,}10 & +16{,}47 & -1{,}96 \\
 & +\underline{6{,}00} & +2{,}00 & +2{,}00 & +2{,}00 \\
 & & +\underline{6{,}00} & -2{,}00 & +1{,}00 \\
 & & & +\underline{6{,}00} & +1{,}00 \\
 & & & & +\underline{2{,}00}
\end{array}\right\} \tag{20}$$

Damit macht man die gewöhnliche Elimination, wobei alle Glieder, welche f nicht enthalten, dieselben sind, wie bei der Elimination aus (7), und zum Schluss bekommt man:

$$[ff.4] = 1{,}22 \tag{21}$$

Dieses ist der reciproke Wert des Gewichts der Funktion (17); es ist also der mittlere Fehler dieser Funktion:

$$M = m\sqrt{1{,}22} = 0{,}45\sqrt{1{,}22} = \pm\, 0{,}50'' \tag{22}$$

Dieses ist der mittlere Fehler des Winkels Kandel—Catharina—Belchen *nach* der Ausgleichung, während nach (16) der mittlere Fehler eines Winkels *vor* der Ausgleichung $= \pm\, 0{,}64''$ war.

Der Genauigkeitsgewinn durch die Ausgleichung ist also für diesen Winkel durch das Verhältnis $0{,}64 : 0{,}50 = 1{,}28$ ausgedrückt.

Anmerkung zu § 74. und zu § 68.

Wenn die Dreiecksnetz-Bedingungen sich auf Richtungen beziehen, so ist in jeder Bedingungsgleichung die algebraische Summe der Coëfficienten gleich Null, und die Richtungsverbesserungen v geben stationsweise addiert ebenfalls je die Summe gleich Null.

Diese zwei Sätze, welche im vorstehenden Zahlenbeispiel bei den Gleichungen (3) und (5) und bei der Tabelle (9) zum Ausdruck kommen, lassen sich nach S. 184—187 und nach S. 98 sofort einsehen: Wenn eine auf Winkel bezogene Bedingungsgleichung etwa heisst:

$$a V + a' V' + a'' V'' + \ldots = 0$$

wo $V\ V'\ V'' \ldots$ Winkelverbesserungen sind, so lautet die entsprechende Gleichung für Richtungsverbesserungen v_l und v_r:

$$a\,(v_r - v_l) + a'\,(v_r' - v_l') + a''\,(v_r'' - v_l'') + \ldots = 0$$

$$a v_r - a v_l + a' v_r' - a' v_l' + a'' v_r'' - a'' v_l'' + \ldots = 0$$

hier ist:

$$a - a + a' - a' + a'' - a'' + \ldots = 0$$

Was die v betrifft, so sind deren Formeln in (9) S. 98 gegeben; wenn man dort addiert, so bekommt man:

$$[v] = [a]\,k_1 + [b]\,k_2 + [c]\,k_3$$

Versteht man unter $[v]$ die Summierung für je eine Station, so gelten auch $[a]$ $[b]$ $[c]$ nur stationsweise, sind also = Null, folglich auch stationsweise $[v]$ = Null.

§ 75. Stationsausgleichung mit Winkelmessungen.

Wenn Winkelmessungen so verteilt sind, dass auf einer Station mit s Strahlen mehr als $s - 1$ Winkel vorliegen, so kann man für jeden auf der Station überschüssigen Winkel eine Bedingung in die Netzausgleichung einfügen, wie in dem Beispiele von § 70. S. 195 mit den Stationen Oggersheim und Speyer gezeigt worden ist.

Wenn aber die Zahl der auf den Stationen überzähligen Winkel gross ist, so wird dieses Verfahren sehr umständlich, und ist deswegen noch nie im grossen angewendet worden.

Man hat deswegen zu dem Verfahren gegriffen, zuerst die Stationen für sich auszugleichen.

Indem wir die Frage, wie dann die Stationsausgleichungen ins Netz übergehen sollen, vorerst bei Seite lassen und auf später verschieben (§ 77. und § 78.), behandeln wir die Stationsausgleichung mit Winkeln jetzt als selbständige Aufgabe.

Man kann hiebei entweder nach vermittelnden oder nach bedingten Beobachtungen verfahren; diese beiden Methoden sollen hier behandelt und verglichen werden.

Wir behandeln zuerst mit Fig. 13. Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen, und gleichen nach vermittelnden Beobachtungen aus. Die Messungen sind:

$$\left.\begin{array}{llll} 1. = 48^\circ\,17'\;\;1{,}4'' & & 4. = 48^\circ\,35'\;14{,}3'' \\ 2. = \;\;96\;\;52\;\;16{,}8 & & 5. = 104\;\;37\;\;\;7{,}8 \\ 3. = 152\;\;54\;\;\;6{,}8 & & 6. = \;\;56\;\;\;1\;\;48{,}9 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

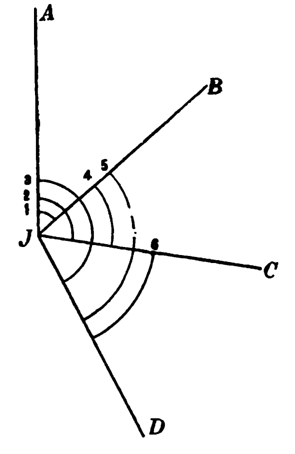


Fig. 13.
Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen.

Zur gegenseitigen Festlegung der 4 Strahlen $ABCD$ sind 3 Winkel nötig, wir führen deshalb 3 Winkel als unabhängige Unbekannte ein, wir nehmen:

Unbekannte: AJB , AJC , AJD

Als erste Näherungswerte der Unbekannten nehmen wir die Messungen selbst.

Näherungswerte:	Verbesserungen:
$(AJB) = 48^\circ\,17'\;\;1{,}4''$	x
$(AJC) = \;\;96\;\;52\;\;16{,}8$	y
$(AJD) = 152\;\;54\;\;\;6{,}8$	z

Ferner bezeichnen wir, wie sonst, die 6 Verbesserungen der Beobachtungen mit $v_1\; v_2\; v_3\; v_4\; v_5\; v_6$, und nun sind die 3 ersten Fehlergleichungen offenbar sehr einfach:

$$v_1 = x \qquad v_2 = y \qquad v_3 = z \qquad (2)$$

weil nämlich die 3 ersten Beobachtungen selbst als Näherungen genommen sind. Die 4te Fehlergleichung wird:

$$48^\circ 35'\, 14{,}3'' + v_4 = (96^\circ 52'\, 16{,}8'' + y) - (48^\circ 17'\, 1{,}4'' + x)$$

$$v_4 = -x + y + 1{,}1'' \qquad (2')$$

In ähnlicher Weise wird auch die 5te und die 6te Fehlergleichung gebildet, wir haben daher die Zusammenstellung aller 6 Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = +x \;.\;.\;\;.\;.\;\;.\;. \\ v_2 = \;.\;.\; +y \;.\;.\;\;.\;. \\ v_3 = \;.\;.\;\;.\;. +z \;\;.\;. \\ v_4 = -x + y \;.\;.\; + 1{,}1'' \\ v_5 = -x \;.\;.\; + z - 2{,}4'' \\ v_6 = \;.\;.\; - y + z + 1{,}1'' \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Mit gleichen Gewichten bekommt man die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} 3x - y - z + (+2{,}4 - 1{,}1) = 0 & \text{oder} & \underline{3x} - y - z + 1{,}3 = 0 \\ -x + 3y - z + (+1{,}1 - 1{,}1) = 0 & & +\underline{3y} - z + 0{,}0 = 0 \\ -x - y + 3z + (-2{,}4 + 1{,}1) = 0 & & \underline{3z} - 1{,}3 = 0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Die Auflösung giebt:

$$x = -0{,}3'' \qquad y = 0{,}0'' \qquad z = +0{,}3'' \qquad (5)$$

Fügt man diese Verbesserungen den gemessenen Winkeln 1. 2. 3. oder, was hier dasselbe ist, den Näherungen (1) (2) (3) zu, so bekommt man das *Stationsresultat:*

$$\left.\begin{array}{l} AB = 48^\circ\,17'\;\;1{,}1'' \\ AC = \;\;96\;\;52\;\;16{,}8 \\ AD = 152\;\;54\;\;\;7{,}1 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Wenn, wie hier, alle Winkel in allen Kombinationen gemessen sind, so kann man diese Ausgleichung ganz allgemein behandeln. Bei 4 Strahlen und allen 6 Winkelmessungen entstehen folgende Gleichungen:

Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= x \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
v_2 &= \;.\;.\;\; y \;.\;.\;\;.\;. \\
v_3 &= \;.\;.\;.\;.\;\; z \;.\;. \\
v_4 &= -x + y \;.\;. + l_4 \\
v_5 &= -x \;.\;. + z + l_5 \\
v_6 &= \;.\;. - y + z + l_6
\end{aligned}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
3x - y - z - l_4 - l_5 &= 0 \\
-x + 3y - z + l_4 - l_6 &= 0 \\
-x - y + 3z + l_5 + l_6 &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Deren Auflösung giebt:

$$x = \frac{l_4 + l_5}{4} \qquad y = \frac{-l_4 + l_6}{4} \qquad z = \frac{-l_5 - l_6}{4} \tag{8}$$

In dem oben behandelten Zahlenbeispiele war:

$$l_4 = +1{,}1'' \qquad l_5 = -2{,}4'' \qquad l_6 = +1{,}1''$$

woraus folgt:

$$x = -0{,}3'' \qquad y = 0{,}0'' \qquad z = +0{,}3''$$

wie oben bei (5).

Die entsprechenden Auflösungsformeln für 5 Strahlen heissen:

$$\left.\begin{aligned}
5x &= +l_5 + l_6 + l_7 \;.\;.\;\;.\;.\;\;.\;. \\
5y &= -l_5 \;.\;.\;\;.\;. + l_8 + l_9 \;.\;. \\
5z &= \;.\;. - l_6 \;.\;. - l_8 \;.\;. + l_{10} \\
5t &= \;.\;.\;\;.\;. - l_7 \;.\;. - l_9 - l_{10}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Weiteres hierüber werden wir in § 82. behandeln.

Wenn die Gewichte a priori *nicht gleich* sind, so wird auch bei symmetrischer Anordnung der Messungen die Ausgleichung doch nicht mehr symmetrisch.

Wir wollen zu den 6 Messungen, welche oben behandelt wurden, bzw. zu den 6 Fehlergleichungen (3) folgende Gewichte annehmen:

$$p_1 = 30 \quad p_2 = 20 \quad p_3 = 26 \quad p_4 = 25 \quad p_5 = 28 \quad p_6 = 44 \tag{10}$$

(Dieses ist das Zahlenbeispiel von *Gerling,* Ausgleichungsrechnungen § 57.)

Damit wird:

$$[p\,a\,a] = +30 + 25 + 28 = +83$$
$$[p\,a\,b] = -25 \text{ u. s. w.}$$

und die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
+\underline{83{,}0\,x} - 25{,}0\,y - 28{,}0\,z + 39{,}7 &= 0 \\
\underline{89{,}0\,y} - 44{,}0\,z - 20{,}9 &= 0 \\
\underline{98{,}0\,z} - 18{,}8 &= 0 \\
-\underline{244{,}77}
\end{aligned}$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{aligned}
x &= -0{,}34'' & p_x &= 54{,}6 \\
y &= +0{,}24 & p_y &= 50{,}4 \\
z &= +0{,}20 & p_z &= 54{,}8
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$[p\,l\,l\,.\,3] = [p\,v\,v] = 222{,}5 \tag{12}$$

und damit den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{222{,}5}{6-3}} = \pm 8{,}61''$$

Die mittleren Fehler von x y z werden demnach:

$$m_x = \frac{8{,}61}{\sqrt{54{,}6}} = \pm 1{,}17'' \qquad m_y = \frac{8{,}61}{\sqrt{50{,}4}} = \pm 1{,}21'' \qquad m_z = \frac{8{,}61}{\sqrt{54{,}8}} = \pm 1{,}16'' \tag{13}$$

Die wahrscheinlichsten Winkelwerte erhält man durch Zufügen der Korrektionen $x\ y\ z$ zu den angenommenen Näherungswerten, zugleich bildet man auch durch Sub traktionen die 3 übrigen Winkel und findet damit:

Winkel	Gemessen	v	Ausgeglichen	v^2	p	$p\,v^2$
1. = $A\,B$	48° 17′ 1,4″	— 0,34″	48° 17′ 1,06″	0,12	30	3,60
2. = $A\,C$	96 52 16,8	+ 0,24	96 52 17,04	0,06	20	1,20
3. = $A\,D$	152 54 6,8	+ 0,20	152 54 7,00	0,04	26	1,04
4. = $B\,C$	48 35 14,3	+ 1,68	48 35 15,98	2,82	25	70,50
5. = $B\,D$	104 37 7,8	— 1,86	104 37 5,94	3,46	28	96,89
6. = $C\,D$	56 1 48,9	+ 1,06	56 1 49,96	1,12	44	49,28
						222,51 (14)

Die Übereinstimmung von $[p\,v\,v]$ nach (12) und (14) bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

Wir wollen nun den bisher behandelten Fall auch nach bedingten Beobachtungen behandeln, und finden, dass zwischen den 6 gemessenen Winkeln folgende 3 Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)}\ -v_1+v_2\ \ldots\ -v_4\ \ldots\ \ldots\ +w_4=0 & , & w_4=+1{,}1'' \\ \text{b)}\ -v_1\ \ldots\ +v_3\ \ldots\ -v_5\ \ldots\ +w_5=0 & , & w_5=-2{,}4 \\ \text{c)}\ \ldots\ -v_2+v_3\ \ldots\ \ldots\ -v_6+w_6=0 & , & w_6=+1{,}1 \end{array}\right\} \quad (15)$$

Man kann diese Gleichungen unmittelbar aus der Figur ablesen, mit Einsetzung der Beobachtungen (1). Diese Gleichungen (15) sind aber auch schon in der zweiten Hälfte der früheren Fehlergleichungen (7) enthalten, wenn man daselbst setzt:

$$x=v_1 \quad y=v_2 \quad z=v_3 \quad \text{und} \quad l_4=w_4 \quad l_5=w_5 \quad l_6=w_6 \qquad (15\,\text{a})$$

Die Bedingungsgleichungen (15) geben folgende Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} +3\,k_1+k_2-k_3+w_4=0 \\ +k_1+3\,k_2+k_3+w_5=0 \\ -k_1+k_2+3\,k_3+w_6=0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Die allgemeine Auflösung hievon ist:

$$k_1=\frac{-2\,w_4+w_5-w_6}{4}\,,\ k_2=\frac{+w_4-2\,w_5+w_6}{4}\,,\ k_3=\frac{-w_4+w_5-2\,w_6}{4} \qquad (17)$$

und die Korrektionsformeln, welche den Bedingungsgleichungen (15) nach Vertikalreihen folgen, geben:

$$\left.\begin{array}{l|l} 4\,v_1=-k_1-k_2=+w_4+w_5 & 4\,v_4=-k_1=+2\,w_4-w_5+w_6 \\ 4\,v_2=+k_1-k_3=-w_4+w_6 & 4\,v_5=-k_2=-w_4+2\,w_5-w_6 \\ 4\,v_3=+k_2+k_3=-w_5-w_6 & 4\,v_6=-k_3=+w_4-w_5+2\,w_6 \end{array}\right\} \quad (18)$$

Damit haben wir wieder dasselbe, was in (8) enthalten ist, nach der bei (15a) angegebenen Bezeichnungsänderung.

Wenn man also, wie in diesem Falle, gleichgewichtige Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen hat, und wenn es sich um allgemeine Formeln handelt, so führt die Korrelatenmethode auf einem weiteren Weg zu demselben Resultat wie die Methode der vermittelnden Beobachtungen.

Wenn die Messungen *nicht* gleichgewichtig, oder nicht in allen Kombinationen angestellt sind, so ist die Korrelatenmethode zur numerischen Ausgleichung unter Umständen sehr nützlich.

Zur Vergleichung der Ausgleichung nach vermittelnden oder nach bedingten Beobachtungen stellen wir folgende Betrachtung an:

Zur Festlegung von s Strahlen sind $s-1$ Winkel nötig; hat man W Winkel gemessen, so hat man:

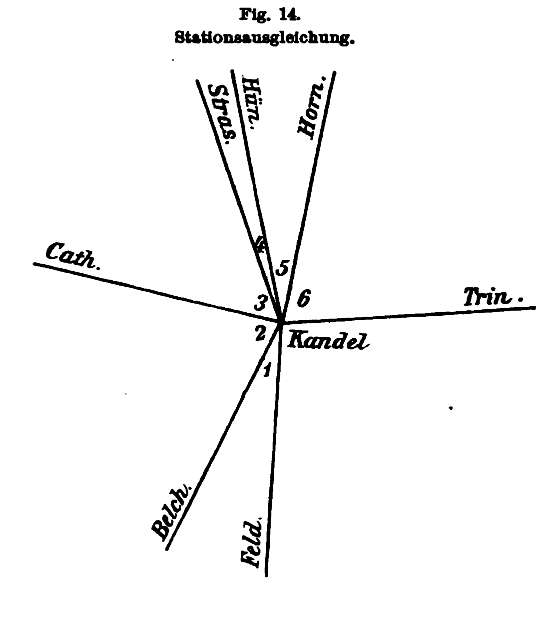
für vermittelnde Beobachtungen: $s-1$ unabhängige Unbekannte (19)

für bedingte Beobachtungen: $W-(s-1)$ Bedingungsgleichungen (20)

und entsprechend ist in beiden Fällen die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen. Z. B. bei $s=4$ Strahlen und $W=6$ Winkeln hat man in beiden Fällen 3 Gleichungen aufzulösen.

Bei vielen Strahlen und verhältnismässig wenigen Bedingungsgleichungen ist die Korrelatenmethode also sehr am Platz, wie folgendes Beispiel zeigt, dessen Zahlenwerte der badischen Triangulierung entnommen sind, (jedoch mit willkürlicher Auswahl zur Erlangung eines passenden Rechenbeispiels) die Winkel sind in neuer (centesimaler) Teilung angegeben.

Fig. 14.
Stationsausgleichung.



In Fig. 14. sind 6 unabhängige Winkel vorhanden: (1) (2) (3) (4) (5) (6). Ausser diesen 6 sind nur 2 Kontrollwinkel gemessen, nämlich [die Summe (1) + (2) = (7) und die Gesamtsumme (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = (8), es bestehen also nur 2 Bedingungsgleichungen.

Nr.	Zielpunkt links	Zielpunkt rechts	Gemessene Winkel	Gewicht p
1	Feldberg . .	Belchen . . .	(1) = 27,94758	5
2	Belchen . . .	Catharina . .	(2) = 86,18972	12
3	Catharina . .	Strassburg . .	(3) = 63,70226	4
4	Strassburg . .	Hünersedel . .	(4) = 8,76737	3
5	Hünersedel . .	Hornisgrinde .	(5) = 26,27865	4
6	Hornisgrinde .	Trinitatis . .	(6) = 82,73775	3
7	Feldberg . .	Catharina . .	(7) = 114,13753	5
8	Feldberg . .	Trinitatis . .	(8) = 295,62484	5
				41

Die erste Bedingungsgleichung heisst:

$$27{,}94758 + v_1 + 86{,}18972 + v_2 = 114{,}13753 + v_7$$

oder zusammengefasst, mit Annahme der Centesimalsekunde als Einheit:

$$v_1 + v_2 - v_7 - 2{,}3 = 0 \qquad (21)$$

In gleicher Weise stellt man die zweite Bedingungsgleichung auf:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 - v_8 - 15{,}1 = 0 \qquad (22)$$

oder tabellarisch geschrieben:

Coëfficienten der Bedingungsgleichungen (21) *und* (22)

	1	2	3	4	5	6	7	8	w
p	5	12	4	3	4	3	5	5	
a	+1	+1	..	..	..	..	−1	..	−2,3
b	+1	+1	+1	+1	+1	+1	..	−1	−15,1

(23)

Die Coëfficienten der Normalgleichungen werden:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = +\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} = 0{,}200 + 0{,}083 + 0{,}143 = +0{,}426$$

$$\left[\frac{a\,b}{p}\right] = +\frac{1}{5} + \frac{1}{12} = +0{,}283$$

$$\left[\frac{b\,b}{p}\right] = +\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = +1{,}649$$

also die zwei Normalgleichungen:

$$+0{,}426\,k_1 + 0{,}283\,k_2 - 2{,}3 = 0$$
$$+0{,}283\,k_1 + 1{,}649\,k_2 - 15{,}1 = 0$$

Deren Auflösung giebt:

$$k_1 = -0{,}8 \qquad k_2 = +9{,}3$$

Damit bestimmt man die Korrektionen v, indem man der Tabelle (23) nach Vertikallinien folgt:

$$v_1 = \frac{1}{5}(-0{,}8 + 9{,}3) = +1{,}7$$

Ebenso werden die übrigen v berechnet, welche in folgender Tabelle enthalten sind:

gemessen	Verbesserung v	Ausgeglichen	v^2	p	$p\,v^2$
(1) = 27,94758^g	$v_1 = +1{,}7$^cc	[1] = 27,94775^g	2,89	5	14,45
(2) = 86,18972	$v_2 = +0{,}7$	[2] = 86,18979	0,49	12	5,88
(3) = 63,70226	$v_3 = +2{,}3$	[3] = 63,70249	5,29	4	21,16
(4) = 8,76737	$v_4 = +3{,}1$	[4] = 8,76768	9,61	3	28,83
(5) = 26,27865	$v_5 = +2{,}3$	[5] = 26,27888	5,29	4	21,16
(6) = 82,73775	$v_6 = +3{,}1$	[6] = 82,73806	9,61	3	28,83
(7) = 114,13753	$v_7 = +0{,}2$	[7] = 114,13755	0,04	5	0,20
(8) = 295,62484	$v_8 = -1{,}9$	[8] = 295,62465	3,61	5	18,05
			36,83		138,56

Diese ausgeglichenen Winkel zeigen keine Widersprüche mehr.

Die Summe $[p\,v\,v]$ wird aus den einzelnen v in Übereinstimmung mit der Formel $-[w\,k]$ erhalten:

$$[p\,v\,v] = 138{,}6$$

also der mittlere Fehler eines Winkels vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{138{,}6}{2}} = \pm\, 8{,}3 \text{ Centesimalsekunden} = \pm\, 2{,}7''.$$

Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel müssten nach § 42. berechnet werden.

Summen-Probe im Horizont.

Der häufig vorkommende Fall, dass nur *eine* Probe, nämlich die Horizont-Summe vorhanden ist, ist natürlich in dem bisherigen mit enthalten, dieser Fall lässt sich aber auch nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels *zweier* ungleich genauer Messungen behandeln, ähnlich wie die schon früher in § 10. S. 26—29 behandelte Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Wir nehmen hiezu folgendes an:

Gemessen:	$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots \quad A_n$
mit den Gewichten:	$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \ldots \quad p_n$
Es soll sein:	$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n - 360° = 0$
Es ist	$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n - 360° = w \qquad (24)$

Der wahrscheinlichste Wert des ersten Winkels sei x; es liegen also zur Bestimmung von x zwei Beobachtungsresultate vor:

1) $x = A_1$ mit dem Gewicht p_1

2) $x = 360° - (A_2 + A_3 + \ldots A_n) = A_1 - w$ mit dem Gewicht p'

Das Gewicht p' wird bestimmt durch

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \ldots \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_1} \tag{25}$$

Der wahrscheinlichste Wert x ist nach (4) § 8. S. 20:

$$x = \frac{A_1 p_1 + (A_1 - w)\, p'}{p_1 + p'} = A_1 - \frac{p'}{p_1 + p'}\, w$$

und mit Einführung des Wertes von p' aus (25):

$$x = A_1 - \frac{1}{p_1} \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{26}$$

Da eine ähnliche Formel für die übrigen Winkel gilt, so hat man das Resultat in Worten: der Widerspruch w wird auf die einzelnen Winkel umgekehrt proportional ihren Gewichten verteilt.

Die Verbesserung v_1 des ersten gemessenen Winkels beträgt:

$$v_1 = -\frac{1}{p_1} \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{27}$$

und da eine ähnliche Formel auch für die anderen Winkel gilt, so hat man:

$$[p\,v\,v] = \frac{1}{p_1} \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2} + \frac{1}{p_2} \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2} + \ldots = \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{28}$$

Die Quadratwurzel hieraus ist der mittlere Fehler m einer Beobachtung vom Gewicht 1, also:

$$m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{29}$$

Der mittlere Fehler M_1 des ersten ausgeglichenen Winkels x wird erhalten, indem man m mit der Quadratwurzel von $p_1 + p'$ dividiert, die Ausführung giebt:

$$M_1 = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p_1}\left(\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_1}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{30}$$

Wenn alle Gewichte $p_1 = p_2 = \ldots p_n = 1$ werden, so werden die Formeln einfacher, nämlich:

$$x = A_1 - \frac{w}{n} \tag{31}$$

$$m = \frac{w}{\sqrt{n}} \tag{32}$$

$$M_1 = w \frac{\sqrt{n-1}}{n} = \frac{w}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \tag{33}$$

Aus (33) und (32) folgt, dass die Genauigkeit eines Winkels *nach* der Ausgleichung im Vergleich mit der Genauigkeit *vor* der Ausgleichung gewachsen ist im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$.

Der Genauigkeitsgewinn für einen Winkel ist also verhältnismässig klein, wenn viele Winkel im Horizont gemessen sind.

§ 76. Genäherte Stationsausgleichung von Richtungsbeobachtungen.

Hat man Richtungsbeobachtungen in lauter *vollen* Sätzen, so besteht die Ausgleichung lediglich in der Mittelbildung für alle Ablesungen je eines Zielpunktes.

Sind die einzelnen Sätze nicht alle vollständig, so ist die strenge Ausgleichung nach unserem späteren § 78. zu machen.

Dagegen wollen wir eine *genäherte* Ausgleichung dieses Falles*), welche sehr anschaulich ist, an der Hand des Beispiels auf S. 229 erläutern.

(Dieses Beispiel enthält eine willkürliche Auswahl aus den Messungen auf der Station Trenk der Gradmessung in Ostpreussen.) Wir haben dabei angenommen, dass wenigstens *ein* Zielpunkt (Mednicken) in allen Sätzen eingeschnitten ist, so dass alle Sätze auf Mednicken $= 0° 0' 0''$ reduziert werden können. Dieses ist jedoch nicht wesentlich; wäre z. B. in dem 8ten Satz nur l'' und l''' gemessen, nicht aber $l°$, so würde man etwa l'' auf das Mittel der sämtlichen vorhergehenden Ablesungen von Wargelitten bringen, und l''' entsprechend verschieben. Mit einigem Geschick wird man sich in solchen Fällen leicht helfen können, feste Regeln hiefür giebt es nicht.

Hat man so das Beobachtungsmaterial in der Tabelle I. geordnet, so bildet man in allen Kolumnen die Mittel A, und wenn die Sätze nur sehr wenig lückenhaft waren, oder wenn es sich nur um eine flüchtige Ausgleichung handelt, so behält man die Mittelwerte A sofort als Resultate bei.

*) Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland, London 1858 S. 62—66.

Genäherte Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen. (Station Trenk.)

Satz Num.	I. Beobachtete Richtungen: Mednicken l°	Fuchsberg l'	Wargelitten l''	Galtgarben l'''	x	
1	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 36,2″	287° 14′ 11,0″	346° 24′ 18,4″	+ 0,4	von II. heraufgesetzt.
2	0,0	7,5	4,5	. .	— 1,1	
3	0,0	. .	2,5	18,0	+ 0,3	
4	0,0	3,7	4,1	. .	+ 0,3	
5	0,0	6,1	3,4	. .	— 0,3	
6	0,0	4,7	. .	19,6	0,0	
7	0,0	6,5	. .	. .	— 0,3	
8	0,0	. .	3,7	20,5	— 0,9	
9	0,0	. .	1,2	. .	+ 0,8	
10	0,0	. .	. .	16,5	+ 1,0	
Summen	10. 0,0″	6. 34,7″	7. 20,4″	5. 93,0″	10 + 6 + 7 + 5 = 28	
Mittel A.	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 35,8″	287° 14′ 12,9″	346° 24′ 18,6″		

	II. Differenzen $A - l = v$				Quer-Summen	Anzahl q	Mittel x
1	0,0″	— 0,4″	+ 1,9″	+ 0,2″	+ 1,7	4	+ 0,4″
2	0,0	— 1,7	— 1,6	. .	— 3,3	3	— 1,1
3	0,0	. .	+ 0,4	+ 0,6	+ 1,0	3	+ 0,3
4	0,0	+ 2,1	— 1,2	. .	+ 0,9	3	+ 0,3
5	0,0	— 0,3	— 0,5	. .	— 0,8	3	— 0,3
6	0,0	+ 1,1	. .	— 1,0	+ 0,1	3	0,0
7	0,0	— 0,7	. .	. .	— 0,7	2	— 0,3
8	0,0	. .	— 0,8	— 1,9	— 2,7	3	— 0,9
9	0,0	. .	+ 1,7	. .	+ 1,7	2	+ 0,8
10	0,0	. .	. .	+ 2,1	+ 2,1	2	+ 1,0
Summen	0,0″	+ 3,2″ — 3,1	+ 4,0″ — 4,1	+ 2,9″ — 2,9		28	
	0,0	+ 0,1	— 0,1	0,0			
Probe, soll:	0,0	0,0	0,0	0,0			

	III. Verbesserte Richtungen $l + x$.				
1	359° 59′ 60,4″	83° 30′ 36,6″	287° 14′ 11,4″	346° 24′ 18,8″	Diese Werte werden durch Additionen $l + x$ von I. gebildet.
2	58,9	6,4	3,4	. .	
3	60,3	. .	2,8	8,3	
4	60,3	4,0	4,4	. .	
5	59,7	5,8	3,1	. .	
6	60,0	4,7	. .	9,6	
7	59,7	6,2	. .	. .	
8	59,1	. .	2,8	9,6	
9	60,8	. .	2,0	. .	
10	61,0	. .	. .	7,5	
Summen	10. 600,2″	6. 33,7″	7. 19,9″	5. 43,8″	
Mittel B.	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 35,6″	287° 14′ 12,8″	346° 24′ 18,8″	

Die weitere Ausgleichung dagegen gestaltet sich so:

II. Man bildet die Differenzen $A - l = v$ zwischen den Mitteln A und ihren darüber stehenden l, z. B.:

Fuchsberg Num. 1. $35{,}8'' - 36{,}2'' = -0{,}4''$ u. s. w.

Die algebraischen Summen dieser $A - l = v$ sind bekanntlich = Null, was als Rechenprobe der Abteilung II. dient.

Weiter bildet man für die Abteilung II. die Quersummen und die Quermittel, z. B.:

$$\frac{0{,}0'' - 0{,}4'' + 1{,}9'' + 0{,}2''}{4} = \frac{+1{,}7''}{4} = +0{,}4'' = x.$$

Diese x der letzten Spalte von II. setzt man unverändert hinauf nach I.

III. Die soeben besprochenen x werden zu den l in I. addiert, und die Summen nach III. heruntergesetzt. Hier bildet man wieder spaltenweise die Mittel $B.$, welche als Resultat gelten.

Um dieses Verfahren zu begründen, erinnern wir uns, dass es immer darauf ankommt, die Differenzen v zwischen den Resultaten und den Beobachtungen in ihrer Quadratsumme $[v\,v]$ möglichst klein zu machen. Man kann nun in diesem Falle die Gesamtsumme $[v\,v]$ in zweifacher Weise zerlegt denken:

1) Zerlegung nach Kolumnen $[v\,v] = [v^\circ v^\circ] + [v' v'] + [v'' v''] + \ldots$ (1)

2) Zerlegung nach Linien $[v\,v] = [v_1\,v_1] + [v_2 v_2] + [v_3\,v_3] + [v_4\,v_4] + \ldots$ (2)

Durch die Bildung der Kolumnenmittel A wird in jeder Kolumne für sich die Summe $[v^\circ v^\circ]$, bzw. $[v' v']$ oder $[v'' v'']$ möglichst klein gemacht, und in den einzelnen Linien wird dann $[v_1\,v_1]$, bzw. $[v_2\,v_2]$ u. s. w. noch verkleinert durch Anbringung der Satzverschiebungen $x_1\,x_2$ u. s. w., welche die arithmetischen Mittel der v jeder Linie sind.

Letzteres zeigt sich am deutlichsten an derjenigen Kolumne, welche am Anfang zur Hauptorientierung gedient hat, in unserem Beispiel an der Kolumne Mednicken; diese erhält in der Tabelle II. alle $v = 0$, d. h. alle Widersprüche werden dadurch den anderen Kolumnen zugeschoben, und erst nach Einführung der Verschiebungen x tritt eine gerechtere Verteilung der v ein.

Die *allmähliche* Verkleinerung von $[v\,v]$, zuerst in den Kolumnen, dann in den Linien, entspricht näherungsweise der M. d. kl. Q., welche bei strenger Anwendung eine *gemeinsame* Berücksichtigung aller Beziehungen in den Kolumnen und in den Linien verlangen würde.

Die Zahlenwerte der Tabelle III. haben immer noch den Charakter von *Original*-Beobachtungen, denn es sind nur die Ablesungen jedes Satzes um eine *konstante* Grösse x verschoben worden, und solche Verschiebung ist bei Richtungs-Beobachtungs-Sätzen immer willkürlich zulässig.

Man kann daher, mit der Tabelle III. von neuem anfangend, die ganze Rechnung wiederholen, und es ist möglich, dass man durch fortgesetzte Wiederholungen dieser Art den Resultaten einer strengen Ausgleichung nach der M. d. kl. Q. unbegrenzt nahe kommt.

Das ganze Verfahren bleibt aber doch immer nur eine Näherung, von der man nicht weiss, ob sie unbegrenzt konvergiert, und es ist daher kaum rätlich, die Rechnung mehr als 1—2 mal zu wiederholen.

Zur Untersuchung der Übereinstimmung mit der Methode der kleinsten Quadrate haben wir die Station *Lepaizi* der Gradmessung in Ostpreussen behandelt, und folgendes gefunden:

Zielpunkt.	M. d. kl. Q.	Näherung.	Diff.
Memel	0° 0′ 0,00″	0° 0′ 0,00″	0,00″
Leuchtthurm . .	2 10 14,76	2 10 14,52	— 0,24
Jakubowa	32 24 45,40	32 24 45,45	+ 0,05
Algeberg	262 58 48,42	262 58 48,76	+ 0,34
Nidden	303 48 55,30	303 48 55,36	+ 0,06.

§ 77. Netzausgleichung auf Grundlage abgeschlossener Stationsausgleichungen.

Wenn man jede Station für sich ausgeglichen hat, wie in den vorhergehenden § 75. und § 76. gelehrt worden ist, so liegt es sehr nahe, die Stations-Resultate wie unmittelbar gemessene volle Richtungssätze in das Netz einzuführen, und die Netzausgleichung nach § 74. zu vollziehen.

Ohne die theoretische Berechtigung dieses Verfahrens jetzt zu untersuchen (s. die spätere Betrachtung § 82.), können wir jetzt kurz angeben, dass dieses Verfahren als gute Näherungsmethode sehr oft angewendet worden ist, und für alle Messungen zweiten und niederen Ranges sehr zu empfehlen ist.

Wenn man bei den Messungen selbst keinen Strahl ungebührlich vernachlässigt hat, sondern bestrebt war, so lange zu messen, bis jeder Richtung gegenüber den andern Richtungen ihr Recht wiederfahren ist, so ist es auch gerechtfertigt, alle Stations-Richtungen in das Netz als *gleichgewichtig* einzuführen, wie auch in unserem kleinen Beispiel von § 74. geschehen ist.

In solcher Weise hat *Gauss* in den Jahren 1820—1830 seine hannoversche Gradmessung ausgeglichen.

Weiteres hierüber giebt eine Mitteilung von Herrn Oberst *Schreiber* in der Zeitschr. f. Vermessungswesen 1879, S. 141 (vgl. auch *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen I. S. 11).

Die streng wissenschaftliche Weiterentwicklung dieses Verfahrens mit Winkelmessungen in allen Richtungskombinationen werden wir in § 82. behandeln.

Zunächst gehen wir, der historischen Entwicklung der deutschen Vermessungen folgend, zu der *Bessel*schen Ausgleichung über.

§ 78. Strenge Stationsausgleichung von Richtungsbeobachtungen.

Bessels Methode mit Vervollständigung durch Genauigkeitsbestimmung.

Wenn auf einer Station mehrere vollständige Richtungs-Sätze beobachtet sind, d. h. solche Sätze, in welchen immer *alle* vorhandenen Richtungen eingeschnitten sind, so besteht die Ausgleichung aller dieser Messungen lediglich in einer Mittelbildung, wie das folgende (fingierte) einfache Beispiel zeigt:

	Zielpunkt A	Zielpunkt B	Zielpunkt C	
Satz 1.	0° 0′ 0,0″	45° 47′ 0,0″	120° 3′ 42,0″	
Satz 2.	0 0 0,0	45 47 0,4	120 3 43,4	(1)
Satz 3.	0 0 0,0	45 47 1,7	130 3 42,8	
Mittel	0° 0′ 0,0″	45° 47′ 0,70″	120° 3′ 42,73″	

Hiebei sind für den Zielpunkt A alle Ablesungen $= 0° \; 0' \; 0{,}0''$ gesetzt, indem angenommen ist, dass in jedem Satze die Ablesung für A von allen folgenden Ablesungen für B und C abgezogen wurde. Diese Annahme $0° \; 0' \; 0''$ ist immer zulässig, allein nicht wesentlich, denn wenn auch die Originalmessungen selbst eingesetzt würden, so wäre die einfache Mittelbildung doch die richtige Ausgleichung.

Wenn nun aber die einzelnen Sätze *nicht* vollständig sind, d. h. wenn z. B. in der obigen Tabelle (1) die eine oder andere Messung ausgefallen ist, so entsteht zunächst die Frage, ob wenigstens *ein* Zielpunkt in allen Sätzen vorkommt, damit man auf diesen einen Zielpunkt alle Sätze orientieren kann, allein wenn auch dieses der Fall ist, genügt die Mittelbildung doch nicht zur strengen Ausgleichung, zu welcher wir nun übergehen.

Fig. 15.
Richtungsmessungen. Satz 1.

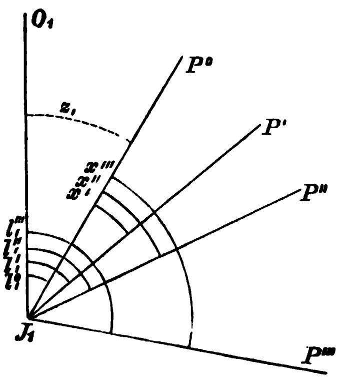
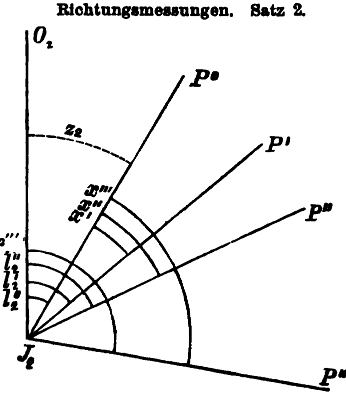


Fig. 16.
Richtungsmessungen. Satz 2.



Auf einem ersten Beobachtungspunkt J_1 (Fig. 15) wird ein Limbuskreis aufgestellt, dessen Nullhalbmesser die Lage $J_1 O_1$ hat; und beim Einschneiden der geodätischen Strahlen $P° \; P' \; P'' \; P'''$ werden an dem Limbuskreisrand die Ablesungen $l_1° \; l_1' \; l_1'' \; l_1'''$ gemacht. Obgleich hiebei die Lage des Kreisnullhalbmessers $J_1 O_1$ gegen die Zielstrahlen ohne alle geodätische Bedeutung ist, muss doch ein Winkel z_1, welcher den Nullhalbmesser $J_1 O_1$ gegen einen der genannten Strahlen festlegt, mit in Rechnung genommen werden.

Alles dieses wird mit verstelltem Limbus wiederholt, wie in Fig. 16. angedeutet ist; und indem wir nun die Sätze mit $_1 \; _2 \; _3 \ldots$ numerieren, die Zielpunkte aber, und alles, was sich darauf bezieht, mit $° \; ' \; '' \; ''' \ldots$ unterscheiden, haben wir folgende Übersicht:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\text{Satz}_1 & l_1° & l_1' & l_1'' & l_1''' & \ldots & z_1 \\
\text{Satz}_2 & l_2° & l_2' & l_2'' & l_2''' & \ldots & z_2 \\
\text{Satz}_3 & l_3° & l_3' & l_3'' & l_3''' & \ldots & z_3 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\text{Satz}_n & l_n° & l_n' & l_n'' & l_n''' & \ldots & z_n
\end{array}\right\} \quad (2)^*)$$

Die Gewichte der Beobachtungen sollen entsprechend durch $p_1° \; p_1' \; p_1'' \ldots$ bezeichnet werden; es sind zwar gewöhnlich alle Gewichte der Beobachtungen auf einer Station einander gleich, es ist aber die allgemeine Einführung von Gewichten dennoch nötig, damit man das Ausfallen einzelner Beobachtungen mathematisch ausdrücken kann. Wenn z. B. im zweiten Satz der Zielpunkt P''' fehlt, so ist $p_2''' = 0$.

*) *Bessel* hat auf S. 70 der Gradmessung in Ostpreussen statt unserer l die Bezeichnungen $m \; m_1' \; m_2'$ u. s. w., und statt unserer $z_1 \; z_2 \; z_3$ die Zeichen $x \; x_1 \; x_2$ u. s. w., ferner entsprechen unseren $x' \; x'' \; x'''$ die *Bessel*schen $A \; B \; C$. Unsere $z_1 \; z_2 \; z_3$ stehen in einer gewissen Beziehung zu derjenigen Grösse, welche auf S. 134 der Geraden in Ostpreussen von *Bessel* mit z bezeichnet ist, vgl. hiezu unseren späteren § 81. Wir

Durch die Ausgleichung werden allen Messungen Verbesserungen zugeteilt, welche mit V bezeichnet werden sollen *); wir haben also ausser (2) noch folgende Bezeichnungen festgestellt:

$$\begin{array}{llllllllll} & \text{Gewichte:} & & & & \text{Verbesserungen:} & & & \\ \text{Satz}_1 & p_1^{\circ} & p_1' & p_1'' & p_1''' & V_1^{\circ} & V_1' & V_1'' & V_1''' \\ \text{Satz}_2 & p_2^{\circ} & p_2' & p_2'' & p_2''' & V_2^{\circ} & V_2' & V_2'' & V_2''' \\ \text{Satz}_3 & p_3^{\circ} & p_3' & p_3'' & p_3''' & V_3^{\circ} & V_3' & V_3'' & V_3''' \end{array} \quad (3)$$

Die Beobachtungswerte l sind Richtungen. Man kann dieselben in jedem einzelnen Satz als Winkel betrachten, welche die Strahlen nach $P^{\circ}\ P'\ P''\ P'''$ mit einem gemeinschaftlichen aber unbekannten Anfangsstrahl nach O bilden. Diese Beobachtungen l sind gemacht worden zur Bestimmung derjenigen Winkel, welche die Strahlen $P^{\circ}\ P'\ P''\ P'''$ unter sich bilden, und da diese 4 Strahlen durch 3 Winkel gegenseitig festgelegt sind, so führen wir als unabhängige Unbekannte folgende Winkel ein:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Winkel } P^{\circ} P' = x' \\ \text{Winkel } P^{\circ} P'' = x'' \\ \text{Winkel } P^{\circ} P''' = x''' \end{array}\right\} \quad (4)$$

Es ist hiebei unwesentlich, dass diese Winkel einen Strahl, nämlich P° gemeinsam haben, man könnte auch z. B. die 3 Winkel $P^{\circ} P'$, $P' P''$, $P'' P'''$ als unabhängige Unbekannte einführen.

Nun kann zur Aufstellung der Fehlergleichungen geschritten werden. Z. B. für die Messung l_2''' hat man nach Fig. 16.: Es soll sein $l_2''' = z_2 + x'''$, also mit Zufügung der Verbesserung V_2''':

$$l_2''' + V_2''' = z_2 + x'''$$

oder:

$$V_2''' = z_2 + x''' - l_2'''$$

Das ganze System dieser Gleichungen ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Satz}_1 & \text{Satz}_2 & \text{Satz}_3 \\ V_1^{\circ} = z_1 - l_1^{\circ} & V_2^{\circ} = z_2 - l_2^{\circ} & V_3^{\circ} = z_3 - l_3^{\circ} \\ V_1' = z_1 + x' - l_1' & V_2' = z_2 + x' - l_2' & V_3' = z_3 + x' - l_3' \\ V_1'' = z_1 + x'' - l_1'' & V_2'' = z_2 + x'' - l_2'' & V_3'' = z_3 + x'' - l_3'' \\ V_1''' = z_1 + x''' - l_1''' & V_2''' = z_2 + x''' - l_2''' & V_3''' = z_3 + x''' - l_3''' \end{array}\right\} \quad (5)$$

Bleiben wir der Übersicht wegen bei 3 Sätzen und 4 Zielpunkten stehen, so haben diese Gleichungen die allgemeine Form:

$$V = a' z_1 + b' z_2 + c' z_3 + a\, x' + b\, x'' + c\, x''' + l \quad (6)$$

und die Coëfficienten bilden folgende Tabelle:

---

würden gerne die Bezeichnungen der klassischen Gradmessung in Ostpreussen völlig beibehalten, allein unsere Bezeichnung ist konsequenter und übersichtlicher.

*) Es ist das Zeichen V gewählt statt des sonst in diesem Buche bei Fehlergleichungen gebrauchten v, wegen des im späteren Verlauf wünschenswerten Anschlusses an die Bezeichnungen der Landesaufnahme (vgl. auch S. 127).

	Satz	Zielpunkt	z_1 a'	z_2 b'	z_3 c'	x' a	x'' b	x''' c	l	p
Allgemein:										
Anzahl $= s$	1	P^o	$+1$						$-l_1^o$	p_1^o
	1	P'	$+1$			$+1$			$-l_1'$	p_1'
	1	P''	$+1$				$+1$		$-l_1''$	p_1''
	1	P'''	$+1$					$+1$	$-l_1'''$	p_1'''
Anzahl $= s$	2	P^o		$+1$					$-l_2^o$	p_2^o
	2	P'		$+1$		$+1$			$-l_2'$	p_2'
	2	P''		$+1$			$+1$		$-l_2''$	p_2''
	2	P'''		$+1$				$+1$	$-l_2'''$	p_2'''
Anzahl $= s$	3	P^o			$+1$				$-l_3^o$	p_3^o
	3	P'			$+1$	$+1$			$-l_3'$	p_3'
	3	P''			$+1$		$+1$		$-l_3''$	p_3''
	3	P'''			$+1$			$+1$	$-l_3'''$	p_3'''
			Anzahl $= G$			Anzahl $= s - 1$				$[p] = R$

(7)

Die hiezu gehörigen Normalgleichungen lassen sich leicht allgemein anschreiben, wenn man das Summenzeichen [. . .] auf die Gewichte konsequent anwendet, z. B.:

$$p_1^o + p_1' + p_1'' + p_1''' = [p_1] \tag{8}$$

$$p_1' + p_2' + p_3' = [p'] \quad \text{u. s. w.} \tag{9}$$

So wird der erste quadratische Coëfficient:

$$p_1^o\, 1^2 + p_1'\, 1^2 + p_1''\, 1^2 + p_1'''\, 1^2 = p_1^o + p_1' + p_1'' + p_1''' = [p_1]$$

und die erste Normalgleichung wird:

$$[p_1]\, z_1 + 0\, z_2 + 0\, z_3 + p_1'\, x' + p_1''\, x'' + p_1'''\, x''' - [p_1\, l_1] = 0$$

Wenn die Gewichte p alle an und für sich gleich, nämlich $= 1$ sind, so ist es in den Verbindungen mit l nicht nötig, die Gewichte p überhaupt zu schreiben, denn es ist $[p_1\, l_1] = p_1^o l_1^o + p_1' l_1' + p_1'' l_1'' + p_1''' l_1'''$, d. h. die Summe aller derjenigen l, welche mit der Nummer $_1$ überhaupt vorkommen, und das kann man kürzer auch durch $[l_1]$ ausdrücken. Auf diese Weise erhält man das folgende System der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\underline{[p_1]\, z_1} \quad \cdot\, \cdot \quad \cdot\, \cdot \quad + p_1'\, x' + p_1''\, x'' + p_1'''\, x''' - [l_1] = 0 \\
\qquad \underline{[p_2]\, z_2} \quad \cdot\, \cdot \quad + p_2'\, x' + p_2''\, x'' + p_2'''\, x''' - [l_2] = 0 \\
\qquad\qquad \underline{[p_3]\, z_3} + p_3'\, x' + p_3''\, x'' + p_3'''\, x''' - [l_3] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{[p']\, x'} + \quad \cdot\, \cdot \quad\quad \cdot\, \cdot \quad - [l'] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[p'']\, x''} + \quad \cdot\, \cdot \quad - [l''] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[p''']\, x'''} - [l'''] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[l\, l]}
\end{array}\right\} \tag{10}$$

Da viele Coëfficienten ausfallen, kann man zuerst, mittelst der 3 ersten Gleichungen, $z_1\ z_2\ z_3$ in $x'\ x''\ x'''$ ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l}
-z_1 = \dfrac{p_1'\, x' + p_1''\, x'' + p_1'''\, x''' - [l_1]}{[p_1]} \\[2ex]
-z_2 = \dfrac{p_2'\, x' + p_2''\, x'' + p_2'''\, x''' - [l_2]}{[p_2]} \\[2ex]
-z_3 = \dfrac{p_3'\, x' + p_3''\, x'' + p_3'''\, x''' - [l_3]}{[p_3]}
\end{array}\right\} \tag{11}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die 3 letzten Gleichungen (10), so bekommt man ein reduziertes Normalgleichungssystem, welches nur noch die Unbekannten x' x'' x''' enthält. Dasselbe System bekommt man auch, wenn man die Gleichungen (10) allmählich nach dem Schema der Coëfficienten $[bb.1]$ u. s. f. reduziert; die erste so reduzierte Gleichung ist:

$$([p_2]-\frac{0}{[p_1]}0)z_2+(0-\frac{0}{[p_1]}0)z_3+(p_2'-\frac{0}{[p_1]}p_1')x'+\ldots=0$$

d. h. die mit $[p_2]z_2$ anfangende zweite Gleichung der Gruppe (10) bleibt bei der ersten Reduktion unverändert.

Ebenso ist es mit der dritten Gleichung von (10). Die vierte Gleichung von (10) giebt bei der ersten Reduktion:

$$([p']-\frac{p_1'}{[p_1]}p_1')x'+(0-\frac{p_1'}{[p_1]}p_1'')x''+(0-\frac{p_1'}{[p_1]}p_1''')x'''-([l']-\frac{p_1'}{[p_1]}[l_1])=0$$

Verfolgt man dieses Alles zu Ende, so erhält man ein System von folgender Form:

$$\left.\begin{array}{r}\underline{(aa)\,x'}-(ab)\,x''-(ac)\,x'''-(al)=0\\ \underline{(bb)\,x''}-(bc)\,x'''-(bl)=0\\ \underline{(cc)\,x'''}-(cl)=0\\ \underline{(ll)}\end{array}\right\}\qquad(12)$$

Die Coefficienten haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned}(aa)&=[p']-\frac{p_1'}{[p_1]}p_1'-\frac{p_2'}{[p_2]}p_2'-\frac{p_3'}{[p_3]}p_3'-\ldots\\ (ab)&=\frac{p_1'}{[p_1]}p_1''+\frac{p_2'}{[p_2]}p_2''+\frac{p_3'}{[p_3]}p_3''+\ldots\\ (ac)&=\frac{p_1'}{[p_1]}p_1'''+\frac{p_2'}{[p_2]}p_2'''+\frac{p_3'}{[p_3]}p_3'''+\ldots\\ (bb)&=[p'']-\frac{p_1''}{[p_1]}p_1''-\frac{p_2''}{[p_2]}p_2''-\frac{p_3''}{[p_3]}p_3''-\ldots\\ (bc)&=\frac{p_1''}{[p_1]}p_1'''+\frac{p_2''}{[p_2]}p_2'''+\frac{p_3''}{[p_3]}p_3'''+\ldots\\ (cc)&=[p''']-\frac{p_1'''}{[p_1]}p_1'''-\frac{p_2'''}{[p_2]}p_2'''-\frac{p_3'''}{[p_3]}p_3'''\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Die Absolutglieder sind:

$$\left.\begin{aligned}(al)&=[l']-\frac{p_1'}{[p_1]}[l_1]-\frac{p_2'}{[p_2]}[l_2]-\frac{p_3'}{[p_3]}[l_3]-\ldots\\ (bl)&=[l'']-\frac{p_1''}{[p_1]}[l_1]-\frac{p_2''}{[p_2]}[l_2]-\frac{p_3''}{[p_3]}[l_3]-\ldots\\ (cl)&=[l''']-\frac{p_1'''}{[p_1]}[l_1]-\frac{p_2'''}{[p_2]}[l_2]-\frac{p_3'''}{[p_3]}[l_3]-\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Endlich das Fehler-Quadratsummenglied:

$$(ll)=[ll]-\frac{[l_1]^2}{[p_1]}-\frac{[l_2]^2}{[p_2]}-\frac{[l_3]^2}{[p_3]}-\ldots\qquad(15)$$

Bei den Coëfficienten (13) und den Absolutgliedern (14) können alle gleichartigen Sätze zusammengefasst werden, dagegen bei (15) müssen alle Ablesungen *einzeln* behandelt werden. Das System (12) (vgl. hiezu § 26. S. 64) wird nun rein algebraisch

weiter behandelt, und giebt die Unbekannten x' x'' x''', alle Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w., und die Fehlerquadratsumme:

$$[VV] = (ll.3) \tag{16}$$

und das mittlere Fehlerquadrat:

$$m^2 = \frac{[VV]}{R - G - (s-1)} \tag{17}$$

Der Nenner $R - G - (s-1)$ entsteht nach (7) dadurch, dass R die Anzahl aller einzelnen Richtungsbeobachtungen und $G + (s-1)$ die Anzahl der Unbekannten ist.

Indem wir zu einem Zahlenbeispiel übergehen, bemerken wir, dass man unter $l°$ l' l'' u. s. w. nicht die vollen Winkelablesungen zu verstehen braucht, sondern dass man die Grade, Minuten und beliebige Sekunden ein für allemal absondern darf. So haben wir bei dem folgenden Beispiel S. 237, welches aus der „Gradmessung in Ostpreussen" S. 101 und 102 ausgewählt ist, bei l' und l'' bzw. 26° 14′ 50″ und 87° 4′ 50″ vorn abgesondert.

(Gelegentlich bemerken wir auch, dass die 4 letzten Spalten unserer Tabelle S. 237, welche sich auf die Fehlerrechnung beziehen, in der Gradmessung in Ostpreussen noch nicht vorkommen, weil *Bessel* keine mittleren Stationsfehler berechnet hat. Diese Berechnungen sind erst später von der Landesaufnahme mit aufgenommen worden.)

Nach den Formeln (13) und nach dem Anblick der Tabelle S. 237 bildet man die Coëfficienten:

$$(aa) = 31 - \frac{0^2}{24} - \frac{19^2}{38} - \frac{12^2}{36} = +17{,}500$$

$$(ab) = \frac{0}{24}\,12 + \frac{19}{38}\,0 + \frac{12}{36}\,12 = +\ 4{,}000$$

$$(bb) = 24 - \frac{12^2}{24} - \frac{0^2}{38} - \frac{12^2}{36} = +14{,}000$$

und nach (14) die Absolutglieder:

$$(al) = 68{,}25 - \frac{0}{24}\,37{,}25 - \frac{19}{38}\,48{,}50 - \frac{12}{36}\,53{,}25 = +26{,}250$$

$$(bl) = 70{,}75 - \frac{12}{24}\,37{,}25 - \frac{0}{38}\,48{,}50 - \frac{12}{36}\,53{,}25 = +34{,}375$$

Dieses ist die unmittelbare Anwendung der Formeln (13) und (14), man wird sich aber bald gewöhnen, nach dem Anblick der Tabelle S. 237 kürzer so schreiben:

$$(aa) = 31 - \frac{0}{2}\,0 - \frac{1}{2}\,19 - \frac{1}{3}\,12 = +17{,}500$$

$$(ab) = \frac{0}{2}\,12 + \frac{1}{2}\,0 + \frac{1}{3}\,12 = +\ 4{,}000$$

$$(bb) = 24 - \frac{1}{2}\,12 - \frac{0}{2}\,0 - \frac{1}{3}\,12 = +14{,}000$$

Das Fehlersummenglied wird nach (15) so berechnet:

$$(ll) = 496{,}43 - \frac{165{,}68}{2} - \frac{168{,}73}{2} - \frac{285{,}42}{3} = 234{,}09$$

Die Normalgleichungen sind also:

$$\begin{array}{rrrl} +\underline{17{,}50\,x'} & -\ 4{,}00\,x'' & -\ 26{,}25 & = 0 \\ & +\underline{14{,}00\,x''} & -\ 34{,}37 & = 0 \\ & & +\underline{234{,}09} & \end{array}$$

(Fortsetzung s. S. 238)

Station Nidden.

Quer-Summen $[p_q]$	Kalle-ninken l°	*a* Gilge l'	*b* Lattenwalde l''	$l^\circ + l' + l'' = [l_q]$	l'^2	l''^2	$[l_q]^2$
	0° 0′ 0″	26° 14′ 50″	87° 4′ 50″				
2	+ 0,00″		+ 5,00″	5,00		25,00	25,00
2	0,00		5,75	5,75		33,06	33,06
2	0,00		5,50	5,50		30,25	30,25
2	0,00		7,00	7,00		49,00	49,00
2	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
2	0,00		2,75	2,75		7,56	7,56
2	0,00		1,50	1,50		2,25	2,25
2	0,00		2,50	2,50		6,25	6,25
2	0,00		0,50	0,50		0,25	0,25
2	0,00		1,75	1,75		3,06	3,06
2	0,00		1,00	1,00		1,00	1,00
2	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
			37,25	37,25		165,68	165,68
$[p_1] = (24)$	(12)	(0)	(12)				
2	+ 0,00	+ 4,25		4,25	18,06		18,06
2	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
2	0,00	0,75		0,75	0,56		0,56
2	0,00	3,50		3,50	12,25		12,25
2	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
2	0,00	2,50		2,50	6,25		6,25
2	0,00	1,25		1,25	1,56		1,56
2	0,00	4,50		4,50	20,25		20,25
2	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
2	0,00	6,00		6,00	36,00		36,00
2	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
2	0,00	2,75		2,75	7,56		7,56
2	0,00	2,25		2,25	5,06		5,06
2	0,00	0,00		0,00	0,00		0,00
2	0,00	2,00		2,00	4,00		4,00
2	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
2	0,00	0,25		0,25	0,06		0,06
2	0,00	1,00		1,00	1,00		1,00
2	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
		48,50		48,50	168,73		168,73
$[p_2] = (38)$	(19)	(19)	(0)				
3	0,00	+ 0,00	+ 2,75	2,75	0,00	7,56	7,56
3	0,00	3,50	2,75	6,25	12,25	7,56	39,06
2	0,00	1,25	3,00	4,25	1,56	9,00	18,06
3	0,00	3,25	4,75	8,00	10,56	22,56	64,00
3	0,00	2,25	3,75	6,00	5,06	14,06	36,00
3	0,00	3,75	3,25	7,00	14,06	10,56	49,00
3	0,00	— 0,25	1,25	1,00	0,06	1,56	1,00
3	0,00	1,25	1,75	3,00	1,56	3,06	9,00
3	0,00	2,25	1,00	3,25	5,06	1,00	10,56
3	0,00	0,50	2,25	2,75	0,25	5,06	7,56
3	0,00	1,00	4,75	5,75	1,00	22,56	33,06
3	0,00	1,00	2,25	3,25	1,00	5,06	10,56
		19,75	33,50	53,25	52,42	109,60	285,42
$[p_3] = (36)$	(12)	(12)	(12)	s. o.	168,73	165,68	
(98)	$[p^\circ] = 43$	$[p'] = 31$ $[l'] = 68,25$	$[p''] = 24$ $[l''] = 70,75$		496,43		

(Fortsetzung von S. 238.)

Die Auflösung giebt:

$$x' = +2{,}205 \qquad x'' = +3{,}085 \tag{18}$$

$$[VV] = 70{,}2 \tag{19}$$

dazu auch die Gewichts-Coëfficienten

$$\left.\begin{array}{ll} [\alpha\alpha] = +0{,}0611 & [\alpha\beta] = +0{,}0175 \\ & [\beta\beta] = +0{,}0764 \end{array}\right\} \tag{20}$$

Der mittlere Fehler wird nach (17):

$$m = \sqrt{\frac{70{,}2}{98-43-2}} = \sqrt{\frac{70{,}2}{53}} = \pm 1{,}15'' \tag{21}$$

Fügt man die x' und x'' von (18) zu den Näherungsannahmen für Gilge und Lattenwalde hinzu, welche oben in der Tabelle auf S. 237 angegeben sind, so hat man die auf der Station Nidden ausgeglichenen Winkel:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Kalleninken-Gilge} & = 26^\circ\, 14'\, 50'' + x' = 26^\circ\, 14'\, 52{,}205'' \\ \text{Kalleninken-Lattenwalde} & = 87^\circ\, 4'\, 50'' + x'' = 87^\circ\, 4'\, 53{,}085'' \end{array}\right\} \tag{22}$$

Anmerkung zu § 78.

Besonderer Fall voller Richtungs-Sätze.

Im Falle lückenloser Sätze, welche sämtlich in die Ausgleichung eingehen sollen, sind alle $p = 1$ und es ist bei G Sätzen

$$[p^\circ] = [p'] = [p''] = [p'''] \ldots = G \tag{1}$$

und bei s Zielpunkten

$$[p_1] = [p_2] = [p_3] \ldots = s \tag{2}$$

damit wird nach (13) bis (15) S. 235:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} (aa) = G - \frac{G}{s} & (ab) = \frac{G}{s} & (ac) = \frac{G}{s} & (al) = [l'] - \frac{[l]}{s} \\ & (bb) = G - \frac{G}{s} & (bc) = \frac{G}{s} & (bl) = [l''] - \frac{[l]}{s} \\ & & (cc) = G - \frac{G}{s} & (cl) = [l'''] - \frac{[l]}{s} \\ & & & (ll) = [ll] - \frac{[l]}{s} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Die voll geschriebenen Normalgleichungen sind daher:

$$\begin{array}{c} \text{Anzahl} \\ = s - 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left(G - \frac{G}{s}\right) x' - \frac{G}{s} x'' - \frac{G}{s} x''' - \left([l'] - \frac{[l]}{s}\right) = 0 \\ -\frac{G}{s} x' + \left(G - \frac{G}{s}\right) x'' - \frac{G}{s} x''' - \left([l''] - \frac{[l]}{s}\right) = 0 \\ -\frac{G}{s} x' - \left(\frac{G}{s}\right) x'' + \left(G - \frac{G}{s}\right) x''' - \left([l'''] - \frac{[l]}{s}\right) = 0 \end{array} \right\} \tag{4}$$

Zum Zweck der Auflösung nach $x'\ x''\ x'''$ werden alle Gleichungen addiert und geben:

$$\frac{G}{s} x' + \frac{G}{s} x'' + \frac{G}{s} x''' - \frac{[l]}{s} = 0 \tag{5}$$

Vergleicht man diese Summengleichung [5] mit den einzelnen Gleichungen [4], so erhält man die Auflösungen:

$$x' = \frac{[l']}{G} \qquad x'' = \frac{[l'']}{G} \qquad x''' = \frac{[l''']}{G} \tag{6}$$

d. h. ein einfaches Resultat, welches mit der Mittelbildung (1) am Anfang dieses § S. 231 übereinstimmt.

Das mittlere Fehlerquadrat wird nach (17):

$$m^2 = \frac{[VV]}{R - G - (s - 1)} = \frac{(ll.3)}{Gs - G - (s - 1)} = \frac{(ll.3)}{(G - 1)(s - 1)} \tag{7}$$

Hiebei ist angenommen, dass alle Sätze einzeln in die Rechnung eingeführt werden; wir wollen nun annehmen, man habe statt dessen alle Sätze in Mittel vereinigt, und habe daher nur *einen* Satz, für welchen die Gewichte gelten:

$$p_1{}^\circ = p_1' = p_1'' = p_1''' = G$$

alle anderen p, nämlich p_2, p_3 ... sind $= 0$.

Damit wird:

$$[p_1] = sG \qquad [p_2] = 0 \qquad [p_3] = 0$$
$$[p'] = G \qquad [p''] = G \qquad [p'''] = G$$

Damit werden alle Coëfficienten und Absolutglieder (aa) bis (cl) wieder dieselben wie bei [3]; zugleich sind aber alle $l = 0$, wenn man die Kolumnenmittel selbst als erste Näherungen einführt, und dann sind auch die x' x'' x''' nach [6] wieder $= 0$, wie es sein muss.

Wenn aber alle $l = 0$ sind, so wird auch $(ll.3) = 0$, und auch der Nenner von [6] wird $= 0$, denn es ist dann nur *ein* Satz vorhanden, d. h. $G = 1$, und die Anzahl R der Richtungen wird gleich der Anzahl s der Strahlen, also

$$R - G - (s - 1) = s - 1 - (s - 1) = 0$$

Es wird also nun nach [7]:

$$m^2 = \frac{0}{0}$$

oder in Worten: Wenn lauter *volle* Sätze vorliegen, so besteht die Stationsausgleichung lediglich in einer Mittelbildung, wodurch *ein* Satz erhalten wird, der aber an sich keinen Aufschluss über die Genauigkeit giebt. Zur Genauigkeitsuntersuchung muss man vielmehr auf die einzelnen Sätze zurückgehen.

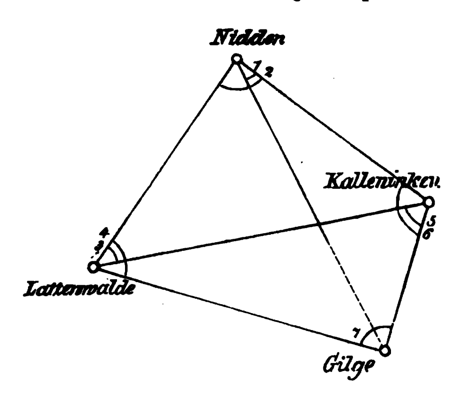
§ 79. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach *Bessels* Methode.

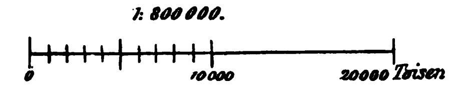
Wir schneiden aus dem Netz der Gradmessung in Ostpreussen das in Fig. 17. S. 240 gezeichnete Viereck mit zwei Diagonalen heraus, und wählen von den Originalmessungen der Gradmessung in Ostpreussen diejenigen aus, welche sich auf dieses Viereck beziehen.

(Die Messungen in Kalleninken sind mit einem schwächeren Instrument gemacht, als die Messungen auf Nidden, Lattenwalde und Gilge; da es sich aber hier nur um ein einfaches Rechenbeispiel handelt, so werden wir von diesem Unterschiede absehen, und alle Originalmessungen als gleichberechtigt in die Ausgleichung einführen.)

Die Beobachtungen und die Ausgleichung für die Station Nidden haben wir bereits im vorigen § 78. behandelt; für die übrigen Stationen geben wir die Original-

Fig. 17.
Viereck der Gradmessung in Ostpreussen.





messungen nicht mehr, sondern nur die Stationsresultate; es sind dieses zuerst die ausgeglichenen Winkel, nämlich:

Station Nidden. (s. (22) § 78. (S. 238).

Kalleninken—Gilge . . .	$A^1 =$	26° 14′ 52,205″	
Kalleninken—Lattenwalde .	$A^2 =$	87 4 53,085	
Station Lattenwalde.			
Nidden—Kalleninken . . .	$A^3 =$	45° 25′ 28,827″	
Nidden—Gilge	$A^4 =$	72 48 53,486	(1)
Station Kalleninken.			
Gilge—Lattenwalde . . .	$A^5 =$	62° 58′ 36,167″	
Gilge—Nidden	$A^6 =$	110 28 23,667	
Station Gilge.			
Lattenwalde—Kalleninken .	$A^7 =$	89° 37′ 54,583″	

Die Stationsausgleichungen haben ferner die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$... geliefert, zunächst nach (20) § 78. S. 238:

$$\text{Nidden} \quad [\alpha\,\alpha] = +0{,}0611 \quad \left.\begin{array}{l}[\alpha\,\beta] = +0{,}0175\\ [\beta\,\beta] = +0{,}0764\end{array}\right\} \tag{2}$$

In gleicher Weise wurden auch die übrigen Gewichts-Coëfficienten gefunden, welche wir auf allen Stationen zunächst von neuem mit $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. literieren:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{Lattenwalde} & [\alpha\,\alpha] = +0{,}1431 & [\alpha\,\beta] = +0{,}0745 \\ & & [\beta\,\beta] = +0{,}0805 \\ \text{Kalleninken} & [\alpha\,\alpha] = +0{,}1667 & [\alpha\,\beta] = +0{,}0833 \\ & & [\beta\,\beta] = +0{,}1667 \\ \text{Gilge} & [\alpha\,\alpha] = +0{,}3333 & \end{array}\right\} \tag{3}$$

Es folgt nun die Aufstellung der Bedingungsgleichungen bezüglich der Winkel $A^1\ A^2\ \ldots\ A^7$ von (1). Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist nach den allgemeinen Regeln von (13) § 67. S. 182 leicht anzugeben; man hat 1 Seitengleichung und 2 Dreiecksgleichungen, zusammen 3 Bedingungsgleichungen.

Als Grundlinie wählen wir nach S. 168 der „Gradmessung in Ostpreussen" die Seite

$$\left.\begin{array}{l}\text{Nidden-Lattenwalde} = 14\,047{,}7228 \text{ Toisen} = 27\,379{,}522 \text{ Meter} \\ \qquad (log = 4.147\,6059{\cdot}3)\quad (log = 4.437\,4258{\cdot}6)\end{array}\right\} \quad (4)$$

Als Krümmungshalbmesser zur Exzessberechnung nimmt *Bessel* auf S. 253 der Gradmessung in Ostpreussen den Äquatorhalbmesser der Erde, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, nämlich $r = 3\,271\,628{,}89$ Toisen $= 6\,376\,522$ Meter.

($log = 6.80458$ für Meter) und damit wird:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für Toisen:} & \text{für Meter:} \\ log\,\dfrac{\varrho''}{2\,r^2} = 1.98387-10 & log\,\dfrac{\varrho''}{2\,r^2}\ 1.40423-10\end{array}\right\} \quad (5)$$

Ohne diese auffällige Annahme des Krümmungshalbmessers weiter zu erörtern, behalten wir die Konstante (5) bei, berechnen mit der Basis (4) und den Winkeln (1) das Netz vorläufig, und finden die sphärischen Exzesse:

für das Dreieck $L\,G\,K$: $\varepsilon = 1{,}430''$
„ „ „ $L\,N\,K$: $\varepsilon = 1{,}835''$

Nun stellen wir die Winkel nach der Tabelle (1) in Dreiecken zusammen:

Lattenwalde	$A^4 - A^3 =$	27°	23′	34,659″	
Gilge . . .	$A^7 =$	89	37	54,583	
Kalleninken	$A^5 =$	62	58	36,167	
		180°	0′	5,409″	
	soll	180	0	1,430	
			$w =$	$+\ 3{,}979''$	
Nidden . .	$A^2 =$	87°	4′	53,085″	(6)
Lattenwalde	$A^3 =$	45	25	23,827	
Kalleninken	$A^6 - A^5 =$	47	29	47,500	
		180°	0′	4,412″	
	soll	180	0	1,835	
			$w =$	$+\ 2{,}577''$	

Die entsprechenden Bedingungsgleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{l}(4)-(3)+(7)+(5)+3{,}979''=0 \\ (2)+(3)+(6)-(5)+2{,}577''=0\end{array}\right\} \quad (7)$$

Zur Bildung der Seitengleichung kann man die Seite $G\,K$ auf zweifache Art aus $G\,L$ ableiten, dieses giebt:

$$\text{Es soll sein } \frac{sin\,A^4\,sin\,A^5\,sin\,A^1}{sin\,(A^2-A^1)\,sin\,A^6\,sin\,(A^4-A^3)} = 1$$

was auf folgende logarithmische Rechnung führt:

			Δ *log sin* für 10″
$A^4 =$ 72° 48′ 58,486″	*log sin* A^4	9.980 1680·4	+ 65
$A^5 =$ 62 58 36,167	*log sin* A^5	9.949 7909·0	+ 107
$A^1 =$ 26 14 52,205	*log sin* A^1	9.645 6725·3	+ 427
	Summe Z	9.575 6314·7	
$A^2 - A^1 =$ 60° 50′ 0,880″	*log sin* $(A^2 - A^1)$	9.941 1176·2	+ 117
$A^6 =$ 110 28 23,667	*log sin* A^6	9.971 6634·1	— 78
$A^4 - A^3 =$ 27 23 34,659	*log sin* $(A^4 - A^3)$	9.662 8434·6	+ 406
	Summe N	9.575 6244·9	

Summe Z — Summe $N = w = + 69{\cdot}8$.

Damit wird die Seitengleichung für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$\left.\begin{array}{c} +0{,}65\,(4)+1{,}07\,(5)+4{,}27\,(1)-1{,}17\,((2)-(1))+0{,}78\,(6)-4{,}06\,((4)-(3)) \\ +6{,}98=0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Wenn man die Coëfficienten nach (17) § 68. S. 185 genauer berechnet, und auch das Absolutglied nach dem *Legendre*schen Satz kontroliert (vgl. (10) § 70. S. 197), so wird vorstehende Gleichung mit mehr Decimalen:

$$\left.\begin{array}{c} +0{,}6511\,(4)+1{,}0739\,(5)+4{,}2698\,(1)-1{,}1751\,((2)-(1))+0{,}7861\,(7) \\ -4{,}0630\,((4)-(3))+7{,}0100=0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Wenn man nach den Nummern ordnet, und dabei wieder eine Decimale fallen lässt, bekommt man:

$$+5{,}445\,(1)-1{,}175\,(2)+4{,}063\,(3)-3{,}412\,(4)+1{,}074\,(5)+0{,}786\,(6)+7{,}010=0 \quad (10)$$

Nun ist alles so weit vorbereitet, dass die Ausgleichung nach der Formelanweisung von § 54. S. 126—130 beginnen kann. Wir haben diese ganze Ausgleichung in der Tabelle auf S. 244—245 vereinigt, wobei jedoch die *klein gedruckten Teile*, welche sich auf ein Funktions-Gewicht *nach* der Ausgleichung beziehen, vorerst ausser Betracht bleiben.

I. Man setzt die Coëfficienten der Bedingungsgleichungen (9) und (7) in die Tabelle S. 244. Diese Coëfficienten sind ebenso wie auf S. 127 mit $A\ B\ C$ bezeichnet.

II. Man setzt die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. von (2) und (3) ebenfalls tabellarisch ein (vgl. S. 128).

III. Die Übertragungs-Coëfficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ u. s. w. werden nach den Formeln von S. 128 berechnet, z. B.:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= A_1\,[\alpha\,\alpha]+A_2\,[\alpha\,\beta]+A_3\,[\alpha\,\gamma]+\ldots \\ &= 5{,}445\times 0{,}0611-1{,}175\times 0{,}0175 \\ &= 0{,}3327-0{,}0206=+0{,}3121. \end{aligned}$$

IV. Ausrechnung der Normalgleichungs-Coëfficienten [I I] u. s. w. nach S. 128, z. B.:

$$\begin{aligned} [\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] &= +5{,}445\times 0{,}3121 \\ &\quad -1{,}175\times 0{,}0053 \\ &\quad + \;.\;.\;.\;.\;.\; \text{zusammen} = +3{,}3628. \end{aligned}$$

$[\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}]$ oder $= [\mathfrak{A}\,B]$, mit Probe $= -0{,}0544$ u. s. w.

So erhält man die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{3{,}3628\,k_1} - 0{,}0544\,k_2 + 0{,}3084\,k_3 + 7{,}010 = 0 \\ +\underline{0{,}5745\,k_2} - 0{,}1519\,k_3 + 3{,}979 = 0 \\ +\underline{0{,}3861\,k_3} + 2{,}577 = 0 \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Die Auflösung, welche bei IV. S. 245 in zwei Reduktionen angedeutet ist, giebt die Korrelaten:

$$\text{V.} \qquad k_1 = -1{,}384 \qquad k_2 = -9{,}520 \qquad k_3 = -9{,}313 \qquad (12)$$

und nebenbei auch die Fehlerquadratsumme des Netzes:

$$\text{V.} \qquad [\mathfrak{B}\mathfrak{B}] = 71{,}5863 \qquad (13)$$

Die Korrelaten k setzt man auf S. 244 nach III. hinauf und hat dann die Winkelkorrektionen nach S. 129 unmittelbar, z. B.:

$$\begin{array}{ll} \text{VI.} & (1) = \mathfrak{A}_1\,k_1 + \mathfrak{B}_1\,k_2 + \mathfrak{C}_1\,k_3 \\ & (1) = -0{,}3121 \times 1{,}384 \;\ldots\; -0{,}0175 \times 9{,}313 \\ & (1) = -0{,}4319 - 0{,}1630 = -0{,}5949'' \end{array} \qquad (14)$$

Zur Probe kann man auch die Hilfsgrössen [1] [2] u. s. w. benützen, z. B. nach S. 129:

$$\text{VII.} \quad [1] = A_1\,k_1 + B_1\,k_2 + \ldots = 5{,}445\,(-1{,}384) = -7{,}5358$$

Diese [1] [2] u. s. w. sind als VII. oben unter I. beigesetzt.

Hat man sie alle berechnet, so hat man nach den Gewichtsgleichungen von S. 129:

$$\begin{array}{l} (1) = [1]\,[\alpha\alpha] + [2]\,[\alpha\beta] + \ldots \\ \quad = -7{,}536 + 0{,}0611 - 7{,}687 + 0{,}0175 \\ (1) = -0{,}4604 - 0{,}1345 = -0{,}5949 \end{array} \qquad (15)$$

übereinstimmend mit (14).

Wenn alle Winkelkorrektionen (1) (2) ... (7) so kontrolliert sind, so fügt man sie zu den ursprünglich gegebenen Winkeln hinzu, und hat dann folgende ausgeglichene Winkel:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Nidden} & A^1 + (1) = & 26^\circ\,14'\,51{,}610'' \\ & A^2 + (2) = & 87\;\;4\;\;52{,}366 \\ \text{Kalleninken} & A^3 + (3) = & 45^\circ\,25'\,22{,}694'' \\ & A^4 + (4) = & 72\;\;48\;\;57{,}696 \\ \text{Lattenwalde} & A^5 + (5) = & 62^\circ\,58'\,35{,}018 \\ & A^6 + (6) = & 110\;\;28\;\;21{,}792 \\ \text{Gilge} & A^7 + (7) = & 89^\circ\,37'\,51{,}410 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

womit sich das Netz ohne Widerspruch berechnen lässt, und zwar giebt die sphärische Dreiecksberechnung unter Zugrundlegung der Seite LN nach (4):

$$\log LN = 4.147\,6059{\cdot}3 \text{ (Basis)} \qquad (17)$$

aus dem Dreieck NGL:

$$\left.\begin{array}{l} \log LG = 4.229\,2360{\cdot}7 \\ \log NG = 4.268\,2865{\cdot}1 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

aus dem Dreieck NKL:

$$\left.\begin{array}{l} \log LK = 4.279\,4379{\cdot}2 \\ \log NK = 4.132\,6080{\cdot}1 \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Aus der Basis NG nach (18) berechnet man mittelst des Dreiecks NKG:

$$\left.\begin{array}{l} \log GK = 3.942\,2898{\cdot}2 \\ \log NK = 4.132\,6679{\cdot}8 \end{array}\right\} \qquad (20)$$

und aus der Basis LK nach (19) mittelst des Dreiecks KGL:

$$\left.\begin{array}{l} \log LG = 4.229\,2360{\cdot}9 \\ \log KG = 3.942\,2898{\cdot}4 \end{array}\right\} \qquad (21$$

Da die Rechnung nur mit 7 richtigen Stellen geführt ist, so ist die Übereinstimmung befriedigend.

Berechnungs-Ordnung.		Bedingungsgleichungen.							
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	w
I.	A	+ 5,445	— 1,175	+ 4,063	— 3,412	+ 1,074	+ 0,786		+ 7,010
	B			— 1,000	+ 1,000	+ 1,000		+ 1,000	+ 3,979
	C		+ 1,000	+ 1,000		— 1,000	+ 1,000		+ 2,577
	f		+ 0,107	— 4,063	+ 4,063	+ 1,929	— 1,929	— 0,013	
VII.		[1] = — 7,536	[2] = — 7,687	[3] = — 5,416	[4] = — 4,798	[5] = — 1,693	[6] = — 10,401	[7] = — 9,520	

Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ ... oder numeriert [1.1], [1.2] ...

		1	2	3	4	5	6	7
II.	(1)	+ 0,0611	+ 0,0175					
	(2)	+ 0,0175	+ 0,0764					
	(3)			+ 0,1431	+ 0,0745			
	(4)			+ 0,0745	+ 0,0805			
	(5)					+ 0,1667	+ 0,0833	
	(6)					+ 0,0833	+ 0,1667	
	(7)							+ 0,3333

		Übertragungs-Coëfficienten 𝔄 𝔅 ℭ ...							Correlaten s. unten V.
III.	𝔄	+ 0,3121	+ 0,0053	+ 0,3270	+ 0,0282	+ 0,2445	+ 0,2205		k_1 = — 1,384
	𝔅			— 0,0686	+ 0,0060	+ 0,1667	+ 0,0833	+ 0,3333	k_2 = — 9,520
	ℭ	+ 0,0175	+ 0,0764	+ 0,1431	+ 0,0745	— 0,0833	+ 0,0833		k_3 = — 9,313
	q	+ 0,0019	+ 0,0082	— 0,2787	+ 0,0244	+ 0,1609	— 0,1609	— 0,0043	
VI.	(..)	— 0,595 = (1)	— 0,719 = (2)	— 1,133 = (3)	— 0,790 = (4)	— 1,149 = (5)	— 1,875 = (6)	— 3,173 = (7)	

	Normalgleichungen.							
	k_1	k_2	k_3	w	k_1	k_2	k_3	k'
IV.	+ 3,3628	− 0,0544	+ 0,3084	+ 7,0100	+ 3,363	− 0,054	+ 0,308	− 1,168
		+ 0,5745	− 0,1519	+ 3,9790		+ 0,574	− 0,152	+ 0,459
			+ 0,3861	+ 2,5770			+ 0,386	− 0,592
				+ 0,0000				+ 1,853
		+ 0,5736	− 0,1469	+ 4,0924		+ 0,574	− 0,147	+ 0,440
			+ 0,3578	+ 1,9341			+ 0,358	− 0,485
				− 14,6130				+ 1,447
	$k_3 = -\frac{2,9822}{0,3202}$		+ 0,3202	+ 2,9822			+ 0,320	− 0,372
	$= -9,313$			− 43,8110				+ 1,111
V.	− 1,384 $= k_1$	− 9,520 $= k_2$	− 9,313 $= k_3$	− 71,5863 $= -[\mathfrak{V}\mathfrak{V}]$				+ 0,677 $= \frac{1}{P}$

§ 80. Genauigkeitsbestimmung für die *Bessel*sche Dreiecksnetz-Ausgleichung.

Das im vorhergehenden § 79. behandelte Viereckbeispiel zeigt unmittelbar die *Bessel*sche Methode, welche zuerst bei der Gradmessung in Ostpreussen 1834 zur Anwendung kam, und auch bei den darauf folgenden Preussischen Triangulierungen beibehalten wurde. *Bessel* hat seine Methode ohne Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen; und erst in den Arbeiten der Landesaufnahme seit 1870 haben wir die naturgemässe Weiterentwicklung der *Bessel*schen Methode auch in Hinsicht auf die Genauigkeitsuntersuchungen, welche wir nun an unserem Viereckbeispiel behandeln:

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird für jede Station durch die Stationsausgleichung geliefert, wie für Nidden in (21) § 78. S. 238 angegeben wurde.

Für alle 4 Stationen wurde so erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Nidden} & m = \sqrt{\frac{70,2}{53}} = \pm 1,15 \\ \text{Lattenwalde} & m = \sqrt{\frac{68,6}{48}} = \pm 1,20 \\ \text{Kalleninken} & m = \sqrt{\frac{183,3}{22}} = \pm 2,89 \\ \text{Gilge} & m = \sqrt{\frac{12,6}{5}} = \pm 1,59 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Diese Bestimmungen entsprechen der ersten Formel m_1 oder μ_1 S. 127. Alle 4 Stationen zusammen geben nach der zweiten Formel m_1 oder μ_1 S. 127:

$$m_1 = \sqrt{\frac{70,2 + 68,6 + 183,3 + 12,6}{53 + 48 + 22 + 5}} = \sqrt{\frac{334,7}{128}} = \pm 1,62'' \qquad (2)$$

die erste, zweite und die vierte Station geben:

$$m_1' = \sqrt{\frac{70,2 + 68,6 + 12,6}{53 + 48 + 5}} = \sqrt{\frac{151,4}{106}} = \pm 1,20'' \qquad (2')$$

Diesen zweiten Wert $m_1' = \pm 1,20''$ haben wir mit Ausschliessung der dritten Station Kalleninken deswegen berechnet, weil diese dritte Station einen erheblich grösseren Wert $m = 2,89''$ ergeben hat, als die anderen Stationen.

Dieses war vorauszusehen, denn es wurde schon zu Anfang von § 79. angegeben, dass die Station Kalleninken mit einem schwächeren Instrument gemessen ist.

Um diesen Umstand in der Ausgleichung von § 79. S. 244 zu berücksichtigen, hätte man die m für alle Stationen *vor* der Einsetzung der $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ in die Tabelle S. 244 berechnen müssen, und es bekäme nun Kalleninken das Gewicht

$$p = \left(\frac{1,20}{2,89}\right)^2 = 0,17$$

Die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w. für Kalleninken wären vor dem Einsetzen in die Tabelle S. 244 mit 0,17 zu dividieren.

Unsere Rechnung, welche alle Stationsgewichte gleich annahm, beansprucht insofern nur den Wert eines formellen Rechenbeispiels.

Übergehend zu der Fehlerquadratsumme, welche in der Netzausgleichung zu Tage tritt (bei der Landesaufnahme mit [𝔙𝔙] bezeichnet), haben wir nach S. 129, unten, 3 Formeln, welche wir mit dem Material der Tabelle S. 244—245 alle ausrechnen.

1) $[v'' v''] = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] = (1)\,[1] + (2)\,[2] + (3)\,[3] + \ldots$

S. 244

	$(\cdot)$	$[\cdot]$	$(\cdot)[\cdot]$
1.	— 0,595	— 7,536	+ 4,484
2.	— 0,719	— 7,687	+ 5,527
3.	— 1,133	— 5,416	+ 6,136
4.	— 0,790	— 4,798	+ 3,790
5.	— 1,149	— 1,693	+ 1,945
6.	— 1,875	—10,401	+19,502
7.	— 3,173	— 9,520	+30,207
			71,591 = $[\mathfrak{V}\mathfrak{V}]$

(3)

2) $[v'' v''] = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] = -[w k]$

$$w_1 = +7{,}010 \qquad k_1 = -1{,}384 \qquad -w_1 k_1 = +\ 9{,}702$$
$$w_2 = +3{,}979 \qquad k_2 = -9{,}520 \qquad -w_2 k_2 = +37{,}880$$
$$w_3 = +2{,}577 \qquad k_3 = -9{,}313 \qquad -w_3 k_3 = +24{,}000$$
$$-[w k] = 71{,}582 = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] \tag{4}$$

3)
$$[v'' v''] = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] = \frac{w_1^2}{[I\,I]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{[II\,II . 1]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{[III\,III . 2]}$$
$$= \frac{7{,}0100^2}{3{,}3628} + \frac{4{,}0924^2}{0{,}5736} + \frac{2{,}9822^2}{0{,}3202}$$
$$= 14{,}613 + 29{,}198 + 27{,}775 = 71{,}586 = [\mathfrak{V}\mathfrak{V}] \tag{5}$$

Dasselbe Resultat (5) steht übrigens auch schon unten auf S. 245, wo es schematisch gelegentlich mitberechnet worden ist.

Wir haben also nun in hinreichender Übereinstimmung aus (3) (4) und (5): $[\mathfrak{V}\mathfrak{V}] = 71{,}58$.

Da die Anzahl der Netzbedingungsgleichungen $r = 3$ ist, so erhält man den mittleren Richtungsfehler aus der Netzausgleichung nach der Formel m_2 unten auf S. 129:

$$m_2 = \sqrt{\frac{71{,}58}{3}} = \pm\, 4{,}88'' \tag{6}$$

Obgleich unser Beispiel in Bezug auf die Gewichtsbestimmung auf Kalleninken ein fingiertes ist, so wird doch die allgemeine Erfahrung auch hier bestätigt, dass die Netzausgleichung einen grösseren mittleren Fehler m_2 ergiebt, als die Stationsausgleichungen $m_1 = \pm\, 1{,}62''$ nach (2).

Aus den Stationen und aus dem Netz zusammen hat man nun nach der Formel für m oben auf S. 130:

$$m = \sqrt{\frac{334{,}5 + 71{,}6}{128 + 3}} = \sqrt{\frac{406{,}1}{131}} = \pm\, 1{,}76'' \tag{7}$$

Da in der allgemeinen Formel die Stationsausgleichungen, wie immer, bedeutend überwiegen, so ist (7) nicht erheblich verschieden von (2).

Um auch eine Anwendung der Theorie der Funktionsgewichte zu haben, bestimmen wir noch das Gewicht der Seite $G\,K$ als Funktion der als fehlerfrei angenommenen Basis $L\,N$ und der ausgeglichenen Viereckswinkel, d. h. es handelt sich um die Funktion:

$$G\,K = L\,N \frac{\sin A^2 \sin (A^4 - A^3)}{\sin (A^6 - A^5) \sin A^7}$$

oder für die Rechnung bequemer, um die logarithmische Funktion:

$$F = \log\sin A^2 + \log\sin(A^4 - A^3) - \log\sin(A^6 - A^5) - \log\sin A^7 \qquad (8)$$

wobei unter $A^1\ A^2 \ldots$ die ausgeglichenen Winkel verstanden sind. Die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion werden in gleicher Weise berechnet, wie die Coëfficienten $A_1\ A_2 \ldots$ der Seitenbedingungsgleichung (8) oder (9) § 79. S. 242. Die Resultate sind für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$f_1 = 0\ ,\ f_2 = +0{,}107\ ,\ f_3 = -4{,}063\ ,\ f_4 = +4{,}063\ ,\ f_5 = +1{,}929$$
$$f_6 = -1{,}929\ ,\ f_7 = -0{,}013 \qquad (9)$$

Diese f fügt man der Tabelle S. 244 in der Abteilung I. bei (*kleingedruckt*).

Dann folgt die Berechnung der q nach den Formeln von S. 130. Diese q schliessen sich auf S. 244 unmittelbar den 𝔄 𝔅 ℭ an. Man hat:

		q	f	fq
$q_1 =$	$0{,}107 \times 0{,}0175$	$= +0{,}0019$		
$q_2 =$	$0{,}107 \times 0{,}0764$	$= +0{,}0082$	$+0{,}107$	$+0{,}0009$
$q_3 =$	$-4{,}063 \times 0{,}1431 + 4{,}063 \times 0{,}0745$	$= -0{,}2787$	$-4{,}063$	$+1{,}1324$
$q_4 =$	$-4{,}063 \times 0{,}0745 + 4{,}063 \times 0{,}0805$	$= +0{,}0244$	$+4{,}063$	$+0{,}0991$
$q_5 =$	$1{,}929 \times 0{,}1667 - 1{,}929 \times 0{,}0833$	$= +0{,}1609$	$+1{,}929$	$+0{,}3104$
$q_6 =$	$1{,}929 \times 0{,}0833 - 1{,}929 \times 0{,}1667$	$= -0{,}1609$	$-1{,}929$	$+0{,}3104$
$q_7 =$	$-0{,}013 \times 0{,}3333$	$= -0{,}0043$	$-0{,}013$	$+0{,}0000$
				$1{,}8532 = [fq]$ (10)

Hier haben wir die Berechnung der Produkt-Summe $[fq]$ sogleich an die Berechnung der q angeschlossen.

Es folgt die Berechnung der Ersatzglieder nach den Doppelformeln von S. 130.

	A	q	Aq	𝔄	f	𝔄f
1.	$+5{,}445$	$+0{,}0019$	$+0{,}0103$	$+0{,}3121$		$0{,}0000$
2.	$-1{,}175$	$+0{,}0082$	$-0{,}0096$	$+0{,}0053$	$+0{,}107$	$+0{,}0006$
3.	$+4{,}063$	$-0{,}2787$	$-1{,}1324$	$+0{,}3270$	$-4{,}063$	$-1{,}3286$
4.	$-3{,}412$	$+0{,}0244$	$-0{,}0833$	$+0{,}0282$	$+4{,}063$	$+0{,}1146$
5.	$+1{,}074$	$+0{,}1609$	$+0{,}1720$	$+0{,}2445$	$+1{,}929$	$+0{,}4716$
6.	$+0{,}786$	$-0{,}1609$	$-0{,}1260$	$+0{,}2205$	$-1{,}929$	$-0{,}4253$
7.		$-0{,}0043$	$0{,}0000$		$-0{,}013$	$0{,}0000$
			$-1{,}1690 = [Aq]$			$-1{,}1671 = [$𝔄$f]$

Die übrigen Ersatzglieder werden ebenso berechnet; alle 3 Ersatzglieder sind $-1{,}168\quad +0{,}459\quad -0{,}592$. Diese werden nebst dem schon bei (10) angegebenen $[fq] = 1{,}853$ in der Tabelle S. 245 rechts unten (im *Kleingedruckten*) beigesetzt, worauf die Elimination ganz von selbst auf den Wert führt:

$$\frac{1}{P} = 0{,}677$$

Dieses entspricht der Formel für $\frac{1}{P}$ unten auf S. 130, es kann auch ausführlicher so geschrieben werden:

$$\frac{1}{P} = 1{,}853 - \frac{1{,}168^2}{3{,}363} - \frac{0{,}440^2}{0{,}573} - \frac{0{,}372^2}{0{,}320}$$
$$= 1{,}853 - 0{,}406 - 0{,}338 - 0{,}432 = 0{,}677$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist bereits in (7) berechnet, $m = 1{,}76''$, also nun nach der Schlussformel von S. 130:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 1{,}76\sqrt{0{,}677} = 1{,}448$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, es ist also nach der Ausgleichung:

$$\log G\,K = 3.942\,2898{\cdot}4 \pm 14{\cdot}5 \quad .$$

§ 81. Die *Bessel*sche Nullpunkts-Korrektion z.

Die *Bessel*sche Methode rechnet durchaus mit *Winkeln*, und nicht mit *Richtungen*; auf jeder Station mit s Strahlen werden $s-1$ Winkel als unabhängige Unbekannte eingeführt (während die Zahl der Richtungen $= s$ wäre). Es sind daher die Grössen x' x'' x''' auf den Stationen Winkelkorrektionen, und ebenso sind auch die (1) (2) (3) ... Winkelkorrektionen im Netz.

Wir wollen für die Station Nidden unseres Vierecks von § 79. die allmähliche Verbesserung nach § 78. und § 79. zusammenstellen:

Station Nidden:

Zielpunkt:	erste Annahme S. 237:	Stations-Ausgleichung S. 238:	
Kalleninken	0° 0′ 0″		0° 0′ 0,000″
Gilge	26 14 50	$x' = +2{,}205''$	26 14 52,205
Lattenwalde	87 4 50	$x'' = +3{,}085$	87 4 53,085

Zielpunkt:	Stations-Resultat S. 240:	Netz-Ausgleichung S. 243 und S. 244:		Anschnittszahlen:
Kalleninken	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	$[p^\circ] = 43$
Gilge	26 14 52,205	$(1) = -0{,}595$	26 14 51,610	$[p'] = 31$
Lattenwalde	87 4 53,085	$(2) = -0{,}719$	87 4 52,366″	$[p''] = 24$
				$[p] = 98$

Wir haben hier sogleich die Anschnittszahlen nach der Stations-Tabelle § 78. S. 237 hinzugesetzt, weil hierauf sich eine passende Verteilung der Netzverbesserungen (1) und (2) auf alle *drei* Strahlen gründen lässt, man rechnet nämlich:

$$-z = \frac{[p^\circ]\,0 + [p']\,(1) + [p'']\,(2)}{[p^\circ] + [p'] + [p'']} = \frac{[p']\,(1) + [p'']\,(2) + \ldots}{[p]} \qquad (1)$$

$$-z = \frac{31\,(-0{,}595) + 24\,(-0{,}719)}{98} = \frac{-35{,}701}{98} = -0{,}364$$

Diese Änderung bringt man an allen Winkeln und an dem Nullwert des Anfangsstrahls an, und reduziert damit die Winkel auf Richtungen:

Zielpunkt:	Stations-Resultat:	Netz-Ausgleichung:		
Kalleninken	0° 0′ 0,000″		$-0{,}364$	359° 59′ 59,636″
Gilge	26 14 52,205	$-0{,}595 - 0{,}364 =$	$-0{,}959$	26 14 51,246
Lattenwalde	87 4 53,085	$-0{,}719 - 0{,}364$	$-1{,}083$	87 4 52,002

Sachlich hat man offenbar gar nichts geändert, denn die *Differenzen* der Richtungen, auf welche es allein ankommt, sind dieselben geblieben. Deswegen ist

auch diese von *Bessel* bei der Gradmessung in Ostpreussen eingeführte Richtungs-Reduktion später bei der Landesaufnahme als überflüssig wieder fallen gelassen worden, zumal die Formel (1) für z, im allgemeinen gar nicht streng begründet werden, sondern nur als Hilfsmittel zu einer passenden Verteilung der (1) (2) (3) ... auf alle Strahlen, empfohlen werden kann.

Um dieses näher zu untersuchen, betrachten wir die Nullpunktsverbesserungen in den einzelnen Sätzen, nämlich nach (11) § 78. S. 234:

$$\left.\begin{aligned} -z_1 &= \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' - [l_1]}{[p_1]} \\ -z_2 &= \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' - [l_2]}{[p_2]} \\ -z_3 &= \frac{p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' - [l_3]}{[p_3]} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Wenn man den z_1 z_2 z_3 bzw. die Gewichte $[p_1]$ $[p_2]$ $[p_3]$ zuteilt, und dem entsprechend den Mittelwert (z) bildet, so erhält man:

$$\text{Mittelwert} \quad -(z) = \frac{[p_1] z_1 + [p_2] z_2 + [p_3] z_3}{[p_1] + [p_2] + [p_3]} \tag{3}$$

und mit Einsetzung der Werte z_1 z_2 z_3 aus der Gleichungsgruppe (2):

$$-(z) = \frac{[p'] x' + [p''] x'' + [p'''] x''' - [l]}{[p]} \tag{4}$$

Wir haben früher in § 78. den Mittelwert (z) nicht bestimmt, weil weder dieser, noch auch die Einzelwerte z_1 z_2 z_3 ... für die Netzausgleichung gebraucht wurden, jedoch kann man nun zusehen, was aus (z) wird, wenn man in (4), statt der Werte x' x'' x''', welche die Stationsausgleichungen geliefert haben, die entsprechenden Werte der Netzausgleichung einsetzt. Infolge der Netzausgleichung gehen die x' x'' x''' über in $x' + (1)$, $x'' + (2)$, $x''' + (3)$, und (z) soll übergehen in $(z) + z$, d. h. man erhält aus (4) folgendes:

$$-((z) + z) = \frac{[p'](x' + (1)) + [p''](x'' + (2)) + [p'''](x''' + (3)) - [l]}{[p]} \tag{5}$$

Vergleicht man dieses wieder mit (4), so folgt:

$$-z = \frac{[p'](1) + [p''](2) + [p'''](3)}{[p]} \tag{6}$$

Dieses ist die zu Anfang angegebene *Bessel*sche Formel (1).

Das *Bessel*sche z ist also die Änderung, welche das arithmetische Mittel (z) der einzelnen Satz-Nullpunkts-Korrektionen z_1 z_2 z_3 , oder das Mittel der Stationswinkel-Korrektionen x' x'' x''' , durch Zuziehung der Netzkorektionen (1) (2) (3) ... erfährt.

Eine bestimmte in der Gesamtausgleichung liegende Veranlassung, diese Mittel zu bilden, liegt aber gar nicht vor, die *Bessel*sche Ausgleichung verzichtet von vornherein auf symmetrische Fehlerverteilung, weil auf jeder Station *ein* Strahl als Anfangsstrahl bevorzugt wird, und diesem Umstand kann nachträglich durch Berechnung des willkürlichen z nicht mehr abgeholfen werden.

Es giebt nur wenige Fälle, in welchen die Berechnung des *Bessel*schen z einem wirklichen Bedürfnis entspricht, wenn es nämlich sich darum handelt, die Fehlerverteilung in Hinsicht auf etwaige unbekannte Fehlerquellen zu untersuchen; in diesem Falle muss man *jedem* Strahl einen Fehler zuteilen, und kann nicht auf jeder Station einen Strahl als Anfangsstrahl korrektionslos lassen.

Man vergleiche hiezu eine Erörterung von *Helmert* in der Vierteljahrsschrift der astron. Gesellschaft 1877, S. 206—208, und von *Schreiber* in der Zeitschr. f. Verm. 1879, S. 103, auch *Jordan-Steppes*, deutsches Vermessungswesen I. S. 28—32.

§ 82. Stationsmessungen mit Winkeln in allen Richtungs-Kombinationen.

Die letzte Betrachtung über das *Bessel*sche z, welches der ursprünglich mit Winkeln angelegten Netzausgleichung nachträglich unnatürlich angehängt wurde, um die Winkelkorrektionen wieder in Richtungskorrektionen zu verteilen, veranlasst zu der Frage, ob man nicht von vornherein die Netzausgleichung nach *Richtungen* anordnen könnte?

Bei *vollen* Richtungsbeobachtungssätzen giebt sich dieses ganz von selbst, wie an dem Beispiel § 74. S. 216—223 zu sehen ist; aber lauter volle Sätze zu erlangen, ist praktisch sehr schwierig.

Wir wollen uns nun damit beschäftigen, Winkelmessungen auf der Station in der *Form* von Richtungen auszugleichen, d. h. bei s Strahlen nicht $s-1$ Winkelkorrektionen, sondern s Richtungskorrektionen als Unbekannte der Ausgleichung zu nehmen.

Fig. 18.
Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen.

Wir nehmen in Fig. 18. an, dass zwischen $s=4$ Strahlen alle $s\,\dfrac{s-1}{2}=6$ Winkel gleichgewichtig gemessen sind. Geht man von irgend welchen Näherungswerten der 4 Strahlenrichtungen $P^\circ\, P'\, P''\, P'''$ und der 6 Winkel 1. 2. 3. 4. 5. 6. aus, so ist die Form der 6 Fehlergleichungen leicht zu finden, z. B. für den ersten gemessenen Winkel hat man:

$$1. + v_1 = P' + x' - (P^\circ + x^\circ)$$

$$v_1 = -x^\circ + x' + l_1 \qquad w_o\, l_1 = P' - P^\circ - 1.$$

Alle 6 Fehlergleichungen bilden folgendes System:

$$\left.\begin{array}{lcccccc}
 & a & b & c & d & \\
v_1 = & -x^\circ & +x' & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & +l_1 \\
v_2 = & -x^\circ & \cdot\,\cdot & +x'' & \cdot\,\cdot & +l_2 \\
v_3 = & -x^\circ & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & +x''' & +l_3 \\
v_4 = & \cdot\,\cdot & -x' & +x'' & \cdot\,\cdot & +l_4 \\
v_5 = & \cdot\,\cdot & -x' & \cdot\,\cdot & +x''' & +l_5 \\
v_6 = & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & -x'' & +x''' & +l_6
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die Normalgleichungen, ausführlich geschrieben, werden:

$$\left.\begin{array}{l}
+3x^\circ - x' - x'' - x''' + (-l_1 - l_2 - l_3) = 0 \\
-x^\circ + 3x' - x'' - x''' + (+l_1 - l_4 - l_5) = 0 \\
-x^\circ - x' + 3x'' - x''' + (+l_2 + l_4 - l_6) = 0 \\
-x^\circ - x' - x'' + 3x''' + (+l_3 + l_5 + l_6) = 0
\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Wollte man versuchen, diese Gleichungen nach $x^\circ\, x'\, x''\, x'''$ aufzulösen, so würde man keine eindeutigen Werte finden, weil die Gleichungen nicht unabhängig sind; es ist vielmehr jede der Gleichungen (2) mit der Summe der übrigen identisch. Und diese Abhängigkeit ist auch in der Sache begründet, denn 4 Strahlen bestimmen nur

3 unabhängige Winkel, welche man zwar in Form von Richtungen darstellen kann, wobei aber eine Richtung willkürlich ist. Statt nun eine Richtung selbst, z. B. die Anfangsrichtung, etwa mit $x^\circ = 0$ festzusetzen, (was bei der *Bessel*schen Methode geschieht) kann man auch zwischen den 4 Richtungskorrektionen $x^\circ\, x'\, x''\, x'''$ eine willkürliche *Bedingung* festsetzen, nämlich eine möglichst symmetrische und einfache Bedingung:

$$x^\circ + x' + x'' + x''' = 0 \tag{3}$$

Addiert man diese Gleichung (3) zu jeder der Gleichungen (2), so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{lllll} 4\,x^\circ & .. & .. & .. & +(-l_1 - l_2 - l_3) = 0 \\ .. & 4\,x' & .. & .. & +(+l_1 - l_4 - l_5) = 0 \\ .. & .. & 4\,x'' & .. & +(+l_2 + l_4 - l_6) = 0 \\ .. & .. & .. & 4\,x''' & +(+l_3 + l_5 + l_6) = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

gültig für $s = 4$ Strahlen.

Diese Gleichungen (4) löst man sehr bequem nach $x^\circ\, x'\, x''\, x'''$ auf, und hat dann in den Differenzen dieser Richtungskorrektionen auch die Winkelkorrektionen.

Nicht so einfach erledigt sich die Frage nach den *Gewichten* der ausgeglichenen Richtungen oder Winkel.

Wenn man zu den Normalgleichungen (2) die Gewichtsgleichungen nach § 28. S. 71 bildet, so bekommt man:

$$\begin{array}{rl} & 3\,[\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] - [\alpha\,\gamma] - [\alpha\,\delta] = 1 \\ & -[\alpha\,\alpha] + 3\,[\alpha\,\beta] - [\alpha\,\gamma] - [\alpha\,\delta] = 0 \\ & -[\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] + 3\,[\alpha\,\gamma] - [\alpha\,\delta] = 0 \\ & -[\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] - [\alpha\,\gamma] + 3\,[\alpha\,\delta] = 0 \\ \text{Summe} & 0\,[\alpha\,\alpha] + 0\,[\alpha\,\beta] + 0\,[\alpha\,\gamma] + 0\,[\alpha\,\delta] = 1 \\ & [\alpha\,\alpha] = \infty \quad \text{oder} \quad [\alpha\,\beta] = \infty \quad \text{u. s. w.} \\ & p_x{}^\circ = 0 \qquad p_x{}' = 0 \qquad \ldots \end{array}$$

So lange also die Unbekannten $x^\circ\, x'$ u. s. w. selbst unbestimmt gelassen sind, versagt die Gewichtsberechnung.

Versuchen wir es nun mit den Normalgleichungen (4), dieselben geben:

$$\text{Gewichtsgleichungen:}\ \left.\begin{array}{lllll} 4\,[\alpha\,\alpha] & .. & .. & .. & = 1 \\ & 4\,[\alpha\,\beta] & .. & .. & = 0 \\ & & 4\,[\alpha\,\gamma] & .. & = 0 \\ & & & 4\,[\alpha\,\delta] & = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Auflösung:

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\,\alpha] = \dfrac{1}{4} \\ [\alpha\,\beta] = [\alpha\,\gamma] = [\alpha\,\delta] = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Dieses gilt zunächst für $s = 4$ Strahlen; allgemeiner für s Strahlen hat man:

$$[\alpha\,\alpha] = [\beta\,\beta] = [\gamma\,\gamma] = \ldots \qquad = \frac{1}{s} \text{ für Richtungen} \tag{7}$$

$$[\alpha\,\beta] = [\alpha\,\gamma] = [\beta\,\gamma] = \ldots \qquad = 0 \quad \text{„} \qquad \text{„} \tag{8}$$

Vorbehältlich näherer Betrachtungen (14) u. ff. haben wir also folgendes:

Wenn es sich um eine Funktion handelt:

$$F = f^\circ\, x^\circ + f'\, x' + f''\, x'' + f'''\, x''' \tag{9}$$

so ist (nach (3) oder (4) § 29. S. 73) das Funktionsgewicht P bestimmt durch eine Gleichung, welche wegen (8) sehr einfach wird, nämlich:

$$\frac{1}{P} = f^{\circ 2}[\alpha\,\alpha] + f'^2[\beta\,\beta] + f''^2[\gamma\,\gamma] + f'''^2[\delta\,\delta]$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{s}(f^{\circ 2} + f'^2 + f''^2 + f'''^2) = \frac{1}{s}[ff] \tag{10}$$

Wenn die Funktion F in (9) eine ausgeglichene Richtung selbst bedeutet, z. B. $F = x^\circ$ oder $F = x'$ u. s. w., so giebt (10) sehr einfach:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{s} \quad , \quad P = s \tag{11}$$

d. h. bei s Strahlen, die in allen Kombinationen zu je zweien gemessen sind, bekommt jede Richtung nach der Ausgleichung das Gewicht s (wobei vor der Ausgleichung das Gewicht eines Winkels $= 1$ ist).

Wenn ferner die Funktion (9) einen ausgeglichenen Winkel bedeutet, z. B.

$$F = x'' - x' \tag{12}$$

also $\qquad f^\circ = 0 \qquad f' = -1 \qquad f'' = +1 \qquad f''' = 0$

so wird (10):

$$\frac{1}{P_w} = \frac{2}{s} \tag{13}$$

Hiernach hätte man den Satz, dass bei der Winkelmessung in allen Kombinationen zwischen s Strahlen jeder Winkel nach der Ausgleichung das Gewicht $\frac{s}{2}$ bekommt, wo das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$ gesetzt ist.

Dieser Satz und der vorhergehende Satz (11) ist richtig; allein die vorstehende Beweisführung mit den Gewichtsgleichungen (5) ist noch *nicht* allgemein richtig, sondern sie verlangt eine gründlichere Betrachtung, zu der wir nun übergehen.

Die Gleichungen (4) sind nicht gewöhnliche Normalgleichungen, deshalb ist auch die Bildung der Gewichtsgleichungen (5) nicht ohne weiteres zulässig. Um zu gewöhnlichen Normalgleichungen zu gelangen, müssen wir die Bedingung (3), nämlich $x^\circ + x' + x'' + x''' = 0$ schon in den Fehlergleichungen (1) berücksichtigen. Wir wollen zu diesem Zweck x° eliminieren, d. h. nach (3) setzen:

$$x^\circ = -x' - x'' - x''' \tag{14}$$

Damit nehmen die Fehlergleichungen (1) folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = +2x' + x'' + x''' + l_1 \\
v_2 = +x' + 2x'' + x''' + l_2 \\
v_3 = +x' + x'' + 2x''' + l_3 \\
v_4 = -x' + x'' \quad .\,. \quad + l_4 \\
v_5 = -x' \quad .\,. \quad + x''' + l_5 \\
v_6 = \quad .\,. \quad - x'' + x''' + l_6
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Dieses giebt die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
8x' + 4x'' + 4x''' + 2l_1 + l_2 + l_3 - l_4 - l_5 \quad .\,. \quad = 0 \\
4x' + 8x'' + 4x''' + l_1 + 2l_2 + l_3 + l_4 \quad .\,. \quad - l_6 = 0 \\
4x' + 4x'' + 8x''' + l_1 + l_2 + 2l_3 \quad .\,. \quad + l_5 + l_6 = 0
\end{array}\right\} \tag{16}$$

Nach $x'\ x''\ x'''$ aufgelöst geben diese Gleichungen dieselben Resultate wie $x'\ x''\ x'''$ nach (4), wie man an der Summe $x' + x'' + x'''$ kurz erproben kann.

Ausserdem geben die Normalgleichungen (16) folgende Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
8[\alpha\,\alpha] + 4[\alpha\,\beta] + 4[\alpha\,\gamma] = 1 \\
4[\alpha\,\alpha] + 8[\alpha\,\beta] + 4[\alpha\,\gamma] = 0 \\
4[\alpha\,\alpha] + 4[\alpha\,\beta] + 8[\alpha\,\gamma] = 0
\end{array}\right\} \tag{16a}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt $[\alpha\,\alpha] = \frac{3}{16}$, $[\alpha\,\beta] = [\alpha\,\gamma] = -\frac{1}{16}$.

Dieses gilt zunächst bei $s = 4$ Strahlen. Allgemein bei s Strahlen hat man, wie leicht zu überblicken ist:

$$[\alpha\,\alpha] = [\beta\,\beta] = \quad [\gamma\,\gamma] = \ldots = \frac{s-1}{s^2} \text{ für Winkel} \tag{17}$$

$$[\alpha\,\beta] = [\alpha\,\gamma] = \ldots [\beta\,\gamma] = \ldots = -\frac{1}{s^2} \quad \text{„} \quad \text{„} \tag{18}$$

Diese Formeln (17) und (18) bilden den Gegensatz zu (7) und (8).

Wir nehmen nun nochmals die Funktion F von (9) zur Hand, müssen dieselbe aber nun wegen $x^\circ + x' + x'' + x''' = 0$, zur Elimination von x°, so schreiben:

$$F = (f' - f^\circ)\,x' + (f'' - f^\circ)\,x'' + (f''' - f^\circ)\,x''' \tag{19}$$

Das Funktions-Gewicht P ist bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = (f'-f^\circ)^2\,[\alpha\,\alpha] &+ 2\,(f'-f^\circ)\,(f''-f^\circ)\,[\alpha\,\beta] + 2\,(f'-f^\circ)\,(f'''-f^\circ)\,[\alpha\,\gamma] \\ + \quad (f''-f^\circ)^2\,[\beta\,\beta] & \qquad\qquad + 2\,(f''-f^\circ)(f'''-f^\circ)\,[\beta\,\gamma] \\ & \qquad\qquad + \quad (f'''-f^\circ)^2\,[\gamma\,\gamma] \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Setzt man die zugehörigen Coëfficienten nach (17) und (18) hier ein, so wird:

$$\frac{1}{P} = \frac{s}{s^2}\,(f^{\circ 2} + f'^2 + f''^2 + f'''^2) - \frac{1}{s^2}\,(f^\circ + f' + f'' + f''')^2 \tag{21}$$

Wenn es sich nun um eine solche Funktion handelt, bei welcher die Coëfficientensumme = Null ist, d. h.

$$f^\circ + f' + f'' + f''' = 0 \tag{22}$$

so verschwindet der zweite Teil von (21), und es bleibt nur:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{s}\,[ff]. \tag{23}$$

Dieses ist dieselbe Formel wie früher (10), oder die Formel (10), welche wir früher nur mit Vorbehalt aufgestellt hatten, ist nun streng bewiesen für den Fall der Nebenbedingung (22), welche z. B. zutrifft, wenn die Funktion F einen ausgeglichenen Winkel, wie bei (12) bedeutet.

Wir können nun einen wichtigen Schritt weiter gehen. Auch alle Netzbedingungsgleichungen, welche sich auf Richtungen beziehen, geben eine Coëfficientensumme = Null, wie wir bereits in der Anmerkung zu § 74. und zu § 68. auf S. 221 gezeigt haben.

Die Bedingungsgleichungen (1) § 50. S. 119 beziehen sich auf *Winkel*verbesserungen (1) (2) (3); wenn wir jetzt dieselben Zeichen (1) (2) (3) mit Zufügung von (0) als *Richtungs*verbesserungen gelten lassen, so nehmen die Bedingungsgleichungen diese Form an:

$$A_0\,(0) + A_1\,(1) + A_2\,(2) + A_3\,(3) + w_1 = 0 \quad (\text{wo } A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0) \tag{24$_A$}$$

$$B_0\,(0) + B_1\,(1) + B_2\,(2) + B_3\,(3) + w_2 = 0 \quad (\text{„} \quad B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = 0) \tag{24$_B$}$$

Im Übrigen wollen wir die scheinbare Beschränkung machen, dass hiezu nur auf *einer* Station Winkel gemessen seien.

Da aber alles, was sich auf die $[\alpha\,\alpha]\,[\alpha\,\beta]\ldots$ bezieht, ganz von selbst in Stationsgruppen zerfällt (vgl. die Tabelle S. 244—245), so erhalten wir hiemit die Theorie der Gesamtnetzausgleichung, wenn auch die Formeln sich unmittelbar nur auf *eine* Station beziehen.

Wir setzen fest, dass die (0) (1) (2) (3), welche die zweiten Richtungskorrektionen zu den ersten Korrektionen x° x' x'' x''' sind, ebenfalls die Summe Null geben, d. h.

$$(0) + (1) + (2) + (3) = 0 \text{ (für Richtungen)} \tag{25}$$

Eliminiert man (0), so geben die Bedingungsgleichungen (24):

$$(A_1 - A_0)(1) + (A_2 - A_0)(2) + (A_3 - A_0)(3) + w_1 = 0 \tag{26$_A$}$$

$$(B_1 - B_0)(1) + (B_2 - B_0)(2) + (B_3 - B_0)(3) + w_2 = 0 \tag{26$_B$}$$

Indem wir nun dem Wege der Netzausgleichung § 50. S. 119—120 folgen, kommen wir zu den Normalgleichungen mit den Coëfficienten [I I], [I II], [II II], S. 120. Diese Coëfficienten sind mit Bezug auf (26):

$$\left.\begin{aligned}[I\,I] = (A_1-A_0)^2[\alpha\alpha] &+ 2(A_1-A_0)(A_2-A_0)[\alpha\beta] + 2(A_1-A_0)(A_3-A_0)[\alpha\gamma] \\ &+ (A_2-A_0)^2[\beta\beta] \qquad\qquad + 2(A_2-A_0)(A_3-A_0)[\beta\gamma] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (A_3-A_0)^2[\gamma\gamma]\end{aligned}\right\} \tag{27$_A$}$$

$$\left.\begin{aligned}[I\,II] = &(A_1-A_0)(B_1-B_0)[\alpha\alpha] + (A_1-A_0)(B_2-B_0)[\alpha\beta] + (A_1-A_0)(B_3-B_0)[\alpha\gamma] \\ &+ (A_2-A_0)(B_1-B_0)[\alpha\beta] + (A_2-A_0)(B_2-B_0)[\beta\beta] + (A_2-A_0)(B_3-B_0)[\beta\gamma] \\ &+ (A_3-A_0)(B_1-B_0)[\alpha\gamma] + (A_3-A_0)(B_2-B_0)[\beta\gamma] + (A_3-A_0)(B_3-B_0)[\gamma\gamma]\end{aligned}\right\} \tag{27$_{AB}$}$$

$$[II\,II] = (B_1-B_0)^2[\alpha\alpha] + \ldots \tag{27$_B$}$$

Setzt man hier die Bedeutung der Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . . für Winkel, aus (17) und (18) ein, und berücksichtigt die Null-Summen $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0$ und $B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = 0$, nach (24), so findet man:

$$\left.\begin{aligned}[I\,I] &= \frac{1}{s}(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\ [I\,II] &= \frac{1}{s}(A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) \\ [II\,II] &= \frac{1}{s}(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Man bemerkt, dass [I I] und [II II] die Reciproken der Funktionsgewichte für die Bedingungsgleichungen A und B sind, entsprechend den früheren Formeln (9), (19) und (23); und [I II] lässt sich in Beziehung zu dem Funktionsgewicht von $(A_0 + B_0)\,x^\circ + (A_1 + B_1)\,x' + (A_2 + B_2)\,x'' + (A_3 + B_3)\,x'''$ bringen.

Die Formeln (28) kann man auch kurz so schreiben:

$$[I\,I] = \frac{[A\,A]}{s} \quad , \quad [I\,II] = \frac{[A\,B]}{s} \quad , \quad [II\,II] = \frac{[B\,B]}{s} \tag{29}$$

wo aber die Summen mit A_0, $B_0 \ldots$, entsprechend (24), beginnen müssen.

Denkt man sich nun die Normalgleichungen (7) S. 120 aufgelöst, so folgen die Korrektionsformeln (11) unten auf S. 120. Da wir dieselben jetzt auf die umgeformten Bedingungsgleichungen (26) beziehen, so wird nach (11) S. 120:

$$\begin{aligned}(1) = k_1 &\left\{ [\alpha\alpha](A_1 - A_0) + [\alpha\beta](A_2 - A_0) + [\alpha\gamma](A_3 - A_0) \right\} \\ + k_2 &\left\{ [\alpha\alpha](B_1 - B_0) + [\alpha\beta](B_2 - B_0) + [\alpha\gamma](B_3 - B_0) \right\}\end{aligned}$$

Einsetzen von $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. aus (17) und (18) giebt:

$$(1) = k_1 \left\{ \frac{s-1}{s^2}(A_1 - A_0) - \frac{1}{s^2}(A_2 - A_0) - \frac{1}{s^2}(A_3 - A_0) \right\} + k_2 \left\{ \ldots \right\}$$

Weil aber $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0$ nach (24), so wird nun:

$$(1) = \frac{k_1}{s^2}\left\{ s\,A_1 - s\,A_0 - (A_1 + A_2 + A_3) + (s - 1)\,A_0 \right\} + k_2 \left\{ \ldots \right\}$$

$$(1) = \frac{k_1}{s^2}\left\{ s\,A_1 \right\} + \frac{k_2}{s^2}\left\{ s\,B_1 \right\}$$

Alle solche Formeln zusammen sind:

$$\left.\begin{aligned} (1) &= k_1 \frac{A_1}{s} + k_2 \frac{B_1}{s} \\ (2) &= k_1 \frac{A_2}{s} + k_2 \frac{B_2}{s} \\ (3) &= k_1 \frac{A_3}{s} + k_2 \frac{B_3}{s} \\ \text{Summe} \quad -(1)-(2)-(3) = (0) &= k_1 \frac{A_0}{s} + k_2 \frac{B_0}{s} \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Nun sind (28) und (30) offenbar dieselben Formeln, welche man auch erhalten haben würde, wenn man von vornherein nach Richtungen mit den Gewichtscoëfficienten (7) und (8) und mit den ursprünglichen Bedingungsgleichungen (24) ausgeglichen hätte, und das Ganze stellt nun einen sehr schönen Satz dar, welcher so lautet:

Wenn man auf allen Stationen eines Netzes Winkelmessungen in allen Richtungskombinationen (zu je zweien) macht, so darf man die Resultate der Stationsausgleichungen in Richtungsform in das Netz einführen, wie wenn sie unmittelbare Richtungsmessungen wären, und zwar mit Einzelgewichten bzw. $= s$, $= s'$, $= s'' \ldots$ wo s, s', $s'' \ldots$ die Strahlenzahlen der Stationen sind.

Damit nimmt die ganze Rechnung die einfache Form von (2) und (3) § 40. S. 99 an, denn die Coëfficienten $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$ u. s. w. der dortigen (2) entsprechen offenbar nun unseren (29), wenn die $s = p$ gesetzt und die Summierung über *alle* Stationen ausgedehnt wird; und die Korrektionsformeln (3) S. 99 haben, wenn die $s = p$ gesetzt werden, ebenfalls die Form unserer neuen (30).

Ungleiche Wiederholungszahlen auf verschiedenen Stationen.

Da nach dem Bisherigen eine auf einer Station mit s Strahlen ausgeglichene Richtung das Gewicht s, oder ein Winkel das Gewicht $\frac{s}{2}$ bekommt, also die Richtungen verschiedener Stationen sehr ungleich werden können, empfiehlt es sich, auf den Stationen mit wenigen Strahlen, die Einstellungen an sich mehrfach zu machen, oder überhaupt die Wiederholungszahlen aller Stationen so zu bemessen, dass die Richtungsgewichte möglichst gleich werden. Dieses Verfahren hat Herr Oberst *Schreiber* bei der Preussischen Landesaufnahme eingeführt, nämlich (nach der Zeitschr. f. Vermessungswesen 1878, S. 214) in folgender Anordnung:

Anzahl der Strahlen einer Station s	Anzahl der Winkelmessungen $s\frac{s-1}{2}$	Winkelgewicht ohne Wiederholung $\frac{s}{2}$	Wiederholungszahl n	Winkelgewicht bei $n$facher Wiederholung $p=\frac{ns}{2}$
2	1	1,0	24	24
3	3	1,5	16	24
4	6	2,0	12	24
5	10	2,5	10	25
6	15	3,0	8	24
7	21	3,5	8	28
8	28	4,0	6	24
				24,7 Durchschnitt

(31)

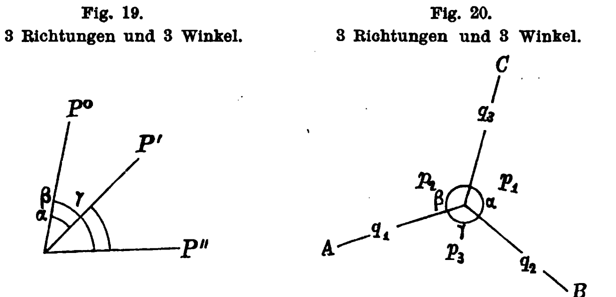
Durch passende Wahl der Wiederholungszahlen n wurde also erreicht, dass die Gewichte p für das Netz sehr nahe *gleich* geworden sind.

§ 83. Besonderer Fall dreier Richtungen.

Der Fall dreier Richtungen, welche in verschiedenen Kombinationen gemessen sind, bietet in mehrfacher Beziehung Interesse, weshalb wir diesen Fall hier besonders behandeln, obgleich er in den allgemeinen Untersuchungen von § 75. § 78. und § 82. mit enthalten ist.

Drei Strahlen lassen sich in 4 verschiedenen Kombinationen messen, nämlich in 3 Winkelkombinationen mit je 2 Richtungen, und in 1 Richtungskombination mit allen 3 Richtungen. Wir betrachten zuerst nur die 3 Winkelkombinationen und haben hiezu 2 Figuren gezeichnet, Fig. 19. und Fig. 20., von denen die erste Fig. 19. sich

Fig. 19. 3 Richtungen und 3 Winkel. Fig. 20. 3 Richtungen und 3 Winkel.



mehr den bisherigen Bezeichnungen von § 78. und § 82. anschliesst, während Fig. 20. mehr der Symmetrie Rechnung trägt, und uns für spätere Anwendungen bequemer ist.

Nach Fig. 20. nehmen wir folgendes an:

$$\begin{array}{llll} \text{Strahlen} & A & B & C \\ \text{Gemessene Winkel} & CB = \alpha & \text{mit dem Gewicht} & p_1 \\ \text{"} \quad \text{"} & AC = \beta & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & p_2 \\ \text{"} \quad \text{"} & BA = \gamma & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} & p_3 \end{array} \Bigg\} \qquad (1)$$

Die Ausgleichung machen wir nach bedingten Beobachtungen und folgen der Anleitung § 43. S. 104—106.

Es besteht eine Bedingungsgleichung:

Es *soll* sein: $\alpha + \beta + \gamma - 360° = 0$

oder nach (4) S. 105: $v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$

$$\begin{array}{llll} \text{d. h.:} & a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 1 \\ \text{und wegen (1): Gewichte} & p_1 & p_2 & p_3 \end{array} \Big\} \qquad (2)$$

Es soll nun das Gewicht P_1 des ersten Winkels α nach der Ausgleichung bestimmt werden, also nach (9) S. 105:

$$F = \alpha$$

oder: $f_1 = 1 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 0 \qquad (3)$

Das Gewicht P_1 nach der Ausgleichung ist nach (16) S. 106 gegeben durch die Formel:

$$\frac{1}{P_1} = \left[\frac{ff}{p} . 1\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$$

Aus den Vorbereitungen (2) und (3) setzt sich dieses so zusammen:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{p_1} - \left(\frac{1}{p_1}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} \tag{4}$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \left[\frac{1}{p}\right] \tag{5}$$

damit wird (4), wenn man es zugleich etwas umformt:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{6}$$

Dieses ist dieselbe Formel, welche auch schon in (19) und (21) § 10. S. 29 enthalten ist

Nun kann man der Formel (6) noch eine andere sehr wichtige Bedeutung unterlegen, indem man schreibt:

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_2} \tag{7}$$

wobei:

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad \frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{8}$$

d. h. q_2 und q_3 haben die Bedeutung unabhängiger *Richtungs-Gewichte.*

Wenn man die Formeln (8) auf alle Kombinationen 1.2 , 1.3 , 2.3 anwendet und auch noch etwas umformt, so hat man folgendes:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{\frac{1}{p_2}\,\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_1}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad \text{oder} \quad q_1 = (p_2 + p_3) + \frac{p_2 p_3}{p_1} \tag{9_1}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad , \quad q_2 = (p_3 + p_1) + \frac{p_3 p_1}{p_2} \tag{9_2}$$

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1}\,\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_3}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad , \quad q_3 = (p_1 + p_2) + \frac{p_1 p_2}{p_3} \tag{9_3}$$

Hiezu gilt auch (7) in allen Kombinationen; und wir können nun den Satz aussprechen, dass, in Hinsicht auf die ausgeglichenen Winkel α β γ, man die Genauigkeit durch *Richtungs*gewichte q_1 q_2 q_3 darstellen kann, aus welchen sich die Winkelgewichte P_1 P_2 P_3 nach der Ausgleichung ebenso zusammensetzen, wie wenn die q zu *unabhängigen* Richtungsmessungen gehörten.

Nun kann man rasch noch einen Schritt weiter gehen: Wenn zu den Winkelmessungen α β γ noch ein voller Richtungssatz mit dem Gewicht q_4 hinzutritt, so hat man *alle* zwischen 3 Strahlen möglichen Messungs-Kombinationen; und nun kann man die Gesamtausgleichung und Genauigkeitsbestimmung dadurch erzielen, dass man

q_4 zu den vorher bestimmten $q_1\ q_2\ q_3$ bzw. hinzutreten lässt, also: $q_4 + q_1$, $q_4 + q_2$, $q_4 + q_3$, wobei aber zu beachten ist, dass q_4 auf dieselbe Winkeleinheit zu beziehen ist, auf welche sich die ursprünglichen $p_1\ p_2\ p_3$ beziehen.

Damit ist bewiesen, dass die Messungen zwischen *drei* Strahlen unter allen Umständen sich in der Form von Richtungen mit Einzelgewichten darstellen lassen.

Anmerkungen zu § 82. und § 83.

Die Stationsausgleichung mit Winkelmessungen in allen Richtungskombinationen, und Netzausgleichung nach Richtungen, wurde zuerst von *Hansen* 1868—1871 öffentlich theoretisch behandelt in der Abhandlung „Von der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen und ihrer Anwendung auf die Geodäsie“ Abhandlungen der math.-phys. Klasse der K. sächs. Gesellsch. der Wissensch. Band VIII, 1868. Einen Bericht hierüber haben wir in dem Werke „Deutsches Vermessungswesen I. S. 57—58 mit Angabe aller *Hansen*schen Original-Quellen gegeben.

Unabhängig hievon hat Herr Oberst *Schreiber* diese Methode sowohl theoretisch behandelt als auch praktisch verwertet in dem amtlichen Werk: „Die Königl. Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke II. Teil. 2. Abteilung, Berlin 1874“ S. 303—313 nebst „Zeitschr. f. Verm. 1878“ S. 209—240.

Diese *Schreiber'sche Methode* ist jetzt bei den Haupttriangulierungen der Landes-Aufnahme im Gebrauch.

In der Theorie wird bei *Hansen* und bei *Schreiber* für die willkürliche Bedingung zwischen den Richtungskorrektionen eine Korrelate (ψ bzw. λ) eingeführt.

Vogler und *Helmert* haben in der „Zeitsch. f. Verm. 1885“ S. 49—59 und S. 263—266 den noch *allgemeineren* Fall von Stationsbeobachtungen in irgendwie symmetrischen Anordnungen behandelt. Auch hier, wie bei Winkelmessungen mit je 2 Strahlen findet man eine Zerfällung der Gewichtsgleichungen in Einzelgewichte. Wenn man p Strahlen in symmetrischen Sätzen von je i Richtungen, also in $\binom{p}{i}$ Kombinationen beobachtet, so wird das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels $P = \frac{p}{2i}\binom{p-2}{i-2}$, oder in den Zeichen unseres § 82: $p = s$, $P = \frac{s}{2i}\binom{s-2}{i-2}$, also mit $i = 2$, $P = \frac{s}{4}$. Dieses stimmt mit unserem $P = \frac{s}{2}$ in (13) S. 253 insofern, als wir dort das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$ gesetzt haben, *Vogler* und *Helmert* aber das Gewicht einer gemessenen Richtung $= 1$ nehmen.

Nachdem man erkannt hat, dass im Falle dreier Strahlen mit beliebiger Messungsanordnung, und im Falle von mehr als 3 Strahlen mit symmetrischer Anordnung der Beobachtungen, die Stations-Ergebnisse als Richtungen mit Einzelgewichten in die Netzausgleichung eingeführt werden können, kann man die Frage aufwerfen, ob im Fall von irgend welcher Zahl von Strahlen, und bei irgend welcher Beobachtungs-Anordnung, die Annahme von *Einzel*gewichten (statt Gewichts*gleichungen*) für die ausgeglichenen Stationsrichtungen beim Übergang zum Netz nicht wenigstens *näherungsweise* zulässig ist? So ist z. B. die britische Ausgleichung der „ordnance trigonometrical survey“ und die bayerische Landestriangulierungs-Ausgleichung behandelt worden, letztere mit „*Anschnittszahlen*“ als Gewichten.

Nehmen wir z. B. die Fig. 20. S. 257, so kann dort als Anschnittszahl für den Strahl A gesetzt werden: $S_A = p_2 + p_3$
weil die Winkel mit den Gewichten p_2 und p_3 durch Anschneiden von A gemessen werden. Ebenso sind für B und C die Anschnittszahlen:

$$S_B = p_1 + p_3 \qquad S_C = p_1 + p_2$$

Diese p_2+p_3, p_1+p_3, p_1+p_2 sind in der That die ersten Teile der Richtungsgewichte $q_1\, q_2\, q_3$ in (9) S. 258, aber das Zutreten von $\frac{p_2 p_3}{p_1}$ zu p_2+p_3 u. s. w. zeigt eben, dass p_2+p_3 nur eine Näherung ist. Setzt man beispielsweise $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=3$, so wird:

$$q_1 = 5+6 \qquad q_2 = 4+1{,}5 \qquad q_3 = 3+1$$

Wenn auch $q_2=4$ und $q_3=3$ als Näherungen gelten können, so ist dieses doch bei $q_1=5$ kaum der Fall.

Dieses einfache übersichtliche Beispiel zeigt, dass die Methode der „*Anschnittszahlen*“ als Richtungsgewichte, zu grossen Willkürlichkeiten führen kann, dass es also für Näherungen zu empfehlen sein wird, lieber schlechthin alle Richtungsgewichte *gleich* zu nehmen, d. h. dem Beispiel von *Gauss* bei der Hannoverschen Gradmessung zu folgen, das wir schon früher in § 77. S. 231 betrachtet haben.

Kapitel IV.

Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit.

§ 84. Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit zufälligen Ereignissen, d. h. mit Ereignissen, deren Ursachen unbekannt sind. Solche Ereignisse sind z. B. das Fallen eines Würfels, bei Versicherungsanstalten das Eintreten eines Brandfalles oder eines Todesfalles, in der Methode der kleinsten Quadrate das Vorkommen eines Beobachtungsfehlers.

Wenn die Ursachen in solchen Fällen auch nicht absolut unbekannt sind, so wird diesen Ursachen doch nicht weiter nachgeforscht, wenn es sich um Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt.

Mathematische Wahrscheinlichkeit.

Die *Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses ist das Verhältnis der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle zu der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle.

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Zahl 6 zu werfen, ist $=1:6$, weil 1 Fall günstig und 6 Fälle möglich sind.

Die Wahrscheinlichkeit ist hiernach immer ein echter Bruch, mit den Grenzen 0 für Unmöglichkeit, und 1 für Gewissheit.

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten.

I. Sind w' und w'' die Wahrscheinlichkeiten zweier sich ausschliessender Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit w, dass eines oder das andere eintritt, gleich der Summe der beiden Einzelnwahrscheinlichkeiten, d. h.:

$$w = w' + w'' \tag{1}$$

Denken wir uns in einer Urne a schwarze, b weisse und c sonstige Kugeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine schwarze Kugel zu erhalten:

$$w' = \frac{a}{a+b+c}$$

desgleichen für eine weisse Kugel:

$$w'' = \frac{b}{a+b+c}$$

und für eine schwarze *oder* eine weisse Kugel, da nun a und b günstig sind:

$$w = \frac{a+b}{a+b+c}$$

Die 3 letzten Gleichungen bestätigen die zu Anfang geschriebene Gleichung (1), welche in gleicher Weise auch für mehr als zwei Ereignisse bewiesen wird, nämlich:

$$w = w' + w'' + w''' + \ldots \tag{1a}$$

II. Sind w' und w'' die Wahrscheinlichkeiten zweier unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit w, dass beide zusammen eintreten, gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten, d. h.:

$$w = w' \,.\, w'' \tag{2}$$

Man denke sich hiezu zwei Urnen mit a' und a'' schwarzen, nebst b' und b'' anderen Kugeln; für beide Urnen ist die Wahrscheinlichkeit für Schwarz bzw.:

$$w' = \frac{a'}{a'+b'} \qquad w'' = \frac{a''}{a''+b''}$$

Nun fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Zügen aus beiden Urnen, beidemal schwarz erscheint. Hier sind $a'\,a''$ Fälle günstig, weil zu jeder Kugel a' eine Kugel a'' kommen kann, und möglich sind $(a'+b')\,(a''+b'')$ Fälle, es ist also:

$$w = \frac{a'}{a'+b'}\,\frac{a''}{a''+b''}\,,$$

was mit der vorhergehenden Gleichung die oben geschriebene Gleichung (2) giebt.

Dieser Satz gilt ebenfalls auch für mehr als 2 Ereignisse, und heisst dann:

$$w = w' \,.\, w'' \,.\, w''' \;\ldots \tag{2a}$$

III. Wenn ein Ereignis durch verschiedene Ursachen, welche verschiedene Wahrscheinlichkeiten haben, herbeigeführt werden kann, so ist *nach* dem Eintreten des Ereignisses die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Ursache wirksam gewesen ist, proportional der Wahrscheinlichkeit dieser Ursache selbst.

Man denke sich mehrere, etwa 3 Urnen, deren jede n Kugeln enthält, und zwar in der Verteilung:

$$\begin{array}{ccc} 1. & 2. & 3. \\ a_1 + b_1 = n & a_2 + b_2 = n & a_3 + b_3 = n \end{array}$$

Hiernach bietet jede Urne für sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel von der Gattung a angezogen werde, bzw.:

$$w_1 = \frac{a_1}{n} \qquad w_2 = \frac{a_2}{n} \qquad w_3 = \frac{a_3}{n}$$

Es liege nun die Thatsache eines Zuges von der Gattung a vor; man weiss aber nicht, aus welcher Urne der Zug geschah. Man schliesst aber, dass diejenige Urne mit grösster Wahrscheinlichkeit die fragliche war, welche am meisten a enthielt.

Das Gesetz der grossen Zahlen. Wenn man eine Wahrscheinlichkeit aus den Ursachen a priori nicht berechnen kann, so giebt es einen Schluss aus der Häufigkeit des Vorkommens rückwärts auf die Wahrscheinlichkeit.

Wenn z. B. von 1000 geborenen Knaben nur 250 das 50ste Lebensjahr erreichen, so schliesst man daraus, dass für irgend ein heute geborenes männliches Kind die Wahrscheinlichkeit $= \frac{250}{1000}$ oder $= \frac{1}{4}$ besteht, das 50ste Lebensjahr zu erreichen.

Oder wenn bei einem Doppelnivellement unter 491 Vergleichungen 209 Vergleichungen die Differenz 1^{mm} gegeben haben, und wenn andere Differenzen als 0^{mm}, 1^{mm}, 2^{mm} überhaupt nicht vorkommen können, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Differenz 1^{mm}, der Bruch $\frac{209}{491} = 0{,}43$.

Zum Studium der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfswissenschaft der Methode der kleinsten Quadrate dient: *Hagen*, „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung.“ 2. Aufl. Berlin 1867.

§ 85. Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungsfehler setzt voraus, dass die Beobachtungsfehler als zufällige Ereignisse in dem oben § 84. S. 260 erörterten Sinne zu betrachten sind. Grobe Fehler und einseitig wirkende Fehler sollen ausgeschlossen sein (vgl. § 3. S. 6).

Wir nehmen an, man habe sich auf irgend welche Art eine grössere Zahl von unabhängigen gleichartigen Beobachtungsfehlern verschafft, indem man etwa die Differenzen zwischen dem arithmetischen Mittel vieler gleichartiger Beobachtungen einer Unbekannten und diesen Beobachtungen selbst, näherungsweise als wahre Beobachtungsfehler gelten lässt, oder indem man Beobachtungsdifferenzen oder Dreieckswinkel-Widersprüche oder ähnliche Messungsresultate benützt, welche den Charakter wahrer Fehler haben (vgl. § 3. S. 7).

Wenn man nun solche Fehler nach ihrer Grösse ordnet, so macht man die Erfahrung, dass die Verteilung derselben einem gewissen *Gesetz* folgt. Ausser der Bestätigung der von vornherein gemachten Annahme, dass gleich grosse positive und negative Fehler nahezu gleich zahlreich sind, findet man, dass kleine Fehler weit häufiger sind als grosse, und dass namentlich um den Wert Null sich die Fehler häufen, während grössere Fehler, welche das zwei- bis dreifache des mittleren Fehlers übersteigen, sehr selten vorkommen.

Schon die geringe Zahl von 18 Beobachtungen, welche wir früher in § 7. S. 17 behandelt haben, zeigt dieses; man hat nämlich 10 positive und 8 negative Fehler; und wenn man ohne Rücksicht auf das Vorzeichen nach der Grösse ordnet, so erhält man folgende Verteilung:

0,10″	0,12″	0,12″	0,13″	0,30″	0,38″	0,62″	0,83″	1,12″
1,13	1,17	1,27	1,38	1,63	1,71	2,09	2,63	4,62

Nehmen wir an, es sei hier etwa 5,00 der Grenzfehler, und es seien alle Fehler zwischen 0 und 5,00 möglich, nämlich 0,00 0,01 0,02 0,03 . . . 4,98 4,99 5,00 (ohne Zwischenwerte), so sind doch, wie obige Reihe beweist, nicht alle diese Fehler gleich wahrscheinlich; im Gegenteil, es ist z. B. wahrscheinlicher, dass der Fehler einer neuen

Beobachtung unter 2,50 fällt, als darüber, denn unter den 18 beobachteten Fehlern sind nur 2, welche über die Grenze 2,50 fielen; es ist ferner wahrscheinlicher, bei einer neuen Beobachtung den Fehler 0,20 zu erhalten, als den Fehler 2,00, weil die obige Reihe 5 Fälle zwischen 0,10 und 0,30 aufweist, dagegen zwischen 1,90 und 2,10 nur 1 Fall.

Die gemachte Annahme, dass nur die bestimmten Fehler 0,00 0,01 0,02 0,03 ... 4,99 5,00 möglich sein sollen, nicht aber Zwischenwerte, ist in der Wirklichkeit nur insofern erfüllt, als etwa alle vorkommenden Fehler auf 0,01 abgerundet werden, so dass z. B. alle Werte zwischen den Grenzen 1,501 und 1,499 gleich 1,50 angenommen werden; das heisst aber streng genommen nichts Anderes, als: man nimmt die Wahrscheinlichkeit aller unendlich vieler Fehler, welche zwischen gewissen engen Grenzen liegen, als gleich an, und sucht nun nicht mehr die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers $\varDelta$ als Funktion von $\varDelta$ darzustellen, sondern die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen die engen Grenzen $\varDelta$ und $\varDelta + d\varDelta$ fällt. Diese letztere Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \varphi(\varDelta)\, d\varDelta \tag{1}$$

wobei $\varphi(\varDelta)$ eine Funktion von $\varDelta$ ist, welche Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion heisst.

Um die Bedeutung der Funktion $\varphi(\varDelta)$ noch mehr zu veranschaulichen, wählen wir ein *Beispiel:*

Angenommen, man habe statt der obigen 18 Beobachtungen in gleicher Art deren 1000 angestellt, und dabei 5mal den Fehler 0,20 erhalten, so würde man hiernach sagen können, der Fehler 0,20 hat die Wahrscheinlichkeit 0,005, oder genauer: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen die Grenzen 0,20 und 0,21 fällt, ist gleich 0,005 (da die Grenzen sehr eng sein sollen, ist es gleichgültig, ob man sie 0,20 und 0,21 oder 0,19 und 0,20 oder auch 0,195 und 0,205 annimmt). Hiebei sind positive und negative Fehler nicht unterschieden; thut man dieses unter der Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Fehler, so hat man die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen die Grenzen + 0,20 und + 0,21 fällt, = 0,0025, und ebenso gross natürlich auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen die Grenzen — 0,21 und — 0,20 fällt. Es ist daher in diesem Fall, mit $\varDelta = 0{,}20$ und $d\varDelta = 0{,}01$:

$$\varphi(\varDelta)\, d\varDelta = 0{,}0025$$

Je enger man die Grenzen $\varDelta$ und $\varDelta + d\varDelta$ zusammenzieht, um so kleiner wird $\varphi(\varDelta)\, d\varDelta$, und nimmt man $d\varDelta$ unendlich klein, so wird auch $\varphi(\varDelta)\, d\varDelta$, d. h. die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Fehler $\varDelta$ zu begehen, unendlich klein. Wir machen nun die Annahme, es sei $d\varDelta$ unendlich klein, und behandeln es dem entsprechend als Differential.

Damit erhält man nach § 84. I. S. 260 die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt:

$$W_a^b = \int_a^b \varphi(\varDelta)\, d\varDelta \tag{2}$$

§ 86. Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Um zur Bestimmung der Funktion $\varphi(\varDelta)$ zu gelangen, betrachten wir zuerst die Fehlergrenzen. Ohne Zweifel giebt es für jede Beobachtungsart gewisse Grenzen, welche von den Fehlern nicht überschritten werden können; da aber diese Grenzen

sich nicht allgemein angeben lassen, nehmen wir die denkbar äussersten Grenzen, nämlich $-\infty$ und $+\infty$. Für diese Grenzen muss die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich Null werden, also:

$$\varphi(\pm\infty) = 0 \tag{1}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liege, ist die Gewissheit $= 1$; wenn man also den Satz (1a) § 84. S. 261 als unendlichfache Addition, d. h. als Integration, auf die noch unbestimmte Funktion $\varphi(\varDelta)$ anwendet, so hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varDelta)\, d\varDelta = 1 \tag{2}$$

Als zweite Bedingung, welcher die Funktion $\varphi(\varDelta)$ genügen soll, nehmen wir an, es soll dieselbe so beschaffen sein, dass, ihr zu Folge, das arithmetische Mittel mehrerer gleich genauer Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse ist. Wenn also mehrere Beobachtungen einer Unbekannten die Werte $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ gegeben haben, und man nimmt an, es sei x die Unbekannte, so muss man damit auch annehmen, dass folgende Fehler begangen wurden:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta_1 &= x - l_1 \\ \varDelta_2 &= x - l_2 \\ \varDelta_3 &= x - l_3 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Nun soll die Wahrscheinlichkeit von x, und damit die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\varDelta_1\ \varDelta_2\ \varDelta_3 \ldots$, ein Maximum werden. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\varDelta_1\ \varDelta_2\ \varDelta_3 \ldots$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler $\varDelta_1\ \varDelta_2\ \varDelta_3 \ldots$ zusammenkommen, also nach § 84. II. S. 261, das Produkt:

$$\varphi(\varDelta_1)\, d\varDelta \times \varphi(\varDelta_2)\, d\varDelta \times \varphi(\varDelta_3)\, d\varDelta \times \ldots = \text{Maximum}$$

oder logarithmisch

$$\log\varphi(\varDelta_1) + \log\varphi(\varDelta_2) + \log\varphi(\varDelta_3) \ldots = \text{Maximum.}$$

Das Maximum soll in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x erzielt werden. Nach (3) bestehen die Differentialbeziehungen:

$$\frac{d\varDelta_1}{dx} = \frac{d\varDelta_2}{dx} = \frac{d\varDelta_3}{dx} = \ldots$$

also hat man als Bedingung des Maximums:

$$\frac{d\log\varphi(\varDelta_1)}{d\varDelta_1} + \frac{d\log\varphi(\varDelta_2)}{d\varDelta_2} + \frac{d\log\varphi(\varDelta_3)}{d\varDelta_3} + \ldots = 0$$

oder, mit Zusetzung von $\varDelta$ im Zähler und Nenner:

$$\frac{\varDelta_1\, d\log\varphi(\varDelta_1)}{\varDelta_1\, d\varDelta_1} + \frac{\varDelta_2\, d\log\varphi(\varDelta_2)}{\varDelta_2\, d\varDelta_2} + \frac{\varDelta_3\, d\log\varphi(\varDelta_3)}{\varDelta_3\, d\varDelta_3} = 0$$

Das arithmetische Mittel verlangt bekanntlich:

$$\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 + \ldots = 0$$

Wenn diese und die vorhergehende Gleichung auf denselben Wert x führen sollen, so muss sein:

$$\frac{d\log\varphi(\varDelta_1)}{\varDelta_1\, d\varDelta_1} = \frac{d\log\varphi(\varDelta_2)}{\varDelta_2\, d\varDelta_2} = \frac{d\log\varphi(\varDelta_3)}{\varDelta_3\, d\varDelta_3} = \ldots$$

oder es muss allgemein konstant sein:

$$\frac{d\log\varphi(\varDelta)}{\varDelta\, d\varDelta} = k \qquad \text{oder} \qquad \frac{d(\log\varphi(\varDelta))}{d\varDelta} = k\varDelta$$

das letzte giebt integriert:

$$log\,\varphi(\varDelta) = \frac{1}{2} k\,\varDelta^2 + C$$

wobei C Integrations-Konstante ist. Wenn *log* natürliche Logarithmen mit der Basis e bedeutet, so folgt hieraus:

$$\varphi(\varDelta) = e^{1/2 k \varDelta^2 + C} = e^C e^{1/2 k \varDelta^2}$$

Die Konstante $\frac{1}{2} k$ muss wegen der Bedingung (1) notwendig negativ sein, wir setzen daher:

$$\frac{1}{2} k = -h^2$$

Ferner setzen wir die Potenz e^C, welche von der Integrationskonstanten C abhängt, vorerst $= A$, und haben damit:

$$\varphi(\varDelta) = A\, e^{-h^2 \varDelta^2} \tag{4}$$

Die Konstante A lässt sich mittelst der Bedingung (2) bestimmen; es soll nämlich hiernach sein:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varDelta^2} d\varDelta = 1$$

Mit $h\varDelta = t$, $d\varDelta = \frac{dt}{h}$, was die Grenzen unverändert lässt, erhält man:

$$\frac{A}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 \tag{5}$$

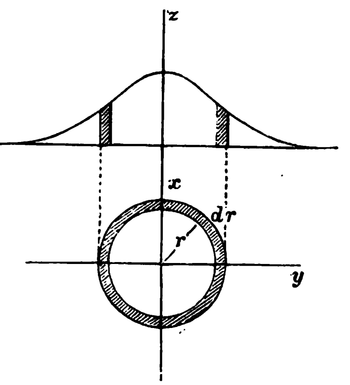


Fig. 1.
Hilfsfigur zur Auswertung des Integrals (5).
(Asymptotischer Kurven-Anschluss.)

Um dieses bestimmte Integral auszuwerten, nehmen wir eine geometrische Betrachtung zu Hilfe:

Durch Fig. 1. sei eine Umdrehungsfläche dargestellt, deren Gleichung ist:

$$z = e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{oder} \quad z = e^{-r^2} \tag{6}$$

Um das Volumen zu bestimmen, welches zwischen der krummen Fläche und der xy Ebene sich befindet, schlagen wir zwei verschiedene Wege ein:

Erstens giebt die Zerlegung nach dx und dy das Volumen-Differential:

$$dV = dx\,dy\,z$$

also:

$$V = \int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\,dy$$

wobei die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ sich auf beide Integrationen beziehen.

Indem man dieses zuerst nach x und dann nach y integriert denkt, hat man:

$$V = \int e^{-y^2} \left(\int e^{-x^2} dx \right) dy \quad \text{oder} \quad V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \tag{7}$$

Zweitens kann man auch eine Zerlegung nach Cylinder-Elementen vornehmen, und hiezu ist nach Fig. 1. die Kreisringfläche in der xy-Ebene $= 2 r \pi d r$, also das Volumen eines Hohlcylinders vom Halbmesser r, der Dicke dr und der Höhe z:

$$dV' = 2 r \pi \, d r \, z = 2 r \pi \, d r \, e^{-r^2}$$

daraus das Gesamt-Volumen:

$$V = \int d\,V' = \int_0^\infty 2 r \pi e^{-r^2} dr$$

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int r e^{-r^2} d r = -\frac{1}{2} e^{-r^2}$$

es lässt sich also auch das bestimmte Integral angeben, nämlich mit der oberen Grenze $r = \infty$ und der unteren Grenze $r = 0$:

$$V = 2 \pi \left(-0 - (-\frac{1}{2})\right) = \pi \tag{8}$$

Nun findet man durch Vergleichung von (7) und (8):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} d x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} d y = \pi.$$

Da in einem bestimmten Integral die Bezeichnung der ursprünglichen Veränderlichen mit x , y oder t unwesentlich ist, können wir dafür auch schreiben:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d t\right)^2 = \pi \tag{9}$$

Verbindet man dieses mit (5), so wird:

$$\frac{A}{h} \sqrt{\pi} = 1 \quad \text{oder} \quad A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

und damit haben wir endlich die Wahrscheinlichkeitsfunktion nach (4):

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \tag{10}$$

Die hier noch bleibende Konstante h hängt von der Art (Genauigkeit) der jeweiligen Beobachtung ab und lässt sich deswegen nicht allgemein angeben.

Einige ausgerechnete Zahlenwerte der Funktion (10) werden wir in dem späteren § 96. geben.

§ 87. Reihenentwicklungen.

Wenn man den Satz (1a) § 84. S. 261 als unendlichfache Addition auf die soeben gefundene Funktion (10) § 86. (s. o.) anwendet, so findet man die Wahrschein lichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt:

$$\overset{b}{\underset{a}{W}} = \int_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

oder mit $h\Delta = t$, $d\Delta = \frac{dt}{h}$, wodurch die Grenzen a und b in ah und bh übergehen:

$$\overset{b}{\underset{a}{W}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt, ist hiernach zunächst:

$$\overset{+a}{\underset{-a}{W}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ah}^{+ah} e^{-t^2} dt$$

Weil aber die Wahrscheinlichkeiten zwischen $-a$ und Null einerseits, und Null und $+a$ andererseits einander gleich sind, kann man hiefür setzen:

$$\overset{+a}{\underset{-a}{W}} = (W)_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt \tag{1}$$

Um dieses Integral auswerten zu können, müssen wir eine Reihenentwicklung anwenden. Hiezu dient die Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{2}$$

Diese giebt mit $x = -t^2$:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots \tag{2'}$$

$$\int e^{-t^2} dt = t - \frac{t^3}{3.1!} + \frac{t^5}{5.2!} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^9}{9.4!} - \cdots$$

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = T - \frac{T^3}{3.1!} + \frac{T^5}{5.2!} - \frac{T^7}{7.3!} + \frac{T^9}{9.4!} \tag{3}$$

Die Reihe (3) konvergiert für endliche Werte von T jedenfalls, denn es ist der Quotient q zweier auf einander folgender Glieder, wenn man bis $n!$ im Nenner fortgeht,:

$$q = \frac{(2n-1)\,T^2}{(2n+1)\,n}$$

Da die Reihe abwechselnd positive und negative Glieder hat, so genügt es für die Konvergenz, wenn von irgend welcher Stelle an immer $q < 1$ wird, dieses ist aber für jeden endlichen Wert von T der Fall, wenn man nur die Reihe lang genug fortsetzt.

Allerdings muss man für grössere Werte T sehr viele Glieder nehmen, um nur überhaupt an den Anfang der Konvergenz zu gelangen, doch genügt uns hier die theoretische Möglichkeit der Rechnung nach der Reihe (3).

Im übrigen verweisen wir hiezu auf *Brünnow*, „Lehrbuch der sphärischen Astronomie," 3. Ausgabe S. 34.

Aus (1) und (3) haben wir nun die Wahrscheinlichkeit W, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt:

$$(W)_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(ah - \frac{(ah)^3}{3.1!} + \frac{(ah)^5}{5.2!} - \frac{(ah)^7}{7.3!} + \frac{(ah)^9}{9.4!} - \cdots \right) \tag{4}$$

Z. B. mit $ah = 0{,}1$ erhält man damit:

$$(W)_a = 1{,}12838\,(0{,}100000 - 0{,}000333 + 0{,}000001) = 0{,}112\,463$$

Folgende kleine Tafel giebt einige Hauptwerte der Funktion $(W)_a$:

Wahrscheinlichkeit $(W)_a$ dass ein Fehler zwischen den Grenzen 0 und ah liegt (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von a).

$ah = T$	$(W)_a$	diff.	$ah = T$	$(W)_a$	diff.	$ah = T$	$(W)_a$	diff.
0,0	0,00000		0,7	0,67780		1,4	0,95229	
		+ 11246			+ 6430			+ 1382
0,1	0,11246		0,8	0,74210		1,5	0,96611	
		+ 11024			+ 5481			+ 1024
0,2	0,22270		0,9	0,79691		1,6	0,97635	
		+ 10593			+ 4579			+ 744
0,3	0,32863		1,0	0,84270		1,7	0,98379	
		+ 9976			+ 3750			+ 530
0,4	0,42839		1,1	0,88020		1,8	0,98909	
		+ 9211			+ 3011			+ 370
0,5	0,52050		1,2	0,91031		1,9	0,99279	
		+ 8336			+ 2370			+ 253
0,6	0,60386		1,3	0,93401		2,0	0,99532	
		+ 7394			+ 1828			+ 468
0,7	0,67780		1,4	0,95229	.	∞	1,00000	

Eine ausführlichere Tafel dieser Art ist von *Encke* im „Berliner astron. Jahrbuch" für 1834, S. 305—308, Tafel I. veröffentlicht worden. Unsere oben zusammengestellten 20 Werte sind ein Auszug aus dieser *Encke*schen Tafel.

§ 88. Der wahrscheinliche Fehler.

Derjenige Wert a, für welchen die im vorigen § 87. bestimmte Wahrscheinlichkeit $(W)_a = \frac{1}{2}$ ist, heisst der „*wahrscheinliche Fehler*"; bezeichnen wir ihn mit r, so ist also nach (1) § 87. S. 267:

$$(W) r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{rh} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Der hierdurch bestimmte Wert r des wahrscheinlichen Fehlers ist der Grenzwert, *unter* welchem sich ebenso viele kleinere Fehler befinden, als grössere *über* ihm; man kann deswegen, bei einer einzelnen Beobachtung, 1 gegen 1 wetten, dass der Fehler derselben nicht grösser als r sei.

Zur Auflösung der Gleichung (1) nach rh kann man die Reihe (3) oder (4) § 87. S. 267, oder noch bequemer eine hiernach berechnete Tafel benutzen.

Da nach der kleinen Tafel am Schluss des vorigen § 87. (s. oben) für $ah = 0{,}4$, der Wert $(W) = 0{,}42839$ und für $ah = 0{,}5$ der Wert $(W) = 0{,}52050$ ist, so muss rh, welchem der Wert $(W) = 0{,}50000$ entsprechen soll, zwischen 0,4 und 0,5 liegen; und zwar giebt die einfache Interpolation (ohne Rücksicht auf zweite Differenzen) den Wert $rh = 0{,}478$. Eine genauere Berechnung giebt (nach *Gauss*, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von *Lindenau* und *Bohnenberger*, Tübingen 1816, S. 194) den Wert $rh = 0{,}476\,9363$. Dieser Zahlenwert möge ein für allemal mit ϱ bezeichnet werden; es ist also:

$$rh = \varrho = 0{,}476\,9363 \qquad log\,\varrho = 9.678\,4603{\cdot}8 \qquad (2)$$

Durch diese Gleichung (2) wird auch die Bedeutung der Konstanten h sachlich näher erklärt; schreibt man die Auflösung für h:

$$h = \frac{\varrho}{r} \tag{2a}$$

so sieht man, dass h umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler r ist; man nennt deswegen h die *Genauigkeitszahl*. Setzt man $h = 1$, so wird $r = \varrho$, d. h. es ist ϱ der wahrscheinliche Fehler für die Genauigkeitszahl 1.

Durch Einführung von ϱ an Stelle von h in *die Reihe* (4) § 87. S. 267, kann man dieselbe auf eine mehr anschauliche Form bringen. Es wird damit:

$$(W)_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{r}\varrho - \frac{1}{3.1!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^3 + \frac{1}{5.2!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^5 - \frac{1}{7.3!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^7 + \frac{1}{9.4!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^9 - \ldots\right) \tag{3}$$

Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ irgend eines Fehlers a zum wahrscheinlichen Fehler r bezeichnen wir mit n, und entsprechend nennen wir nun $(W)_{nr}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen 0 und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt, damit nimmt (3) folgende Form an:

$$(W)_{nr} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(n\varrho - \frac{(n\varrho)^3}{3.1!} + \frac{(n\varrho)^5}{5.2!} - \frac{(n\varrho)^7}{7.3!} + \frac{(n\varrho)^9}{9.4!} - \frac{(n\varrho)^{11}}{11.5!} + \ldots\right) \tag{4}$$

oder mit Ausrechnung der Coëfficienten:

$$\begin{aligned}(W)_{nr} = {} & 0{,}538\,1650\,n - 0{,}040\,8051\,n^3 + 0{,}002\,7846\,n^5 \\ & - 0{,}000\,1508\,n^7 + 0{,}000\,0067\,n^9 - 0{,}000\,0002\,n^{11} + \ldots\end{aligned} \tag{5}$$

Man kann diese Formel sehr einfach kontrolieren, denn mit $n = 1$ muss sie den Wert 0,5 geben, was bis auf 7 Decimalstellen hinreichend der Fall ist.

Folgendes sind die Coëfficienten-Logarithmen für die Formel (5):

$$\left.\begin{aligned}&[9.730\,9154]\,n - [8.610\,7149]\,n^3 + [7.444\,7570]\,n^5 \\ &- [6.178\,428]\,n^7 + [4.824\,14]\,n^9 - [3.3949]\,n^{11}\end{aligned}\right\} \tag{5a}$$

Im Anhang S. [10] haben wir eine Tafel der Funktionswerte (5) zusammengestellt, d. h. der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen Null und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt. Diese Tafel ist aus der Tafel II von *Encke* im Berl. astr. Jahrb. 1834, S. 309—312 mit Weglassung der 5ten Decimale gebildet. Ein Teil der Tafelwerte wurde direkt nach den Formeln (4) und (5) nachgerechnet, und einzelne Werte nach der *Bessel*schen Originaltafel in dem Werk *fundamenta astronomiae* S. 36 und 37 bestimmt.

Zur Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer Reihe wahrer Beobachtungsfehler giebt die Definition des wahrscheinlichen Fehlers bereits einen Anhalt:

Hat man sich eine grössere Zahl gleichartiger wahrer Beobachtungsfehler auf irgend welche Art verschafft, und ordnet dieselben nach ihrer absoluten Grösse, so kann man denjenigen Grenzwert als wahrscheinlichen Fehler nehmen, welcher die Fehlerreihe so teilt, dass die Werte der einen Hälfte kleiner und die der anderen Hälfte grösser als er sind. Bei einer ungeraden Zahl von Fehlern nimmt man den in die Mitte fallenden Fehler und bei einer geraden Anzahl das Mittel der beiden in die Mitte fallenden Fehler als wahrscheinlichen Fehler. Wenn man z. B. die schon mehrfach benützten 18 Werte v von § 7. S. 17 nach ihrer Grösse ordnet, wie auf S. 262 geschehen ist, so hat man:

Erste Hälfte			Mitte	Zweite Hälfte		
...	0,83	1,12	|	1,13	1,17	...

Die zwei in der Mitte liegenden Fehler sind 1,12 und 1,13, man nimmt also nach der gegebenen Regel 1,125 als wahrscheinlichen Fehler.

Offenbar ist diese Bestimmung eine sehr unsichere, denn es kommt dabei die absolute Grösse aller andern als gerade der in der Mitte liegenden Fehler nicht in Betracht. Eine bessere Bestimmung werden wir im folgenden § 89. kennen lernen.

§ 89. Wahrscheinlicher Fehler und mittlerer Fehler.

Eine Beziehung zwischen dem wahrscheinlichen Fehler und dem uns schon bekannten mittleren Fehler erhält man durch folgende Betrachtung:

Bei einer Beobachtungsart, welche die Genauigkeit h hat, sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Fehler $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots$ entstehen, bzw. die folgenden:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_1^2} d\Delta \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_2^2} d\Delta \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta_3^2} d\Delta \quad \text{u. s. w.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, diese sämtlichen Fehler $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots$ bei einer Beobachtungsreihe zusammen zu erhalten, ist nach § 84. II. S. 261 das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten. Diese Wahrscheinlichkeit ist also bei n Beobachtungen proportional dem Ausdruck:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\Delta\Delta]} \tag{1}$$

Man hat nun nach § 84. III. S. 261 anzunehmen, dass eine solche Beobachtungsart bei der Erzeugung eines Fehlersystems $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \ldots$ vorgelegen hat, welche mit grösster Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystem erzeugt; oder es muss angenommen werden, dass die Beobachtungen eine solche Genauigkeit h hatten, für welche der Ausdruck (1) ein Maximum wird, und man bestimmt h aus der Gleichung:

$$\frac{dW}{dh} = 0$$

Die Ausführung dieser Differentiierung der Funktion (1) giebt, mit Weglassung des konstanten Nenners:

$$0 = \frac{d\left(h^n e^{-h^2[\Delta\Delta]}\right)}{dh} = n\,h^{n-1} e^{-h^2[\Delta\Delta]} + h^n e^{-h^2[\Delta\Delta]}\left(-2h[\Delta\Delta]\right)$$

$$0 = h^{n-1} e^{-h^2[\Delta\Delta]} \left\{n - 2h^2[\Delta\Delta]\right\}$$

Der zweite Faktor = Null gesetzt, giebt:

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{1}{2h^2} \tag{2}$$

Da aber allgemein nach (2a) § 88. S. 269 die Gleichung gilt:

$$r\,h = \varrho, \tag{2a}$$

so hat man das Resultat:

$$r = (\varrho\sqrt{2})\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{3}$$

Der hier zum Vorschein kommende Wurzelwert ist nichts anderes, als der uns schon längst bekannte mittlere Fehler m, es ist also:

$$r = (\varrho\sqrt{2})\,m \tag{4}$$

wobei $\varrho\sqrt{2}$ ein konstanter Faktor ist, nämlich nach (2) § 88. S. 268:

$$\varrho\sqrt{2} = 0{,}674\,4898 \qquad \log \varrho\sqrt{2} = 9.828\,9754-10 \tag{5}$$

Wir heben hervor, dass die vorstehende Betrachtung nicht an die Bedingung einer sehr grossen Zahl von Beobachtungsfehlern $\varDelta$ geknüpft ist, sondern für jeden endlichen Wert von n gilt. Nimmt man $n = 1$, so giebt die Gleichung (3):

$$r = (\varrho\sqrt{2})\,\varDelta$$

wo $\varDelta$ der einzige vorhandene wahre Beobachtungsfehler ist. Wenn also nur *ein* wahrer Beobachtungsfehler vorliegt, so muss man annehmen, dass er der *mittlere* Fehler ist (und nicht etwa der wahrscheinliche Fehler, wie man vielleicht vermuten könnte).

Aus (2a) und (4) erhält man auch eine Beziehung zwischen dem mittleren Fehler m und der Genauigkeit h, nämlich:

$$m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \tag{6}$$

Die Anwendung der Formel (4) auf das Beispiel von § 7. S. 17 giebt, da der mittlere Fehler $m = 1{,}66''$ bereits berechnet ist, nun:

$$r = 0{,}67449 \times 1{,}66'' = 1{,}12''$$

was mit dem am Schluss des vorigen § 88. S. 269 auf anderem Wege ermittelten Wert 1,125 zufälligerweise sehr nahe übereinstimmt.

Damit man die Fehlerwahrscheinlichkeiten, welche wir in der Tafel auf S. [10] des Anhangs auf wahrscheinliche Fehler bezogen haben, nun auch unmittelbar auf mittlere Fehler beziehen kann, wollen wir die Reihe (3) § 88. S. 269 entsprechend umformen, und eine neue Tabelle danach berechnen. Setzt man daselbst $r = (\varrho\sqrt{2})\,m$, so wird:

$$\frac{a}{r}\,\varrho = \frac{a}{m}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit:

$$(W)_a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{a}{m}\right)^5 - \frac{1}{336}\left(\frac{a}{m}\right)^7 + \frac{1}{3456}\left(\frac{a}{m}\right)^9 - \ldots\right) \tag{7}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen Null und $\pm a$ liegt, wobei m der mittlere Fehler ist, und da in der Funktion nur das Verhältnis $\frac{a}{m}$ vorkommt, haben wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen Null und dem $\pm \frac{a}{m}$ fachen mittleren Fehler liegt. Die Ausrechnung der Coëfficienten giebt:

$$(W)_a = 0{,}797\,8846\left(\frac{a}{m}\right) - 0{,}132\,981\left(\frac{a}{m}\right)^3 + 0{,}019\,947\left(\frac{a}{m}\right)^5 - 0{,}002\,375\left(\frac{a}{m}\right)^7$$
$$+ 0{,}000\,231\left(\frac{a}{m}\right)^9 - 0{,}000\,019\left(\frac{a}{m}\right)^{11} \tag{8}$$

Die Coëfficienten-Logarithmen sind:

1.	3.	5.	7.	9.	11.
9.901 9400·6	9.123 7888	8.299 880	7.37560	6.3634	5.276

Wenn man die Funktion (7) bzw. (8) für verschiedene Werte von $\frac{a}{m}$ ausrechnet, so bekommt man dasselbe, was die Tafel auf S. [10] des Anhangs giebt mit dem Argument $\frac{a}{r} = n = \frac{m}{r}\,\frac{a}{m} = 1{,}48260\,\frac{a}{m}$. Teils durch solche Benützung der Tafel S. [10] (bzw. der *Encke*schen Tafel II, Berl. astr. Jahrb. 1834, S. 309—312), teils durch wirkliches Ausrechnen nach (8) (für $\frac{a}{m}$ kleiner als 1,0) haben wir folgendes erhalten:

$\frac{a}{m}$	$\frac{a}{r}$	$(W)_a$
0,0	0,00000	0,0000
0,1	0,14826	0,0797
0,2	0,29652	0,1585
0,3	0,44478	0,2358
0,4	0,59304	0,3109
0,5	0,74130	0,3829
0,6	0,88956	0,4515
0,7	1,03782	0,5161
0,8	1,18608	0,5763
0,9	1,33434	0,6319
1,0	1,48260	0,6827
1,5	2,22390	0,8664
2,0	2,96520	0,9545
2,5	3,70650	0,9889
3,0	4,44780	0,9973
3,5	5,18910	0,9995
4,0	5,93040	0,9999
∞	∞	1,0000

(9)

Hiernach ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler unterhalb des 2fachen mittleren Fehlers fällt, gleich 0,9545, oder es ist anzunehmen, dass von 10 000 Fehlern 9545 unter dem 2fachen mittleren Fehler, und nur 455 über demselben liegen.

§ 90. Der durchschnittliche Fehler.

Wir haben schon zu Anfang unserer Fehlerbetrachtungen in § 3. S. 6 den durchschnittlichen Fehler, d. h. das arithmetische Mittel aller Fehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, als erstes Genauigkeitsmass kennen gelernt, ohne jedoch weitere Anwendungen davon machen zu können.

Jetzt sind wir im Stande, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion den durchschnittlichen Fehler auch theoretisch zu bestimmen, und dadurch mit dem mittleren und mit dem wahrscheinlichen Fehler vergleichbar zu machen. Wir setzen:

$$\frac{[\pm \Delta]}{n} = t \tag{1}$$

wobei $[\pm \Delta]$ die absolute Summe von n wahren Beobachtungsfehlern bedeuten soll, d. h. die Summe ohne Rücksicht auf die Vorzeichen $\pm$.

Man hat die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta$$

Der Fehler Δ wird daher unter n Fällen $(n W)$ mal vorkommen, und die Summe dieser n Fehler Δ ist:

$$(n W) \Delta$$

Diese Summierung erstreckt sich nur auf die Fehler von der Grösse Δ.

Die Summe aller positiven Fehler überhaupt ist:

$$\int_0^{+\infty} (n W) \Delta \, d \Delta = \int_0^{+\infty} n \Delta \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d \Delta \tag{2}$$

Ebenso gross ist, absolut genommen, die Summe aller negativen Fehler, also die absolute Gesamtsumme:

$$[\pm \Delta] = \frac{2 n h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \Delta e^{-h^2 \Delta^2} d \Delta \tag{3}$$

Setzt man $h \Delta = x$, so wird:

$$t = \frac{[\pm \Delta]}{n} = \frac{2 h}{h^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2} d x \tag{4}$$

Das allgemeine Integral ist:

$$\int x e^{-x^2} d x = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \tag{5}$$

Die obere Grenze ∞ giebt hiefür 0, die untere Grenze 0 giebt $-\frac{1}{2}$, also:

$$t = \frac{[\pm \Delta]}{n} = \frac{1}{h \sqrt{\pi}} \tag{6}$$

Nach früherem, (2) § 88. S. 268 ist $r h = \varrho$, was in Verbindung mit dem Vorigen giebt:

$$r = (\varrho \sqrt{\pi}) \, t = (\varrho \sqrt{\pi}) \frac{[\pm \Delta]}{n} \tag{7}$$

Der konstante Faktor ist hiebei:

$$\varrho \sqrt{\pi} = 0{,}845\,3476 \qquad (\log \varrho \sqrt{\pi} = 9.927\,0353 - 10) \tag{8}$$

Die Formel (7) hat insofern praktischen Wert, als sich der durchschnittliche Fehler bequemer berechnen lässt, als der mittlere Fehler, allein diese Formel (7) hat den Nachteil, dass sie nur bei sehr grosser Zahl n der verfügbaren Fehler Berechtigung hat, weil eine endliche Summe $[\pm \Delta]$ einem Integral zwischen den Grenzen 0 und ∞ gleich gesetzt wurde.

Auch abgesehen hievon hat die Formel (7) noch einen Nachteil im Vergleich mit der auf die Quadratsumme gegründeten Formel (3) § 89. S. 270, worüber in § 93. verhandelt werden wird.

Dagegen ist eine andere auf die Formel (7) bezügliche Frage sogleich zu erledigen, nämlich, in welcher Weise der durchschnittliche Fehler berechnet werden soll, wenn nicht die wahren Beobachtungsfehler Δ, sondern nur die wahrscheinlichsten Fehler v vorliegen. Beim mittleren Fehler haben wir auf zwei verschiedenen Wegen (§ 7. S. 16, und § 11. S. 31) die Beziehung gefunden:

$$\frac{[\Delta \Delta]}{n} = \frac{[v v]}{n-1} \tag{9}$$

Indem man nun annimmt, dass die v demselben Fehlergesetz folgen wie die Δ, muss man schliessen, dass die einzelnen Δ^2 durchschnittlich im Verhältnis $n : (n-1)$ grösser sind als die entsprechenden v^2, oder dass die einzelnen Δ durchschnittlich

grösser sind als die entsprechenden v im Verhältnis $\sqrt{n}:\sqrt{n-1}$, folglich kann man weiter schliessen:

$$[\pm\varDelta]:[\pm v]=\sqrt{n}:\sqrt{n-1} \tag{10}$$

oder:

$$\frac{[\pm\varDelta]}{n}=\frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

folglich der durchschnittliche Fehler:

$$t=\frac{[\pm\varDelta]}{n}=\frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{11}$$

§ 91. Beziehungen zwischen dem wahrscheinlichen, mittleren und durchschnittlichen Fehler.

Nachdem in § 89. der wahrscheinliche und der mittlere Fehler, und in § 90. der wahrscheinliche und der durchschnittliche Fehler zu einander in Beziehung gesetzt sind, können wir die gegenseitigen Beziehungen aller dieser 3 Fehler unter sich bilden.

Es gelten die Bezeichnungen:

Mittlerer Fehler $= m$
Wahrscheinlicher Fehler $= r$
Durchschnittlicher Fehler $= t$.

Wenn man unter v die Differenzen zwischen n gleichartigen Beobachtungen einer Unbekannten und ihrem arithmetischen Mittel versteht, so ist:

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad t=\frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{1}$$

Zur gegenseitigen Verwandlung von m, r und t hat man die Zahlenwerte:

$$\left.\begin{array}{lll}
 & \varrho = 0{,}476\,9363 & \log\varrho = 9.678\,4603{\cdot}8 \\
r=(\varrho\sqrt{2})\,m & = 0{,}674\,4898\,m & \log = 9.828\,9753{\cdot}8 \\
r=(\varrho\sqrt{\pi})\,t & = 0{,}845\,3476\,t & \log = 9.927\,0353{\cdot}1 \\
 & m = 1{,}482\,6021\,r & \log = 0.171\,0246{\cdot}2 \\
 & m = 1{,}253\,3141\,t & \log = 0.098\,0599{\cdot}4 \\
 & t = 0{,}797\,8846\,m & \log = 9.901\,9400{\cdot}6 \\
 & t = 1{,}182\,9372\,r & \log = 0.072\,9616{\cdot}9
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Dabei ist $\varrho = 0{,}476\,9363$ zu Grunde gelegt nach *Gauss* „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen“ Art. 1 (s. o. § 88. S. 286).

Wir werden im Folgenden unsere Betrachtungen immer unmittelbar auf *mittlere* Fehler und nicht auf *wahrscheinliche* Fehler gründen, nach Anweisung von *Gauss* selbst, welcher in dem „Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Schumacher*“ I. S. 435 sagt: „Die sogenannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich, als von Hypothese abhängig, ganz proscribiert; man mag sie aber berechnen, indem man die mittleren mit 0,674 4897 multipliziert.“

Alles Bisherige gilt nur für *eine* Unbekannte.

Wenn es sich um Fehlerberechnung bei Ausgleichung mit mehreren Unbekannten handelt, sei es nach vermittelnden, sei es nach bedingten Beobachtungen, so haben

wir hiezu in § 27. und § 39. Formeln für die mittleren Fehler aufgestellt, welche die Ausrechnung der Quadratsummen $[vv]$ verlangen.

Nun ist es aber in manchen Fällen, z. B. bei der summarischen Untersuchung von Triangulierungsfehlern u. s. w., angenehm, auch die absoluten Summen $[\pm v]$ zur Genauigkeitsuntersuchung benützen zu können.

Bei vermittelnden Beobachtungen von n Elementen mit u Unbekannten haben wir den mittleren Fehler m nach (19) § 27. S. 68:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \tag{3}$$

während für wahre Fehler $\varDelta$ gelten würde:

$$m = \sqrt{\frac{[\varDelta\varDelta]}{n}} \tag{4}$$

Man macht deswegen, ähnlich wie bei (10) des vorigen § 90. S. 274 die Annahme, dass die einzelnen $\varDelta$ und v das Verhältnis haben:

$$\varDelta : v = \sqrt{n} : \sqrt{n-u} \tag{5}$$

also auch: $[\pm\varDelta] : [\pm v] = \sqrt{n} : \sqrt{n-u}$

folglich ist der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm\varDelta]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-u)}} \tag{6}$$

also auch der mittlere Fehler:

$$m = (\varrho\sqrt{\pi})\,t = 1{,}2533\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-u)}} \tag{7}$$

Übergehend zu bedingten Beobachtungen haben wir nach (8) § 37. S. 96:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-(n-r)}} = \sqrt{\frac{[vv]}{r}} \tag{8}$$

wo n die Anzahl der Beobachtungen und r die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist.

Nun ist $(n-r)$ in (8) nichts anderes als die Zahl der unabhängigen Unbekannten u in (3), oder es ist in (7) zu setzen: $u = n - r$, $n - u = n - (n - r) = r$, d. h. die Gleichung (7) giebt für den Fall von n Unbekannten mit r Bedingungsgleichungen:

$$m = 1{,}2533\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{nr}} \tag{9}$$

Nehmen wir beispielsweise die Richtungsausgleichung von § 74., so haben wir daselbst bei (10) S. 219 folgende 12 übrig bleibende Fehler v:

$+0{,}22''$ $+0{,}15''$ $-0{,}37''$ $+0{,}14''$ $+0{,}19''$ $-0{,}33''$ $+0{,}23''$ $+0{,}20''$
$-0{,}43''$ $+0{,}21''$ $+0{,}12''$ $-0{,}33''$

Die absolute Summe ist $[\pm v] = 2{,}92''$ und da die Zahl der Bedingungsgleichungen $r = 4$ war, hat man nach (9):

$$m = 1{,}2533\,\frac{2{,}92''}{\sqrt{12 \times 4}} = \pm\,0{,}53'' \tag{10}$$

was mit dem genaueren Wert $m = \pm\,0{,}45''$ bei (15) S. 220 nahe stimmt.

Anmerkungen.

Die Formel (11) § 90. $t = \dfrac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}}$ wurde zuerst von *Peters* im 44. Band der „Astr. Nachrichten" S. 29 (1856) aufgestellt.

Die erweiterte Formel (7) § 91. $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-u)}}$ wurde von *Lüroth* im 73. Bd. S. 187 der „Astr. Nachrichten" gegeben.

Helmert hat diese Sache genauer behandelt in „Astr. Nachr." 85. Band (1875) S. 353—366 und 88. Band (1876) S. 113—132, und hat dabei gefunden, dass nur die *Peters*sche Formel (11) für *eine* Unbekannte streng richtig ist, während die Formel (7) für u Unbekannte, mit dem Nenner $\sqrt{n(n-u)}$ nur etwa als eine Näherungsformel zu betrachten ist.

Hier sind noch zwei Abhandlungen von *Helmert* zu zitieren in „*Schlömilchs* „Zeitschr. f. M. u. Ph." 1875 S. 300—303: „Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler" und 1876 S. 192 bis 218: „Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen".

§ 92. Verschiedene Fehler-Potenzsummen.

Nachdem in § 89. die Quadratsumme $[\Delta\Delta]$ der Fehler, und in § 90. die absolute Summe $[\pm\Delta]$ der ersten Potenzen zur Genauigkeitsuntersuchung benützt worden ist, kann die Frage aufgeworfen werden, ob nicht auch die Summen der 3ten, 4ten u. s. w. Potenzen in ähnlicher Weise benützt werden können?

Gauss hat in der Abhandlung „Über die Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" (vgl. *Encke* „Berl. Jahrb. 1834" S. 288—293) diese Frage erschöpfend behandelt. Wir wollen hier nur die Summe $[\Delta^4]$ bestimmen, weil dieses eine Beispiel zur Darlegung des allgemeinen Verfahrens genügt, und weil wir gerade die Summe $[\Delta^4]$ im nächsten § 93. noch besonders nötig haben.

Nach dem Vorgang von $[\pm\Delta]$ in (3) § 90. S. 273 haben wir:

$$[\Delta^4] = \frac{2\,n\,h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \Delta^4 e^{-\Delta^2} d\Delta \quad , \quad \text{oder mit } h\Delta = x:$$

$$\frac{[\Delta^4]}{n} = \frac{2}{h^4\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx \quad . \tag{1}$$

Durch teilweises Integrieren findet man (vgl. oben (5) S. 273):

$$J_4 = \int x^4 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^3 e^{-x^2} + \frac{3}{2}\int x^2 e^{-x^2} dx \tag{2}$$

$$J_2 = \int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2} dx \tag{3}$$

Führt man die Grenzen ein, so geben $x^3 e^{-x^2}$ und $x e^{-x^2}$ beide den Wert 0, denn es ist nach (2) § 87. S. 267:

$$x e^{-x^2} = \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots}$$

Setzt man $x = \infty$, so überwiegt der Nenner mit seinen höheren Potenzen, und der ganze Ausdruck wird $= 0$; ebenso giebt $x = 0$ auch den Bruch $= 0$.

Von (9) § 86. S. 266 wissen wir:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} d\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{4}$$

Wenn man also jetzt in (3) (2) und (1) die Grenzen einsetzt, so wird:

$$J_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}$$

$$J_4 = \frac{3}{2}\,J_2 = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\frac{[\varDelta^4]}{n} = \frac{2}{h^4\sqrt{\pi}}\,\frac{3}{8}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4\,h^4} \tag{5}$$

Wir haben nun die Durchschnittswerte der 1ten, 2ten und 4ten Potenzen gefunden, nämlich mit Zuziehung von (6) § 90. S. 273, (2) § 89. S. 270 zusammen:

$$\frac{[\pm\varDelta]}{n} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\ ,\quad \frac{[\varDelta\,\varDelta]}{n} = \frac{1}{2\,h^2}\ ,\quad \frac{[\varDelta^4]}{n} = \frac{3}{4\,h^4} \tag{6}$$

In gleicher Weise kann man alle Potenzsummen auswerten, denn eine allmähliche Rekursion wie bei (2) und (3) führt bei geraden Potenzen auf das Integral (4), und bei ungeraden Potenzen auf das leicht anzugebende Integral (5) § 90. S. 273; man kann also alle beliebigen Potenzsummen allmählich auf $[\varDelta\,\varDelta]$ oder $[\pm\varDelta]$ zurückführen.

Die allgemeine Rekursionsformel ist:

$$\frac{[\varDelta^{p+2}]}{n} = \frac{p+1}{2\,h^2}\,\frac{[\varDelta^p]}{n}$$

Der allgemeine Ausdruck für die p^{ten} Potenzen wird:

wenn p ungerade:	wenn p gerade:
$\frac{[\pm\varDelta^p]}{n} = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,\frac{p-1}{2}}{h^p}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{[\varDelta^p]}{n} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(p-1)}{(h\sqrt{2})^p}$

Diese Andeutungen mögen hier genügen; im übrigen verweisen wir auf die schon am Anfang dieses § 92. zitierten Originale von *Gauss* und *Encke*.

§ 93. Wahrscheinlicher Fehler des wahrscheinlichen Fehlers.

Wir haben zwei Methoden zur Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers kennen gelernt, nämlich nach (7) § 90. S. 273 und nach (4) § 89. S. 270:

$$r_1 = (\varrho\sqrt{\pi})\,t \qquad \text{wo} \qquad t = \frac{[\pm\varDelta]}{n} \tag{1}$$

$$r_2 = (\varrho\sqrt{2})\,m \qquad \text{wo} \qquad m^2 = \frac{[\varDelta^2]}{n} \tag{2}$$

dabei ist n die Anzahl der wahren Fehler $\varDelta$.

Die Bestimmung (2) aus den Quadraten ist die bessere, weil der direkte Weg des Differentiierens nach h auf diese Formel geführt hat (§ 89. S. 270), und weil die Anzahl n hier ganz beliebig sein kann, während bei der Entwicklung von (1) die Annahme einer sehr grossen Zahl von Fehlern gemacht werden musste, indem die endliche Summe $[\pm\varDelta]$ einem Integral zwischen den Grenzen Null und Unendlich gleich gesetzt wurde.

Unabhängig hievon wird die Zuverlässigkeit einer Bestimmung von r von der Anzahl n der verfügbaren Fehler insofern abhängen, als bei grosser Anzahl n die Bestimmung zuverlässiger sein wird, als bei kleiner Anzahl n.

Da die Werte t und m^2 nach (1) und (2) arithmetische Mittel sind, kann man die im vorstehenden betrachteten Verhältnisse nach den Sätzen über das arithmetische Mittel behandeln.

Wir betrachten zuerst den durchschnittlichen Fehler:

$$t = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots \Delta_n}{n} = \frac{[\pm \Delta]}{n} \tag{3}$$

wo die Δ_1 Δ_2 Δ_3 .. und $[\pm \Delta]$ nur absolut zu nehmen sind. Insofern t ein arithmetisches Mittel aus n Einzelwerten Δ ist, kann man den mittleren Fehler μ_t von t nach den Sätzen über das einfache arithmetische Mittel berechnen, nämlich nach (12) § 7. S. 16:

$$(\mu_t)^2 = \frac{(t - \Delta_1)^2 + (t - \Delta_2)^2 + (t - \Delta_3)^2 + \ldots}{n\,(n-1)} \tag{4}$$

Im Zähler sind n Elemente vorhanden, also, wenn man entwickelt:

$$(\mu_t)^2 = \frac{n\,t^2 - 2\,t\,[\Delta] + [\Delta^2]}{n\,(n-1)} = \frac{t^2}{n-1}\left\{1 - \frac{2\,[\Delta]}{n\,t} + \frac{[\Delta^2]}{n\,t^2}\right\} \tag{5}$$

Die hier auftretende Summe $[\Delta]$ ist dieselbe, welche in (3) mit $[\pm \Delta]$ bezeichnet ist, weil alle Δ nur positiv zählen; die vorstehende Gleichung (5) giebt daher wegen (1) und (2):

$$(\mu_t)^2 = \frac{t^2}{n-1}\left\{1 - 2\,\frac{t}{t} + \frac{m^2}{t^2}\right\} = \frac{t^2}{n-1}\left\{\frac{m^2}{t^2} - 1\right\}$$

Das Verhältnis $m:t$ ist ferner nach (1) und (2), insofern $r_1 = r_2$ ist:

$$\frac{m}{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

also

$$(\mu_t)^2 = \frac{t^2}{n-1}\left\{\frac{\pi}{2} - 1\right\} = \frac{t^2}{2\,(n-1)}\left\{\pi - 2\right\}$$

$$(\mu_t) = \frac{t}{\sqrt{2\,(n-1)}}\sqrt{\pi - 2} \tag{6}$$

Dieses ist der mittlere Fehler von t, also der wahrscheinliche Fehler von t:

$$r_t = (\varrho\sqrt{2})\,\mu_t = \frac{\varrho\,t}{\sqrt{(n-1)}}\sqrt{\pi - 2} \tag{7}$$

und der wahrscheinliche Fehler von r, da $r = (\varrho\sqrt{\pi})\,t$ ist:

$$r_r = (\varrho\sqrt{\pi})\,r_t = \varrho\sqrt{\pi}\,\frac{\varrho\,t}{\sqrt{(n-1)}}\sqrt{\pi - 2} \tag{8}$$

Also der wahrscheinliche Fehler r mit seinem $\pm$ wahrscheinlichen Fehler:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= (\varrho\sqrt{\pi})\,t \pm (\varrho\sqrt{\pi})\,t\,\frac{\varrho}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\pi - 2} \\ r_1 &= (\varrho\sqrt{\pi})\,t\left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\pi - 2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Das Zeichen r_1 statt r soll denjenigen Wert r bedeuten, welcher aus den ersten Potenzen gewonnen ist.

In gleicher Weise behandeln wir auch die Bestimmung von r aus der Quadratsumme. Man hat:

$$m^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots \Delta_n^2}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} \tag{10}$$

Das mittlere Fehlerquadrat von m^2 wird:

$$(\mu_{m^2})^2 = \frac{(m^2 - \Delta_1^2)^2 + (m^2 - \Delta_2^2) + (m^2 - \Delta_3^2)^2 + \ldots}{n(n-1)}$$

$$= \frac{n\,m^4 - 2\,m^2\,[\Delta^2] + [\Delta^4]}{n(n-1)} = \frac{m^4}{n-1}\left\{1 - \frac{2\,[\Delta^2]}{n\,m^2} + \frac{[\Delta^4]}{n m^4}\right\}$$

Mit Wiederbenützung von (10):

$$(\mu_{m^2})^2 = \frac{m^4}{n-1}\left\{\frac{[\Delta]^4}{n\,m^4} - 1\right\} \tag{11}$$

Nach (6) § 92. S. 277 ist:

$$\frac{[\Delta^4]}{n} = \frac{3}{4h^4} \qquad \text{und} \qquad m^4 = \left(\frac{[\Delta^2]}{n}\right)^2 = \frac{1}{4h^4}$$

Dieses in (11) gesetzt giebt:

$$(\mu_{m^2})^2 = \frac{m^4}{n-1}\left\{3 - 1\right\}$$

$$\mu_{m^2} = \frac{m^2}{\sqrt{n-1}}\sqrt{2}$$

Dieses ist der mittlere Fehler von m^2, also der wahrscheinliche Fehler von m^2:

$$r_{m^2} = (\varrho\sqrt{2})\frac{m^2}{\sqrt{n-1}}\sqrt{2} = m^2\,\frac{2\,\varrho}{\sqrt{n-1}}$$

und der wahrscheinliche Fehler von r^2, da $r = (\varrho\sqrt{2})\,m$ ist:

$$r_{r^2} = (\varrho\sqrt{2})^2\,m^2\,\frac{2\,\varrho}{\sqrt{n-1}}$$

folglich r^2 mit seinem $\pm$ wahrscheinlichen Fehler:

$$(r_2)^2 = (\varrho\sqrt{2}\;m)^2 \pm (\varrho\sqrt{2})^2\,m^2\frac{2\,\varrho}{\sqrt{n-1}} = (\varrho\sqrt{2}\,m)^2\left\{1 \pm \frac{2\,\varrho}{\sqrt{n-1}}\right\}$$

$$r_2 = (\varrho\sqrt{2})\,m\left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{n-1}}\right\} \tag{12}$$

In (9) und (12) haben wir nun die beiden Bestimmungen des wahrscheinlichen Fehlers r_1 und r_2 aus den ersten und aus den zweiten Fehlerpotenzen mit ihren wahrscheinlichen Fehlern, und wenn man hier den Zahlenwert $\varrho = 0{,}476\,9363$ einsetzt und die Coëfficienten ausrechnet, so findet man:

$$r_1 = 0{,}845\,3476\,\frac{[\pm\Delta]}{n}\left(1 \pm \frac{0{,}509\,5841}{\sqrt{n-1}}\right) \tag{13}$$

$$r_2 = 0{,}674\,4897\sqrt{\frac{[\Delta\,\Delta]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{,}476\,9363}{\sqrt{n-1}}\right) \tag{14}$$

Die Bestimmung r_2 aus den Quadraten hat also einen kleineren wahrscheinlichen Fehler als die Bestimmung r_1 aus den ersten Potenzen.

Die Fortsetzung dieser Untersuchung auf höhere Potenzen, welche keine praktische Bedeutung mehr haben, giebt folgendes:

$$r_3 = 0{,}57719 \sqrt[3]{\frac{[\pm \Delta^3]}{n}} \left\{1 \pm \frac{0{,}49720}{\sqrt{n-1}}\right\}$$

$$r_4 = 0{,}51250 \sqrt[4]{\frac{[\Delta^4]}{n}} \left\{1 \pm \frac{0{,}55072}{\sqrt{n-1}}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_9 = 0{,}35704 \sqrt[9]{\frac{[\pm \Delta^9]}{n}} \left\{1 \pm \frac{1{,}44391}{\sqrt{n-1}}\right\}$$

$$r_{10} = 0{,}33996 \sqrt[10]{\frac{[\Delta^{10}]}{n}} \left\{1 \pm \frac{1{,}82506}{\sqrt{n-1}}\right\}$$

Eine Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus den 10ten Potenzen der Fehler würde also im Verhältnis 1,825 : 0,477 oder nahezu 4 : 1 ungünstiger sein, als die günstigste Bestimmung aus den Quadraten.

§ 94. Begründung der Methode der kleinsten Quadrate durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Als sehr wichtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsfunktion nehmen wir die Begründung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen.

Man habe ein System von Fehlergleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + l_3 \\ &\vdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + l_n \end{aligned}$$

Die Unbekannten $x\ y\ z$ sollen so bestimmt werden, dass ihre Wahrscheinlichkeit ein Maximum wird. Jedem System $x\ y\ z$ entspricht auch ein System $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$; und wenn das System $x\ y\ z$ grösste Wahrscheinlichkeit haben soll, so muss auch das System $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ grösste Wahrscheinlichkeit haben. Setzt man für die übrigbleibenden Fehler $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ die Gültigkeit der Wahrscheinlichkeitsfunktion voraus, so sind die Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$W_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 v_1^2} dv \quad , \quad W_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 v_2^2} dv \quad , \quad W_3 = \frac{h_3}{\sqrt{\pi}} e^{-h_3^2 v_3^2} dv \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler $v_1\ v_2\ v_3 \ldots$ ist nach dem Satz (2a) § 84. S. 261 proportional dem Produkt $W_1\ W_2\ W_3 \ldots$ Oder die Wahrscheinlichkeit des Systems $x\ y\ z$ ist ebenfalls proportional der Grösse:

$$W = \left(\frac{h_1 h_2 h_3 \ldots}{(\sqrt{\pi})^n}\right) \left(e^{-h_1^2 v_1^2} e^{-h_2^2 v_2^2} e^{-h_3^2 v_3^2} \ldots\right)$$
$$= \ldots\ldots\ldots \left(e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 \ldots)}\right)$$

Soll dieses ein Maximum werden, so muss sein:

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + h_3^2 v_3^2 + \ldots = \text{Minimum}$$

oder wenn man $h^2 = p$ setzt:

$$[p\,v\,v] = \text{Minimum}.$$

Insbesondere, wenn alle h oder $p = 1$ sind,

$$[v\,v] = \text{Minimum}.$$

Man hat also dasselbe Ausgleichungsprinzip, welches in § 12. S. 33 ohne theoretische Begründung angenommen worden ist.

Dieses gilt zunächst für Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, es gilt aber insofern auch für alle anderen Ausgleichungsaufgaben, als sich diese auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen lassen, wie in § 37. S. 94 für bedingte Beobachtungen, und in § 48. S. 116 für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen gezeigt wurde.

Wenn man weiss, dass die Fehler dem *Gauss*schen Fehlergesetz folgen, so hat man die durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Ausgleichungsresultate als wahrscheinlichste im strengen Sinn zu betrachten. Wenn die Gültigkeit dieses Gesetzes nicht verbürgt ist, so haben die Ausgleichungsresultate nur den Charakter zweckmässigster oder plausibelster Annahmen für die unbekannten Grössen.

§ 95. Vergleichung des Fehlerverteilungsgesetzes mit einer Beobachtungsreihe.

Um das auf rein theoretischem Wege gefundene Fehlerverteilungs-Gesetz, $\varphi(\varDelta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varDelta^2}$ mit der Erfahrung zu vergleichen, muss man sich eine Reihe wahrer Beobachtungsfehler oder eine Reihe solcher zufälliger Ereignisse verschaffen, von denen man annehmen kann, dass sie gleichen Bedingungen unterworfen sind, wie Beobachtungsfehler.

Wir nehmen zuerst eine solche Zufallsreihe, und zwar die Verteilung der Nullen in den Logarithmen der natürlichen Zahlen.

Wir haben nach *Vega-Hülsse* (Leipzig 1840) gezählt, und zwar nach S. 2—63, wo die 7stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 38999 stehen. Dieselben Logarithmen stehen ebenso auch in *Vega-Bremiker*, und in *Schön* auf denselben Seiten 2—63, in gleicher Anordnung, nur mit dem kleinen Unterschied bei *Vega-Bremiker*, dass in jeder Kolumne nicht 50, sondern 51 Werte stehen, weil am Fusse die Zahl von der folgenden Seite wiederholt steht. Sehen wir davon ab, so haben wir in *Vega-Hülsse* in jeder Kolumne 50 Logarithmen, und die Zählung erstreckte sich auf die Zahl der Nullen in der 6ten Stelle, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zählung der Nullen in der 6ten Logarithmenstelle.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	0300	0517	0734	0951	1168	1386	1603	1820	2037	2254
2001	2471	2688	2905	3122	3339	3556	3773	3990	4207	4424
2002	4641	4858	5075	5291	5508	5725	5942	6159	6376	6593
2003	6809	7026	7243	7460	7677	7893	8110	8327	8544	8760
2004	8977	9194	9411	9627	9844	0061	0277	0494	0711	0927
2005	1144	1360	1577	1794	2010	2227	2443	2660	2876	3093
2006	3309	3526	3742	3959	4175	4392	4608	4825	5041	5257
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2045	6933	7145	7358	7570	7783	7995	8207	8419	8632	8844
2046	9056	9269	9481	9693	9905	0117	0330	0542	0754	0966
2047	1178	1391	1603	1815	2027	2239	2451	2663	2875	3087
2048	3300	3512	3724	3936	4148	4360	4572	4784	4996	5208
2049	5420	5632	5843	6055	6267	6479	6691	6903	7115	7327
	9	1	7	6	6	4	8	5	6	3
	10		13		10		13		9	

Die Spalten 0 und 1 geben in der 6ten Stelle zusammen 10 Nullen, die Spalten 2 und 3 haben 13 Nullen u. s. w. Es wurden 600 solcher Spalten, mit zusammen 30 000 Ziffern durchgezählt und in 300 Gruppen von je 2 Spalten zusammengestellt. Es fanden sich darin 2926 Nullen, also im Mittel 9,753 Nullen in einer Gruppe, während bei unbegrenzter Wiederholung im Mittel 10 Nullen in einer Gruppe zu erwarten wären.

In runden Zahlen ist jedenfalls anzunehmen, dass eine Gruppe im Mittel 10 Nullen hat, und dass diese Zahl die grösste Wahrscheinlichkeit, also auch die grösste Häufigkeit hat. Das Vorkommen von 9 oder 11 Nullen wird weniger wahrscheinlich sein, noch weniger das Vorkommen von 8 oder 12 Nullen u. s. w. Dass 0 oder 20 Nullen in einer Gruppe sind, ist noch viel weniger wahrscheinlich.

Die *Abweichungen* der beobachteten Anzahlen von der Mittelzahl 10 werden das Fehlergesetz befolgen, weil von ihnen ziemlich dasselbe gesagt werden kann, was von den Beobachtungsfehlern $\varDelta$ gilt, d. h. wir betrachten nun das Fallen einer gewissen Zahl von Nullen über oder unter 10 in einer Zählungsgruppe als ein zufälliges Ereignis.

Allerdings ist dieser Fall dem früher in § 85. und § 86. betrachteten Falle nicht ganz entsprechend, weil das Vorkommen -1 Null schlechterdings unmöglich ist, während das Vorkommen von $+21$ Nullen in einer Kolumne möglich ist; da aber der Fall von mehr als 20 Nullen unter 300 Fällen überhaupt nur 1 mal vorkam, so sind doch im Wesentlichen die Verhältnisse dieselben, wie bei den Beobachtungsfehlern. Wir gehen nun zur Mitteilung der Abzählungen und zur theoretischen Vergleichung über.

Die Zählung (welche zur Sicherheit zweifach gemacht wurde) gab folgendes:

Anzahl der Nullen	Fehler $\varDelta =$	kommt vor	Produkt
0	-10	0 mal	0
1	-9	0 „	0
2	-8	1 „	2
3	-7	2 „	6
4	-6	6 „	24
5	-5	9 „	45
6	-4	22 „	132
7	-3	29 „	203
8	-2	36 „	288
9	-1	46 „	414
10	0	41 „	410
11	$+1$	23 „	253
12	$+2$	35 „	420
13	$+3$	19 „	247
14	$+4$	8 „	112
15	$+5$	11 „	165
16	$+6$	5 „	80
17	$+7$	4 „	68
18	$+8$	2 „	36
19	$+9$	0 „	0
20	$+10$	0 „	0
21	$+11$	1 „	21
Summe:		300	2926

Fehlerverteilung ohne Rücksicht auf das Vorzeichen:

$\varDelta =$	kommt vor:
± 0	41 mal
1	69 „
2	71 „
3	48 „
4	30 „
5	20 „
6	11 „
7	6 „
8	3 „
9	0 „
10	0 „
11	1 „
Summe:	300

Die Thatsache, dass der Fehler 0 41 mal vorkam, kann zur Bestimmung von h dienen. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 0 ist hiernach:

$$W_0 = \frac{41}{300}$$

Um die in unserem Falle vorhandene sprungweise Änderung der Fehler Δ dem theoretischen Fehlergesetz anzupassen, welches stetige Änderung voraussetzt, betrachten wir enge Fehlergrenzen mit dem Intervall $d\,\Delta = 1$. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Δ ist bei Annahme des kleinen Intervalls $d\,\Delta$:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\,\Delta \tag{1}$$

also mit $\Delta = 0$ und $d\,\Delta = 1$:

$$W_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{41}{300} \tag{2}$$

woraus:

$$h = 0{,}24223 \qquad h^2 = 0{,}058676 \tag{3}$$

Ist W die theoretische Wahrscheinlickeit des Fehlers Δ, so ist anzunehmen, dass der Fehler $\pm\,\Delta$ unter N Fällen n mal vorkommt, wobei ist:

$$n = 2\,N\,W \tag{4}$$

$$n = 2\,N \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\,\Delta \text{ mit } d\,\Delta = 1,$$

also:

$$\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,N\,h} e^{h^2 \Delta^2} \tag{5}$$

oder zum Ausrechnen geeigneter:

$$log \frac{1}{n} = log\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\,N\,h}\right) + h^2 \Delta^2 \, log\, e \qquad (log\, e = Mod = 0.434\,2945)$$

Die Einsetzung der Zahlenwerte $N = 300$ $h = 0{,}24223$ u. s. w. giebt:

$$log \frac{1}{n} = 8{,}086\,186 - 10 + 0.025482\,\Delta^2 \tag{6}$$

Hiernach wurden die Zahlenwerte n der folgenden Tabelle berechnet:

Fehler Δ	Anzahl des Vorkommens nach der Theorie $n =$	Erfahrung n'	Differenz $n - n'$
$\pm$ 0	(82,0) 41,0	(82) 41	0
1	77,3	69	+ 8,3
2	64,8	71	— 6,2
3	48,4	48	+ 0,4
4	32,1	30	+ 2,1
5	18,9	20	— 1,1
6	9,9	11	— 1,1
7	4,6	6	— 1,4
8	1,9	3	— 1,1
9	0,7	0	+ 0,7
10	0,2	0	+ 0,2
11	0,1	1	— 0,9
	300,0	301	

Diese Vergleichung zeigt jedenfalls soviel, dass die Theorie im stande ist, die beobachtete Fehlerverteilung im wesentlichen darzustellen.

Die hiebei vorläufig benützte Bestimmung von h ist insofern mangelhaft, als sie nur auf das Vorkommen des Fehlers 0 Rücksicht nimmt, also von den 300 Beobachtungen nur 41 benützt. Eine bessere Bestimmung von h erhält man durch Be-

nützung der Fehlerquadratsumme. Wenn man dieselbe nach der Tabelle der Δ auf S. 282 ausrechnet, so findet man:

$$[\Delta\,\Delta] = 2768, \text{ es ist also der mittlere Fehler:}$$

$$m = \sqrt{\frac{2768}{300}} = 3{,}0375$$

und der wahrscheinliche Fehler:

$$r = \varrho \sqrt{2}\, m = 2{,}0488$$

und die Zahl h:

$$h = \frac{\varrho}{r} = \frac{1}{m\sqrt{2}} = 0{,}2328$$

Das Intervall $d\,\Delta = 0{,}5$ ist in Einheiten von r ausgedrückt:

$$0{,}5 = 0{,}2440\, r$$

Wir betrachten nun die Wahrscheinlichkeit des Fallens eines Fehlers zwischen die Grenzen 0 und 0,5, 0 und 1,5 u. s. w., z. B. ist die Wahrscheinlichkeit des Fallens eines Fehlers zwischen die Grenzen 0 und 2,5 gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen 0 und $5 \times 0{,}2440\, r$ oder 0 und $1{,}220\, r$ fällt, d. h. nach der Tafel auf S. [10] des Anhangs ist diese Wahrscheinlichkeit (mit $n = 1{,}220$) $= 0{,}5894$, und es ist hiernach anzunehmen, dass von 300 Fehlern $300 \times 0{,}5894 = 176{,}8$ zwischen diese Grenzen fallen. Die entsprechende Berechnung für die übrigen Grenzen hat die Zahlen n der folgenden Tabelle gegeben:

Grenzen	Anzahl der Fehler nach der Theorie	Anzahl der Fehler nach der Erfahrung	Diff.	Grenzen	Anzahl der Fehler nach der Theorie	Anzahl der Fehler nach der Erfahrung	Diff.
	n	n'			Δn	$\Delta n'$	
0 und 0,5	39,2	41	— 1,8	0,0 und 0,5	39,2	41	— 1,8
0 „ 1,5	113,5	110	+ 3,5	0,5 „ 1,5	74,3	69	+ 5,3
0 „ 2,5	176,8	181	— 4,2	1,5 „ 2,5	63,3	71	— 7,7
0 „ 3,5	225,2	229	— 3,8	2,5 „ 3,5	48,4	48	+ 0,4
0 „ 4,5	258,4	259	— 0,6	3,5 „ 4,5	33,2	30	+ 3,2
0 „ 5,5	278,9	279	— 0,1	4,5 „ 5,5	20,5	20	+ 0,5
0 „ 6,5	290,3	290	+ 0,3	5,5 „ 6,5	11,4	11	+ 0,4
0 „ 7,5	295,9	296	— 0,1	6,5 „ 7,5	5,6	6	— 0,4
0 „ 8,5	298,4	299	— 0,6	7,5 „ 8,5	2,5	3	— 0,5
0 „ ∞	300,0	300	. .	8,5 „ ∞	1,6	1	+ 0,6
				Summe	300,0	300	0,0

Ausser der Vergleichung der Zahlen n und n' ist hier auch noch die Vergleichung der Differenzen Δn und $\Delta n'$ vorgenommen.

Beide Vergleichungen zeigen, dass das von jedem menschlichen Willen unabhängige Fallen der Nullen in der 6ten Stelle von 30 000 Logarithmen dem theoretischen Gesetze der Gleichung $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 \Delta^2}$ sehr nahe entspricht.

Um auch einen Fall geodätischer Beobachtungen zu behandeln, nehmen wir von der Gradmessung in Ostpreussen die 22 Dreieckswidersprüche, welche wir schon in § 3. S. 7 benützt haben, und welche wir nun, nach ihrer absoluten Grösse geordnet, nebst ihren Quadraten, unter den Bezeichnungen Δ und Δ^2, zusammenstellen:

Num.	Δ	Δ^2	Num.	Δ	Δ^2
1	0,00″	0,0000	12	0,98″	0,9604
2	0.00	0,0000	13	1,35	1,8225
3	0,36	0,1296	14	1,36	1,8496
4	0,42	0,1764	15	1,40	1,9600
5	0,51	0,2601	16	1,46	2,1316
6	0,56	0,3136	17	1,62	2,6244
7	0,59	0,3481	18	1,62	2,6244
8	0,72	0,5184	19	1,67	2,7889
9	0,92	0,8464	20	1,68	2,8224
10	0,93	0,8649	21	1,76	3,0976
11	0,95	0,9025	22	1,86	3,4596
		4,3600			26,1414
					4,3600
				$[\Delta\Delta]=$	30,5014

Mittlerer Fehler $m = \sqrt{\frac{30,5014}{22}} = 1,1774$

Wahrscheinlicher Fehler $r = \varrho \sqrt{2}\, m = 0,7942$

Wir wollen die obigen 22 Werte Δ von 0,5″ zu 0,5″ abteilen, und berechnen deshalb den Quotienten $\frac{0,5}{r} = 0,6296$, dieses giebt die Grenzen 0,5″ 1,0″ 1,5″ 2,0″ in Einheiten des wahrscheinlichen Fehlers r:

$0,5'' = 0,6296\, r \qquad 1,0'' = 1,2592\, r \qquad 1,5'' = 1,8888\, r \qquad 2,0'' = 2,5184\, r$

Geht man damit in die Tafel S. [10] des Anhangs ein, so findet man:

$W = 0,3289 \qquad 0,6043 \qquad 0,7973 \qquad 0,9106$

Das sind die Wahrscheinlichkeiten für das Fallen der Fehler zwischen den Grenzen 0 und 0,5″ u. s. w. Da 22 Fehler vorliegen, findet man die theoretischen Fehlerzahlen für jenes Fallen $= 22\, W$, also bzw.:

7,2 13,3 17,5 20,0

Hieraus bilden wir durch Vergleichung mit den wirklich beobachteten Fehlerzahlen folgende Tabellen:

Zwischen	Zahl der Fehler theoretisch	Zahl der Fehler wirklich	Zwischen	Zahl der Fehler theoretisch	Zahl der Fehler wirklich
	n	n'		Δn	$\Delta n'$
0 und 0,5″	7,2	4	0 und 0,5″	7,2	4
0 „ 1,0	13,3	12	0,5 „ 1,0	6,1	8
0 „ 1,5	17,5	16	1,0 „ 1,5	4,2	4
0 „ 2,0	20,0	22	1,5 „ 2,0	2,5	6
0 „ ∞	22,0	22	2,0 „ ∞	2,0	0
				22,0	22,0

Die Vergleichung zwischen Theorie und Wirklichkeit ist in diesem Falle nicht günstig. Namentlich zwischen 0 und 0,5″ sind in Wirklichkeit zu wenig, und zwischen 1,5″ und 2,0″ zu viel Fälle im Vergleich mit der Theorie.

Man kann solche Vergleichungen zwischen Theorie und Wirklichkeit dazu benützen, um unbekannte Fehlerquellen, oder unzulässige Ausscheidungen u. s. w., durch welche die Fehlerverteilung verschoben wird, zu untersuchen. —

§ 96. Graphische Darstellung des Fehlergesetzes.

Man kann die Wahrscheinlichkeitsfunktion, welche wir in § 86. entwickelt haben, auch durch eine Kurve darstellen, und dadurch in mancher Hinsicht noch weiter aufklären. Die Gleichung ist nach (10) § 86. S. 266:

$$\varphi(\varDelta) = W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varDelta^2} \tag{1}$$

Zuerst hat man die Funktionswerte auszurechnen, was wir für zwei Annahmen von h, nämlich $h = 1$ und $h = 2$, gethan haben, wie folgende Tabelle zeigt:

$\varDelta$	$W = \varphi(\varDelta)$ für $h = 1$	$W = \varphi(\varDelta)$ für $h = 2$
0,0	0,56419	1,12838
0,1	0,55858	1,08413
0,2	0,54207	0,96154
0,3	0,51563	0,78724
0,4	0,48077	0,59499
0,5	0,43939	0,41511
0,6	0,39362	0,26796
0,7	0,34564	0,15931
0,8	0,29749	0,08723
0,9	0,25098	0,04419
1,0	0,20755	0,02067
1,1	0,16824	0,00892
1,2	0,13367	0,00356
1,3	0,10410	0,00131
1,4	0,07947	0,00056
1,5	0,04946	0,00014
1,6	0,04361	0,00004
1,7	0,03136	0,00001
1,8	0,02210	$0{,}00000_{8}$
1,9	0,01526	$0{,}00000_{06}$
2,0	0,01033	$0{,}00000_{01}$
3,0	0,00007	0,0 . . . . .
4,0	0,00000 . .	0,0 . . . . .
∞	0	0
	$(r = \varrho)$	$\left(r = \frac{\varrho}{2}\right)$

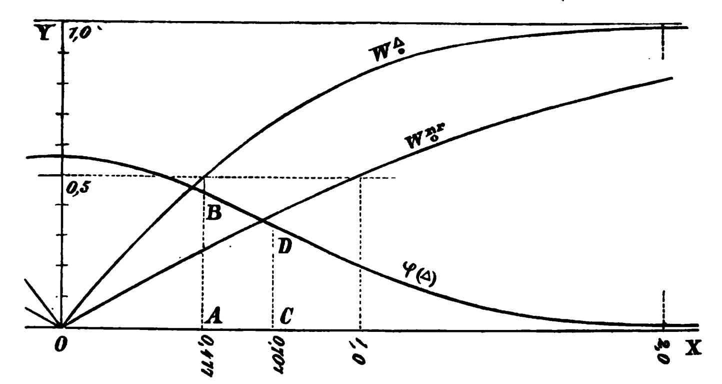
Mit diesen Werten für $h = 1$ ist die Kurve $\varphi(\varDelta)$ in der folgenden Fig. 2. (S. 287) aufgetragen.

Als zweite Kurve $W_0^{\varDelta}$ ist hier die Integralfunktion (1) oder (4) § 87. S. 267 dargestellt, nämlich:

$$W_0^{\varDelta} = (W)_a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(a\,h - \frac{(a\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(a\,h)^5}{5\,.\,2!} - \cdots \right) \tag{2}$$

Es ist dieses die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt. In Fig. 2. ist $h = 1$ gesetzt, und die Kurve mit W_0^{Δ} bezeichnet. Oder kürzer: Die Kurve W_0^{Δ} in Fig. 2. ist die Darstellung der Zahlentabelle am Schluss von § 87. S. 268.

Fig. 2.
Wahrscheinlichkeits-Kurven für $h = 1$ oder $r = \varrho$.



Die dritte Kurve W_0^{nr} in Fig. 2. stellt die Wahrscheinlichkeit vor, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-nr$ und $+nr$ liegt, wenn r der wahrscheinliche Fehler und nr ein Vielfaches desselben ist. Die Ordinaten dieser dritten Kurve W_0^{nr} entsprechen der Gleichung (5a) § 88. S. 269 für die Abscissen n, oder kurz: die Kurve W_0^{nr} ist eine Darstellung der Zahlentabelle S. [10] des Anhangs.

Dieses führt zu folgenden geometrischen Betrachtungen:

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ, oder genauer, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt, ist:

$$W = \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

und die geometrische Darstellung hievon ist ein schmales, unendlich kleines Rechteck, dessen Höhe gleich der Ordinate $= \varphi(\Delta)$ der ersten Kurve, und dessen Breite $= d\Delta$ ist. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt:

$$W_a^b = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta \tag{3}$$

Dieses ist geometrisch dargestellt durch eine Fläche, welche begrenzt ist durch die Abscissenaxe, durch die Kurve $\varphi(\Delta)$ selbst und durch die zwei Ordinaten, welche zu den Abscissen $\Delta = a$ und $\Delta = b$ gehören. Z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $\Delta = 0{,}477$ und $\Delta = 0{,}707$ liegt, in Fig. 2. dargestellt durch die Fläche $ACDB$.

Die Gesamtfläche zwischen der Abscissenaxe (Asymptote) und der Kurve $\varphi(\Delta)$ ist $= 1$, was der Gleichung (2) § 86. S. 264 entspricht, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta \quad \text{oder} \quad 2\int^{\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1 \tag{4}$$

Die Abscisse OA wurde $= \varrho = 0{,}477 \ldots$ gemacht, woraus folgt, dass die Ordinate AB die Fläche halbiert, welche zwischen der Abscissenaxe OX und der Kurve $\varphi(\varDelta)$ liegt, denn das entspricht dem Integral für den wahrscheinlichen Fehler nach (1) § 88. S. 268:

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^r e^{-h^2\varDelta^2}\,d\varDelta \quad \text{oder} \quad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{rh} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Der *Wendepunkt* D der Kurve $\varphi(\varDelta)$ hat eine Beziehung zum mittleren Fehler. Im Wendepunkt einer Kurve ist bekanntlich der zweite Differentialquotient = Null. Man hat also:

$$W = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta^2}$$

$$\frac{dW}{d\varDelta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varDelta^2}(-2h^2\varDelta) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\varDelta e^{-h^2\varDelta^2}$$

$$\frac{d^2W}{d^2\varDelta^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h^2\varDelta^2} - \varDelta e^{-h^2\varDelta^2}.2h^2\varDelta\right\}$$

Soll das = Null werden, so muss sein:

$$1 - 2h^2\varDelta^2 = 0$$

$$\varDelta = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{6}$$

Dieses ist aber nach (6) § 89. S. 271 der mittlere Fehler m.

In Fig. 2. S. 287 ist $h = 1$, also:

$$OC = \varDelta \text{ für den Wendepunkt} = m = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots \tag{7}$$

§ 97. Fehlerkurven mit Berührungs-Anschluss.

Bei der Bestimmung der Fehlerfunktion § 86. S. 263 wurde die Annahme gemacht, dass die Fehlergrenzen die denkbar weitesten, nämlich $-\infty$ und $+\infty$ seien. Die Praxis kann sich mit dieser Annahme nicht befreunden, und deswegen machen wir nun den Versuch, eine Fehlerfunktion zu bestimmen, welche endliche Grenzen $-M$ und $+M$ voraussetzt.

Wir setzen zu diesem Zweck:

$$\varphi(\varDelta) = A + B\varDelta^2 + C\varDelta^4 + \ldots = y \tag{1}$$

mit Weglassung ungerader Potenzen von $\varDelta$, weil $\varphi(+\varDelta) = \varphi(-\varDelta)$ sein soll. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $\varDelta$ und $\varDelta + d\varDelta$ liegt, $= \varphi(\varDelta)\,d\varDelta$, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-M$ und $+M$ liegt, wobei M der Maximalfehler sei, wird:

$$2\int_0^M \varphi(\varDelta)\,d\varDelta = 1 \quad \text{oder} \quad 2\int_0^M y\,d\varDelta = 1 \tag{2}$$

Die durch (1) dargestellte Kurve soll nun nicht wie früher (Fig. 2. S. 278) sich an die Abscissenaxe *asymptotisch anlegen,* sondern soll diese Axe in den Punkten mit den Abscissen $-M$ und $+M$ *berühren.*

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, $C\ldots$ der Funktion (1) sind folgende Bedingungen vorhanden:

1) $\varDelta = M$ soll $y = 0$ geben, d. h.:

$$A + B M^2 + C M^4 + \ldots = 0 \tag{3}$$

2) Wegen der Berührung soll auch der erste Differentialquotient von (1) $= 0$ werden, wenn $\varDelta = M$ ist, also:

$$\frac{dy}{d\varDelta} = 2 B \varDelta + 4 C \varDelta^3 + \ldots$$

$$0 = 2 B M + 4 C M^3 + \ldots \tag{4}$$

3) Nach (2) und (1) ist:

$$\int y \, d\varDelta = A \varDelta + B \frac{\varDelta^3}{3} + C \frac{\varDelta^5}{5} + \ldots \tag{5}$$

$$2 \int_0^M y \, d\varDelta = 2 A M + \frac{2}{3} B M^3 + \frac{2}{5} C M^5 + \ldots = 1 \tag{5)$_M$}$$

Wir bleiben vorerst bei diesen 3 Bedingungen stehen, lösen die Gleichungen (3) (4) (5) ohne Rücksicht auf die Fortsetzungen $+ \cdots$ auf, und finden:

$$A = + \frac{15}{16} \frac{1}{M} \qquad B = - \frac{15}{8} \frac{1}{M^3} \qquad C = + \frac{15}{16} \frac{1}{M^5} \tag{6}$$

folglich nach (1):

$$y = \frac{15}{16} \frac{1}{M} - \frac{15}{8} \frac{\varDelta^2}{M^3} + \frac{15}{16} \frac{\varDelta^4}{M^5} \tag{7}$$

oder:

$$y = \frac{15}{16} \frac{1}{M} \left(1 - 2 \left(\frac{\varDelta}{M}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta}{M}\right)^4\right) \tag{8}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-\varDelta$ und $+\varDelta$ liegt, hat dieselbe Form wie $(5)_M$, welches für die Grenzen $-M$ und $+M$ gilt. Setzt man daher in $(5)_M$ statt M das allgemeinere $\varDelta$, und setzt man zugleich die Coëfficienten (6) ein, so hat man:

$$\overset{+\varDelta}{\underset{-\varDelta}{W}} = 2 \left(\frac{15}{16} \left(\frac{\varDelta}{M}\right) - \frac{5}{8} \left(\frac{\varDelta}{M}\right)^3 + \frac{3}{16} \left(\frac{\varDelta}{M}\right)^5\right) \tag{9}$$

Diese Gleichung gilt nur zwischen den Grenzen $\varDelta = -M$ und $\varDelta = +M$.

Der durchschnittliche Fehler t ist das bestimmte Integral:

$$t = \int_{-M}^{+M} \varDelta \, y \, d\varDelta \qquad \text{oder} \qquad = 2 \int_0^M \varDelta \, y \, d\varDelta$$

Dieses giebt:

$$t = 2 M \left(\frac{15}{32} - \frac{15}{32} + \frac{15}{96}\right) = \frac{5}{16} M = 0{,}3125 \, M$$

oder:

$$M = \frac{16}{5} t = 3{,}2 \, t \tag{10}$$

In ähnlicher Weise findet man das mittlere Fehlerquadrat:

$$m^2 = 2 \int_0^M \varDelta^2 y \, d\varDelta = 2 \, \frac{15}{16} \left\{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right\} M^2 = \frac{1}{7} M^2$$

Dieses giebt:

$$m = 0{,}37796 \, M \qquad M = 2{,}6458 \, m \tag{11}$$

Der wahrscheinliche Fehler r wird erhalten aus der Gleichung:

$$2\int_0^r \varphi(\Delta)\, d\Delta = \frac{1}{2}$$

oder:

$$2\left(\frac{15}{16}\left(\frac{r}{M}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{r}{M}\right)^3 + \frac{3}{16}\left(\frac{r}{M}\right)^5\right) = \frac{1}{2}$$

Die Auflösung dieser Gleichung durch Annäherung giebt:

$$r = 0{,}28108\, M \qquad M = 3{,}5577\, r \qquad (12)$$

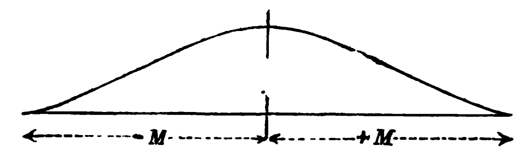
Diese Beziehung (12) wollen wir dazu benützen, um die Funktion (8) durch eine Kurve von gleichen Verhältnissen wie bei der Kurve von Fig. 2. § 96. S. 287 darzustellen. Dort wurde $h = 1$, also $r = \varrho = 0{,}476936$ genommen, es ist also jetzt entsprechend $M = 3{,}5577\, r = 3{,}5577 \times 0{,}47694 = 1{,}6968$ zu nehmen.

Damit wird in (8) der erste Faktor $= 0{,}55251$, und die übrige Ausrechnung nach (8) giebt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } \frac{\Delta}{M} = 0 & y = 0{,}5525 \times 1{,}0000 = 0{,}553 \\ \quad\text{„}\quad 0{,}2 & \quad 0{,}5525 \times 0{,}9216 = 0{,}509 \\ \quad\text{„}\quad 0{,}4 & \quad 0{,}5525 \times 0{,}7056 = 0{,}390 \\ \quad\text{„}\quad 0{,}6 & \quad 0{,}5525 \times 0{,}4096 = 0{,}226 \\ \quad\text{„}\quad 0{,}8 & \quad 0{,}5525 \times 0{,}1296 = 0{,}072 \\ \quad\text{„}\quad 1{,}0 & \quad 0{,}5525 \times 0{,}0000 = 0{,}000 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Der absolute Massstab ist noch willkürlich; in Fig. 2. § 96. S. 287 wurde $1{,}000 = 4^{cm}$ genommen; dieses mal zeichnen wir in halbem Massstab, $1{,}000 = 2^{cm}$ und erhalten damit die folgende Figur 3:

Fig. 3.
Fehlerkurve mit Berührung erster Ordnung.



Der Wendepunkt der Kurve Fig. 3. wird durch zweimaliges Differentiieren von (8) erhalten. Setzt man hiebei $\frac{\Delta}{M} = x$, so hat man, mit Weglassung des Faktors vor der Klammer:

$$\frac{dy}{dx} = \ldots (0 - 4x + 4x^3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots (-4 + 12x^2) = 0$$

also: $3x^2 = 1$, woraus $x = 0{,}57735$

d. h. Wendepunkts-Abscisse $= 0{,}57735\, M$ (13a)

oder auch wegen (11), $M = 2{,}6458\, m$:

Wendepunkts-Abscisse $= 1{,}5276\, m$ (13b)

Nach der Integralfunktion (9) wurde mit dem Argument $\frac{\Delta}{M} = n$ folgende Tafel berechnet:

Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen die Grenzen 0 und den n-fachen Maximalfehler fällt.

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	Diff.
0,0	0,000	0,019	0,037	0,056	0,075	0,094	0,112	0,131	0,149	0,168	18
0,1	0,186	0,205	0,223	0,241	0,259	0,277	0,295	0,313	0,330	0,348	17
0,2	0,365	0,382	0,399	0,416	0,433	0,450	0,466	0,482	0,498	0,514	16
0,3	0,530	0,545	0,560	0,575	0,590	0,605	0,619	0,633	0,647	0,660	14
0,4	0,674	0,687	0,700	0,712	0,725	0,737	0,749	0,760	0,771	0,782	11
0,5	0,793	0,803	0,814	0,823	0,833	0,842	0,851	0,860	0,868	0,876	8
0,6	0,884	0,892	0,899	0,906	0,913	0,919	0,925	0,931	0,936	0,942	5
0,7	0,947	0,951	0,956	0,960	0,964	0,968	0,971	0,975	0,977	0,980	3
0,8	0,983	0,985	0,987	0,989	0,991	0,992	0,994	0,995	0,996	0,997	1
0,9	0,998	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0
1,0	1										

(14)

Berechnungsformel hiezu:

$$W = 2\left(\frac{15}{16}\,n - \frac{5}{8}\,n^3 + \frac{3}{16}\,n^5\right) \quad \text{(s. o. (9) S. 289)}$$

Zur Vergleichung der Funktion (8) oder (9) mit der Erfahrung benützen wir die Abzählung von 3000 Nullen, welche wir in § 95. behandelt haben.

Das Vergleichungsintervall war $0{,}5 = 0{,}2440\,r$ (s. S. 284) und da nach der bisherigen algebraischen Theorie nach (12) $r = 0{,}28108\,M$ ist, so haben wir:

$$0{,}5 = 0{,}068584\,M \quad , \quad M = 7{,}29$$

Dieses giebt bereits eine Vergleichung mit der Erfahrung, denn hiernach sollten mehr als $10 + 7{,}29 = 17{,}29$ Nullen, oder weniger als $10 - 7{,}29 = 2{,}71$ Nullen bei jener Abzählung überhaupt nicht mehr vorkommen, während nach S. 282 ausserhalb dieser Grenzen noch im ganzen 4 Fälle vorgekommen sind.

Im übrigen folgen wir der Behandlung in § 95., wenden aber jetzt die obenstehende Tabelle (14) statt früher S. [10] des Anhangs an, und finden:

Grenzen n	W nach (14) (s. o.)	300 W	Beobachtung S. 284	Diff.
0,5 = 0,0686 M	0,128	38	41	− 3
1,5 = 0,2058 M	0,375	112	110	+ 2
2,5 = 0,3429 M	0,594	178	181	− 3
3,5 = 1,4801 M	0,771	231	229	+ 2
4,5 = 1,6173 M	0,897	269	259	+ 10
5,5 = 0,7544 M	0,969	291	279	+ 12
6,5 = 0,8916 M	0,997	299	290	+ 9
7,29 = 1,0000 M	1,000	300	296	+ 4

(15)

Die letzte Spalte zeigt hier die Widersprüche zwischen der Theorie und der Beobachtung; und vergleicht man dieses mit der früheren Theorie auf S. 284, so findet man, dass die algebraische Fehlerfunktion (9) S. 289 die Fehlerverteilung schlechter darstellt, als die *Gauss*sche Exponentialfunktion $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2 \Delta^2}$.

Ähnliches haben auch andere Vergleichungen ergeben.

Insbesondere giebt die algebraische Funktion bei den höheren Beträgen zu wenig (vgl. Zeitschr. f. Verm. 1878 S. 39).

Wir suchen deshalb die algebraische Gleichung (1) noch durch Zufügung eines weiteren Gliedes zu verbessern, indem wir schreiben:

$$y = A + B\,\Delta^2 + C\,\Delta^4 + D\,\Delta^6 \qquad (16)$$

und um auch noch eine weitere Bedingung für die neue Konstante C zu erhalten, setzen wir fest, es soll für $\Delta = M$ Berührung zweiter Ordnung stattfinden.

Wir haben also im ganzen folgende 4 Bedingungen:

1) $2\int\limits_0^M y\,d\Delta = 1$ d. h. $1 = 2\,A\,M + \frac{2}{3}\,B\,M^3 + \frac{2}{3}\,C\,M^5 + \frac{2}{7}\,D\,M^7$

2) $y = 0$ für $\Delta = M$ d. h. $0 = A + B\,M^2 + C\,M^4 + D\,M^6$

3) $\frac{dy}{d\Delta} = 0$ für $\Delta = M$ d. h. $0 = 2\,B\,M + 4\,C\,M^3 + 6\,D\,M^5$

4) $\frac{d^2y}{d\Delta^2} = 0$ für $\Delta = M$ d. h. $0 = 2\,B + 12\,C\,M^2 + 30\,D\,M^4$

Diese 4 Gleichungen geben nach $A\ B\ C\ D$ aufgelöst:

$$A = \frac{35}{32}\,\frac{1}{M} \qquad B = -\frac{3}{M^2}\,A \qquad C = +\frac{3}{M^4}\,A \qquad D = -\frac{1}{M^6}\,A$$

also die Funktion (16):

$$y = \varphi(\Delta) = \left(\frac{35}{32\,M}\right)\left\{1 - 3\left(\frac{\Delta}{M}\right)^2 + 3\left(\frac{\Delta}{M}\right)^4 - \left(\frac{\Delta}{M}\right)^6\right\}\ {}^{*)} \qquad (17)$$

Die Integration von (17) giebt das Fallen eines Fehlers zwischen gegebenen Grenzen:

$$W_{-a}^{+a} = 2\int\limits_0^a y\,d\Delta = \frac{35}{16}\left\{\frac{a}{M} - \left(\frac{a}{M}\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{a}{M}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{a}{M}\right)^7\right\} \qquad (18)$$

Durch Probieren findet man, dass dieses Integral $= \frac{1}{2}$ wird, wenn man setzt:

$$\left(\frac{a}{M}\right) = 0{,}2423$$

wir haben also den wahrscheinlichen Fehler:

$$r = 0{,}2423\,M \qquad M = 4{,}1271 \qquad (19)$$

das mittlere Fehlerquadrat wird:

$$m^2 = 2\int\limits_0^M \Delta^2\,y\,d\Delta = 2\left(\frac{35}{32\,M}\right)\left\{\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right\}M^3 = \frac{M^2}{9}$$

also:

$$m = \frac{1}{3}\,M \qquad M = 3\,m \qquad (20)$$

Auch der durchschnittliche Fehler findet sich in ähnlicher Weise wie früher bei (10), es wird nun:

$$t = \frac{35}{128}\,M = 0{,}27344\,M \quad , \quad M = 3{,}6571\,t \qquad (21)$$

---

*) Diese Funktion wurde von *Helmert* in der „Zeitschrift für Vermessungswesen 1878“, S. 133 u. ff. behandelt.

Um die Funktion (17) in gleichen Verhältnissen aufzuzeichnen, wie früher die Fig. 3. S. 290, benützen wir das Verhältnis zwischen M und r nach (19).

Soll nämlich wieder $h = 1$ werden, so ist $rh = \varrho$, d. h. $r = \varrho = 0{,}4769\,9363$, also nach (19):

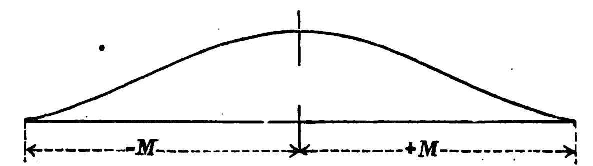
$$M = \frac{r}{0{,}2423} = \frac{\varrho}{0{,}2423} = 1{,}9684 \tag{22}$$

und damit giebt die Gleichung (17):

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{für } \frac{\varDelta}{M} = 0 & y = 0{,}5557 \times 1{,}0000 = 0{,}556 \\
\frac{\varDelta}{M} = 0{,}2 & y = 0{,}5557 \times 0{,}8847 = 0{,}492 \\
\frac{\varDelta}{M} = 0{,}4 & y = 0{,}5557 \times 0{,}5927 = 0{,}329 \\
\frac{\varDelta}{M} = 0{,}6 & y = 0{,}5557 \times 0{,}2621 = 0{,}146 \\
\frac{\varDelta}{M} = 0{,}8 & y = 0{,}5557 \times 0{,}0467 = 0{,}026 \\
\frac{\varDelta}{M} = 1{,}0 & y = 0{,}5557 \times 0{,}0000 = 0{,}000
\end{array}\right\} \tag{23}$$

Damit ist die folgende Kurve Fig. 4. aufgezeichnet.

Fig. 4.
Fehlerkurve mit Berührung zweiter Ordnung.



Der Wendepunkt dieser Kurve Fig. 4. bestimmt sich durch zweimaliges Differentiieren der Gleichung (17), d. h. wenn man wieder $\frac{\varDelta}{M} = x$ setzt:

$$\frac{dy}{dx} = \ldots \left\{- 6x + 12x^3 - 6x^5\right\}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots \left\{- 6 + 36x^2 - 30x^4\right\}, \quad 0 = 5x^4 - 6x^2 + 1$$

Hieraus $\quad x^2 = \frac{+6 \pm \sqrt{6^2 - 20}}{10} = \frac{10}{10}$ oder $\frac{2}{10}$

Die erste Wurzel $x^2 = 1$ oder $x = 1$ entspricht der zu Grunde gelegten Bedingung 4) S. 292. Die zweite Wurzel $x^2 = 0{,}2$ giebt $x = 0{,}44721$, d. h.:

$$\text{Wendepunkts-Abscisse} = 0{,}44721\,M \tag{23a}$$

oder weil nach (20) $M = 3\,m$ ist:

$$\text{Wendepunkts-Abscisse} = 1{,}34163\,m \tag{23b}$$

Es wurde auch noch die Fehlerverteilung in der Nullenzählung von § 95. nach dem Gesetze der Gleichung (17) bzw. (18) geprüft, ähnlich wie oben (15) für die Gleichung (7) bzw. (9) berechnet wurde. Die Resultate des Gesetzes (17), wofür wir

die Einzelheiten hier nicht mitteilen, sind in der folgenden Tabelle nebst den früheren Vergleichungen enthalten:

Verteilung von 3000 Nullen in 300 Gruppen.

Grenzen	Anzahl der Fälle nach der Erfahrung	Einfache Berührung Gleichung (7)	Berührung zweiter Ordnung Gleichung (17)	Asymptotenkurve $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$
0 und 0,5	41	38	36	39
0 „ 1,5	110	112	113	114
0 „ 2,5	181	178	178	177
0 „ 3,5	229	231	230	225
0 „ 4,5	259	269	266	258
0 „ 5,5	279	291	287	279
0 „ 6,5	290	299	297	290
0 „ 7,5	296	300	300	296
0 „ 8,5	299	. .	. .	298
0 „ ∞	300	. .	. .	300

(24)

Die beiden algebraischen Kurven (7) und (17) geben schlechteren Anschluss an die Erfahrung als die Asymptotenkurve.

Im übrigen bilden wir noch die Vergleichung der übrigen Fehlerverhältnisse:

	Einfache Berührung Gleichung (7) S. 289	Berührung zweiter Ordnung Gleichung (17) S. 292	Asymptote $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$
Mittlerer Fehler . . .	m	m	m
Wendepunkt	$x = 1{,}5276\,m$	$x = 1{,}3416\,m$	$x = m$
Durchschnittlicher Fehler	$t = 0{,}8268\,m$	$t = 0{,}8203\,m$	$t = 0{,}7979\,m$
Wahrscheinlicher Fehler .	$r = 0{,}7437\,m$	$r = 0{,}7269\,m$	$r = 0{,}6745\,m$
Maximalfehler	$M = 2{,}6458\,m$	$M = 3{,}0000\,m$	$M = \infty\ m$

(25)

In dieser Reihenfolge nimmt der durchschnittliche und der wahrscheinliche Fehler ab, es ist aber innerhalb 10% übereinstimmend:

$$t = 0{,}8\,m \qquad \text{und} \qquad r = 0{,}7\,m$$

Dagegen der Maximalfehler nimmt zu, von $2{,}6\,m$ bis ∞, und für alle innerhalb dieser Grenzen liegenden Fehlergesetze kann man schreiben:

$$M > 2{,}65\,m \tag{26}$$

§ 98. Der Maximalfehler.

Die Frage nach dem Maximalfehler einer Beobachtungsart berührt eine wunde Stelle der Fehlertheorie.

Es ist zweifellos, dass für jede Art von Beobachtungen eine gewisse Grenze besteht, deren Überschreitung nur beim Vorhandensein eines groben Fehlers denkbar ist, z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei der Winkelmessung mit einem guten Theodolit einen Fehler von 1° zu begehen, ist ohne alle Frage = Null, und nicht ein Wert der von der Null verschieden ist.

Die *Gauss*sche Theorie der Gleichung $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$ giebt aber schlechterdings keinen endlichen Grenzwert der Fehler, sondern die Grenze Unendlich, mit welcher praktisch nichts anzufangen ist.

Durch Beobachtungen kann man wohl den mittleren durchschnittlichen oder wahrscheinlichen Fehler bestimmen, aber nicht den Maximalfehler, denn bei ausgedehnten Beobachtungsreihen findet man fast immer einzelne Fehler, bei denen es fraglich ist, ob man sie nicht als „grobe Fehler" ausscheiden soll.

Die Ausgleichungsrechnung hat kein Bedürfnis, einen Grenzfehler festzustellen, dagegen tritt bei amtlichen Fehlerbestimmungen, in Vermessungs-Anweisungen, im Aichungswesen u. s. w., dieses Bedürfnis sehr dringlich auf.

Soweit man sich bei solchen Festsetzungen nicht lediglich auf ein gewisses praktisches Gefühl verlassen will (was wohl meist der Fall ist), kann man die Fehlergrenzen theoretisch nur dadurch finden, dass man in die strenge Fehlertheorie passende Näherungsannahmen einführt.

Den ersten Anhalt hiefür giebt uns die theoretische Verteilung der Fehler nach § 85. und § 86. Indem wir alles auf den mittleren Fehler beziehen, haben wir nach (9) § 89. S. 272:

Grenze	Verteilung von 1000 Fehlern unter M	über M
$M = 2{,}0\,m$	954	46
$M = 2{,}5\,m$	989	11
$M = 3{,}0\,m$	997	3
$M = 3{,}5\,m$	999	1

Hiernach werden also unter 1000 gleichartigen Messungsfehlern nur 3 sein, welche den 3fachen mittleren Fehler übersteigen; oder wenn man den 3fachen mittleren Fehler als Grenzfehler annimmt, so wird man unter 1000 Fällen nur 3mal gezwungen sein, einen unzulässigen Fehler durch Nachmessung zu beseitigen.

Rückt man die Grenze nur wenig weiter, nämlich auf $3{,}5\,m$, so bleibt unter 1000 Fehlern mutmasslich nur noch *einer*, welcher die Grenze überschreitet. Hiebei ist von „groben Fehlern", welche wohl auch unter 1000 Fällen nicht ausbleiben, ganz abgesehen.

Dieses giebt bereits eine gewisse Berechtigung zu der Annahme, dass der Grenzfehler gleich dem 3fachen mittleren Fehler sei, also:

$$M = 3\,m \tag{1}$$

Denn, denken wir uns, es sei bei einer Vermessung durch Häufung von lauter unvermeidlichen Fehlern ein Schlussfehler M grösser oder gleich $3\,m$ entstanden, so muss der Landmesser, welchem das vorkommt, sozusagen *unschuldigerweise* Nachmessungen machen, oder den Vorwurf schlechter Messung auf sich nehmen. Trotz dieser Gefahr ist das Bedürfnis amtlicher Genauigkeitsgrenzen so durchschlagend, dass man die Annahme (1) gelten lässt, mit dem Bewusstsein, unter 1000 Fällen 1 mal eine kleine Ungerechtigkeit zu begehen.

Ähnlich verhält es sich bei Betrachtung der algebraischen Fehlergesetze von § 97. Die Vergleichungen mit der Abzählung von 3000 Nullen gaben auf S. 294 für die algebraischen Gleichungen schlechteren Anschluss an die Wirklichkeit als für das asymptotische Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$. Immerhin ist aber bewiesen, dass die algebrai-

schen Annahmen mit Berührungsanschluss erster und zweiter Ordnung als brauchbare *Näherungen* des asymptotischen Fehlergesetzes gelten können. Die Übersicht (25) § 97. S. 294 zeigt, dass für diese Annahmen M zwischen $2,65\,m$ und $3\,m$ liegt, und dieses weist uns abermals in runder Zahl auf die oben bei (1) gemachte Annahme $M = 3\,m$.

Eine andere Beziehung, welche im Anschluss hieran häufig gebraucht wird, ist durch die Fehlertheorie in aller Strenge festgesetzt, nämlich die Beziehung zwischen Messungsfehler und Messungsdifferenz, man hat nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mittlere Differenz} = \sqrt{2} \times \text{mittlerer Fehler} \\ \quad\text{„} \quad\quad \text{„} \quad = 1,414 \times \quad \text{„} \quad\quad \text{„}\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Da nach (1) der Grenzfehler M und der mittlere Fehler m proportional sein sollen, so gelten ähnliche Beziehungen wie (1) auch für die Grenzdifferenzen und Grenzfehler, und aus (1) und (2) ergiebt sich, dass die zulässige (Grenz-)Differenz zweier unabhängiger Messungen, deren jede für sich den mittleren Fehler m hat, angegeben wird:

$$= 3 \times 1,414\,m = 4,24\,m. \qquad (3)$$

Da aber bereits die Annahme (1) hoch ist, so kann man in runder Zahl etwa annehmen:

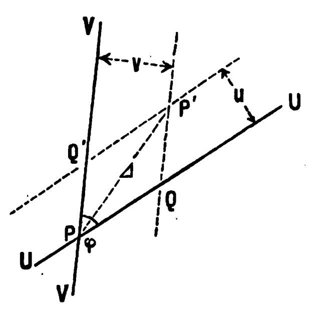
$$\text{Zulässige Messungs-Differenz} = 4 \times \text{mittlerer Fehler} \qquad (4)$$

Kapitel V.

Theorie der Genauigkeit der geodätischen Punktbestimmung.

§ 99. Mittlerer Fehler des Schnittpunkts zweier Geraden.

Fig. 1.
Schnitt zweier Geraden.



In Fig. 1. sei ein Punkt P bestimmt als Schnittpunkt zweier Geraden UU und VV, welche in ihren *Richtungen* fehlerfrei sind, und einen bestimmten Schnittwinkel φ bilden, welche aber in ihren *Lagen* insofern unsicher sind, als sie gewisse Parallelverschiebungen u und v fürchten lassen.

Wenn nur eine der beiden Geraden sich verschiebt, so rückt der Punkt P nach Q oder nach Q'; verschieben sich beide Gerade, so rückt der Punkt P nach P', und man kann die Verschiebung $PP' = \Delta$ angeben:

$$\Delta^2 = PP'^2 = PQ^2 + QP'^2 + 2\,PQ \times QP' \cos\varphi$$

hiebei ist:

$$PQ = \frac{u}{\sin\varphi}\ ,\quad QP' = \frac{v}{\sin\varphi} \qquad (1)$$

also:

$$\Delta^2 = \left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sin\varphi}\right)^2 + 2\,\frac{u}{\sin\varphi}\,\frac{v}{\sin\varphi}\cos\varphi \qquad (2)$$

Man kann auf die Verschiebungen u, v und Δ den Begriff des mittleren Fehlers nach § 4. S. 8 anwenden. Indem n Fälle von Verschiebungen betrachtet werden, bezeichnen wir:

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = M^2 \qquad \frac{[u\,u]}{n} = m_1^2 \qquad \frac{[v\,v]}{n} = m_2^2 \tag{3}$$

und damit giebt die Gleichung (2):

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{sin^2\varphi} + 2\,\frac{[u\,v]}{n}\,\frac{cos\,\varphi}{sin^2\varphi} \tag{4}$$

Hier ist aber der Mittelwert $\frac{[u\,v]}{n}$ offenbar = Null, ebenso wie früher bei der Entwicklung des Fehlerfortpflanzungs-Gesetzes § 5. S. 11 unten, der Mittelwert $\frac{[\Delta_1\,\Delta_2]}{n} = 0$ gesetzt wurde.

Man hat also jetzt aus (4):

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{sin^2\varphi} \quad , \quad M = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{sin\,\varphi} \tag{5}$$

Wir nennen den nach der Gleichung (5) berechneten Wert M kurz den mittleren Fehler des Punktes P, oder den mittleren Punktfehler von P, im Gegensatz zu den mittleren Verschiebungen des Punktes nach bestimmten Richtungen, wie z. B. u und v quer zu U und V, oder nach rechtwinkligen Coordinatenaxen X Y, zu welchen wir jetzt übergehen.

Wir denken uns die Verschiebungen PQ, QP' und $PP' = \Delta$ auf zwei rechtwinklige Coordinatenaxen projiziert, nennen (PQ) das Azimut von PQ, (QP') das Azimut von QP', ΔX und ΔY die Projektionen von Δ, so ist:

$$\left.\begin{aligned}\Delta X &= PQ\,cos\,(PQ) + QP'\,cos\,(QP')\\ \Delta Y &= PQ\,sin\,(PQ) + QP'\,sin\,(QP')\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Geht man zu *mittleren* Coordinaten-Verschiebungen M_x und M_y an Stelle von ΔX und ΔY über, indem man zugleich die Bedeutungen von PQ und QP' nach (1) und die Mittelwerte nach (3) einsetzt, so giebt (6) folgendes:

$$\left.\begin{aligned}M_x^2 &= \left(\frac{m_1}{sin\,\varphi}\right)^2 cos^2\,(PQ) + \left(\frac{m_2}{sin\,\varphi}\right)^2 cos^2\,(QP')\\ M_y^2 &= \left(\frac{m_1}{sin\,\varphi}\right)^2 sin^2\,(PQ) + \left(\frac{m_2}{sin\,\varphi}\right)^2 sin^2\,(QP')\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die Produkte $2\,PQ\,.\,QP'$ sind hier bei der Bildung der mittleren Fehlerquadrate fortgefallen, ebenso wie oben bei (4) der Mittelwert $2\,\frac{[u\,v]}{n} = 0$ gesetzt wurde.

Durch Addition geben die zwei Gleichungen (7):

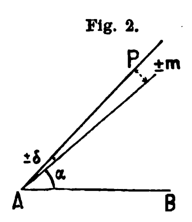
$$(M_x)^2 + (M_y)^2 = \left(\frac{m_1}{sin\,\varphi}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{sin\,\varphi}\right)^2$$

also wegen (5):

$$(m_x)^2 + (m_y)^2 = M^2 \tag{8}$$

Man kommt also auch durch Projektion auf 2 Axen X und Y wieder zu demselben mittleren Fehler M, den wir schon bei (5) kennen gelernt haben.

Reduktion eines Winkelfehlers auf eine Parallelverschiebung.



Wenn in Fig. 2. der Strahl AP gegen AB festgelegt ist durch Messen des Winkels α mit dem mittleren Fehler $\pm\delta$, so giebt das auf die Entfernung AP eine Querabweichung:

$$m = AP \cdot \delta \tag{9}$$

Diese rechtwinklig zu AP gemessene Verschiebung m kann zur Berechnung des mittleren Fehlers von P ebenso benützt werden, wie die Parallelverschiebungen u und v in Fig. 1. (S. 296), weil die kleine Konvergenz δ (welche zu m nur einen Beitrag von höherer Ordnung, nämlich $M \cdot \delta$ giebt) hier unwesentlich ist.

§ 100. Genauigkeitskurven.

Der mittlere Fehler des Schnittpunkts zweier Geraden, d. h. nach (5) des vorigen § 99. S. 297

$$M = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}{\sin\varphi}$$

ist eine Funktion des Schnittwinkels φ und der mittleren Parallelverschiebungen m_1 und m_2 der Geraden; lässt man nun diese Geraden in ihrer Ebene sich stetig nach irgendwelchem Gesetz, unabhängig von einander, bewegen, wobei auch m_1 und m_2 sich stetig ändern sollen, so wird jedem Punkte der Ebene, welcher überhaupt Schnittpunkt werden kann, ein gewisser Wert M zukommen, und die Aufeinanderfolge der Punkte, in welchen M einen und denselben Wert hat, giebt stetige Kurven, welche wir »*Kurven gleicher Genauigkeit*« oder einfach »*Genauigkeitskurven*« nennen.

Man kann diese Genauigkeitslinien auch dadurch geometrisch veranschaulichen, dass man in jedem Punkte der Ebene, welcher (nach dem angenommenen Bewegungsgesetz der beiden Geraden U und V) Schnittpunkt werden kann, den Wert M des mittleren Fehlers als Ordinate rechtwinklig zur Fläche aufträgt. Dadurch entsteht eine *krumme Fläche*, welche als Schnittlinien mit einer Schar von Parallelebenen zur Grundebene, die besprochenen Kurven liefert, ebenso wie eine topographische Fläche als Schnittlinien mit einer Schar horizontaler Ebenen die bekannten Horizontalkurven giebt.

Als ein sehr einfaches Beispiel können wir zu weiterer Klarlegung den Fall von Fig. 2. § 99. (s. o.) benützen: Der Punkt P ist bestimmt durch Polar-Coordinaten α und $AP = r$. Der Fehler δ von α giebt die Fehlerkomponente $r\delta = m$ quer zum Strahl r, die andere Fehlerkomponente in der Richtung von r selbst sei eine beliebige Funktion von r (z. B. $= kr$ für tachymetrische Distanzmessung), dann ist unter allen Umständen der mittlere Gesamtfehler eine Funktion nur von r, und die Genauigkeitskurven sind sämtlich Kreise um den Pol A.

Nach diesen Begriffsbestimmungen gehen wir zu Genauigkeitsuntersuchungen der gebräuchlichsten geodätischen Punktbestimmungen über.

(Die folgenden Genauigkeitskurven sind im wesentlichen dieselben, welche Verfasser früher in *Schlömilchs* Zeitschrift für Mathematik und Physik 1871, S. 397—427, mit 3 lithogr. Tafeln, veröffentlicht hat.)

§ 101. Vorwärts-Einschneiden. (Fig. 3.)

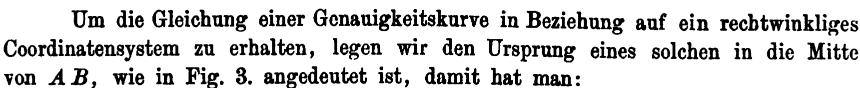
Wenn ein Punkt P gegen zwei feste Punkte A und B festgelegt wird durch Messen der zwei Winkel $PAB = \alpha$ und $ABP = \beta$ mit den mittleren Fehlern (δ) und (δ'), so hat man zur Bestimmung von P die zwei geometrischen Örter AP und BP, denen nach (9) § 99. S. 298 in der Gegend des Schnittes P die mittleren *Parallel*verschiebungen $AP.(\delta)$ und $BP.(\delta')$ zugeschrieben werden können, und die sich unter dem Winkel $BPA = \gamma$ schneiden. Es ist daher der mittlere Fehler M des Punktes P nach der Grundgleichung (5) § 99. S. 297:

Fig. 3.

$$M = \frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{(AP.(\delta))^2 + (BP.(\delta'))^2}$$

und besonders mit $(\delta') = (\delta)$:

$$M = \frac{(\delta)}{\sin\gamma}\sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{(\delta)}{\sin\gamma}\sqrt{b^2+a^2} \qquad (1)$$



Um die Gleichung einer Genauigkeitskurve in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu erhalten, legen wir den Ursprung eines solchen in die Mitte von AB, wie in Fig. 3. angedeutet ist, damit hat man:

$$b^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2 \qquad a^2 = \left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{ab}{y}$$

$$\frac{c^2}{\sin^2\gamma} = \frac{\left(\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2\right)\left(\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2\right)}{y^2}$$

$$M^2 = \frac{(\delta)^2}{c^2 y^2}\left[\left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2\right]\left[\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2\right] \times$$

$$\times\left[\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + y^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + y^2\right]$$

$$M^2 = \frac{2(\delta)^2}{c^2 y^2}\left[\left(\frac{c^2}{4} + x^2 + y^2\right)^2 - c^2 x^2\right]\left[\frac{c^2}{4} + x^2 + y^2\right]$$

Um alle konstanten Teile zusammen zu fassen, setzen wir:

$$\frac{M}{c\,(\delta)} = \mu \qquad (2)$$

und erhalten damit folgende Gleichung sechsten Grades:

$$c^4 \mu^2 y^2 = 2\left(x^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}\right)\left[\left(x^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}\right)^2 - c^2 x^2\right] \qquad (3)$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass die Kurve nach x und y symmetrisch ist, und dass die Punkte A und B, in welchen $y = 0$ und $x^2 = \frac{1}{4}c^2$ ist, der Kurve doppelt angehören, während kein anderer Punkt der Geraden AB auf der Kurve liegt.

Die Gleichung (3) lässt sich in folgende Gestalt bringen:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2\right)\left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - \frac{1}{16}c^4 + c^2y^2\right) + \frac{1}{2}c^4y^2(1 - \mu^2) = 0 \qquad (4)$$

Aus dieser Umformung (4) mit dem Faktor $(1-\mu^2)$ im letzten Gliede ist ersichtlich, dass in dem besonderen Falle $\mu = 1$ die Kurve zerfällt in einen Kreis $(x^2 + y^2 - \frac{1}{4} c^2) = 0$ um den Durchmesser AB, und in eine Kurve vierten Grades, deren Gleichung ist:

$$x^4 + 2\,x^2 y^2 + y^4 - \frac{1}{16} c^4 + c^2 y^2 = 0 \tag{5}$$

Der erwähnte Kreis erfüllt die ursprüngliche Bedingung (1), nämlich:

$$\frac{b^2 + a^2}{\sin^2 \gamma} = c^2$$

wie man unmittelbar einsehen kann.

Die Gleichung (5) giebt nach y^2 aufgelöst:

$$y^2 = -(x^2 + \frac{1}{2} c^2) \pm \sqrt{(x^2 + \frac{1}{2} c^2)^2 - (x^4 - \frac{1}{16} c^4)} \tag{6}$$

Für reelle Werte von y kommt nur das obere Zeichen vor der Wurzel in Betracht. Hiemit berechnet man folgende einander entsprechende Zahlenwerte:

$\frac{x}{c} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45	0,5	(6a)
$\frac{y}{c} =$	0,243	0,240	0,232	0,211	0,165	0,123	0,000	

Hiernach ist die in Fig. 4. S. 301 mit 1 bezeichnete ellipsenähnliche Kurve konstruiert worden. Diese Kurve und der ebenfalls mit 1 bezeichnete Kreis um den Durchmesser $AB = c$ stellen zusammen die Genauigkeitskurve für den Fall $\mu = 1$ vor. Die kleine Halbaxe der ellipsenähnlichen Kurve erhält man aus (6) mit $x = 0$, nämlich:

$$y = \frac{c}{2} \sqrt{-2 + \sqrt{5}} = 0{,}2429\, c$$

wie bereits unter den obigen Zahlenwerten (6a) angegeben ist.

Was die Konstruktion der übrigen Genauigkeitskurven für verschiedene Werte μ betrifft, so bietet die Gleichung (3) oder (4) in rechtwinkligen Coordinaten wenig Vorteile; bequemer ist das Bildungsgesetz der Gleichung (1) selbst, nämlich mit Einsetzung von μ nach (2):

$$c\,\mu = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sin \gamma} \tag{6b}$$

Für alle Punkte eines durch A und B gehenden Kreises ist $\sin \varphi$ konstant, und da sich $\sqrt{a^2 + b^2}$ sehr einfach konstruieren lässt, so wurden für verschiedene Punkte solcher Kreise die Werte $c\mu$ bestimmt, und dann durch Interpolation die Punkte gesucht, in welchen μ gewisse Werte, etwa 1, 3, annimmt, so dass die stetige Verbindung dieser Punkte die Genauigkeitskurven ergiebt. Diese Konstruktion ist ganz gleich der Konstruktion von Horizontalkurven aus zerstreuten Höhenpunktsbestimmungen.

Ein weiteres Hilfsmittel, um die Kurven zu konstruieren, bzw. schärfer auszuzeichnen, bieten die *Tangenten* in den Punkten A und B, welche sich leicht konstruieren lassen: Wenn BT eine Tangente in B ist, so geht für den Punkt B als Kurvenpunkt der Winkel γ in $ABT = \gamma'$ über, daher nach (6b), mit $a = 0$ und $b = c$:

$$c^2 \mu^2 = \frac{0^2 + c^2}{\sin^2 \gamma'}, \qquad \sin \gamma' = \frac{1}{\mu} \tag{6c}$$

Wenn $\mu > 1$ ist, so hat man hieraus zwei supplementäre Werte γ'; sie entsprechen zwei Tangenten in jedem der Knotenpunkte A und B.

Wenn $\mu = 1$ ist, so fallen die beiden Tangenten zusammen in *eine* Senkrechte zu AB, und wenn $\mu < 1$ ist, so existiert keine Tangente in A und B, und auch kein Kurvenpunkt A oder B.

Aus dem Verlaufe der so konstruierten Kurven lässt sich bereits erkennen, an welchen Stellen Maxima oder Minima zu suchen sind, und wir werden die durch die Kurven gewonnene Anschauung teilweise zu Hilfe nehmen, um die analytische Untersuchung auf Minima nicht zu kompliziert machen zu müssen. Wenn man in (3) die Klammern auflöst, so erhält man:

$$\frac{1}{2} c^4 \mu^2 y^2 = x^6 + 3 x^4 y^2 - \frac{1}{4} x^4 c^2 + 3 x^2 y^4 - \frac{1}{16} x^2 c^4 + \frac{1}{2} x^2 y^2 c^2 + y^6$$
$$+ \frac{3}{4} y^4 c^2 + \frac{3}{16} y^2 c^4 + \frac{1}{64} c^6$$

Indem man y als konstant behandelt, erhält man durch Differentiieren nach x:

$$0 = 6 x^5 + 12 x^3 y^2 - x^3 c^2 + 6 x y^4 - \frac{1}{8} x c^4 + x y^2 c^2$$

Jedenfalls ist $x = 0$ eine Wurzel dieser Gleichung, was schon aus der Symmetrie zu schliessen war, und weitere Wurzeln erhält man aus der Auflösung nach x^2, nämlich, nachdem einmal mit x dividiert ist:

$$x^2 = \frac{(c^2 - 12 y^2) \pm 2 c \sqrt{(c^2 - 12 y^2)}}{12}$$

Hiernach wird x^2 reell, wenn $(c^2 - 12 y^2) > 0$, oder wenn

$$y < \frac{c}{\sqrt{12}}, \quad \text{oder} \quad y < 0{,}2887\, c$$

Nimmt man hier den Grenzwert

$$y = \frac{c}{\sqrt{12}} \tag{7}$$

so erhält man nur *einen* Wert x, nämlich $x = 0$, und der entsprechende Wert von μ wird:

$$\mu = 0{,}9428 \tag{8}$$

Wir suchen nun das Minimum von μ auf der Mittelsenkrechten zur Basis AB. Indem man in der Gleichung (3) $x = 0$ setzt, hat man:

$$\frac{c^4 \mu^2}{2} = \frac{\left(y^2 + \frac{c^2}{4}\right)^3}{y^2} \tag{9}$$

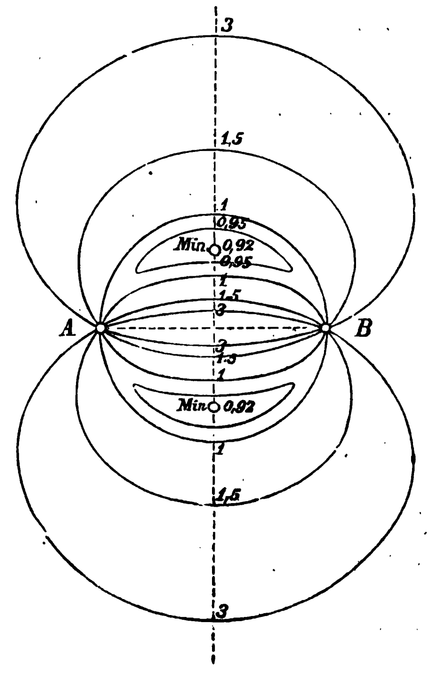
Differentiieren nach y giebt:

$$0 = \frac{2\left(y^2 + \frac{c^2}{4}\right)^2}{y^3} \left(2 y^2 - \frac{c^2}{4}\right)$$

Der zweite Faktor, hier gleich Null gesetzt, giebt:

$$y = \frac{c}{\sqrt{8}} = 0{,}3536\, c \tag{9a}$$

Fig. 4.
Genauigkeitskurven für Vorwärtseinschneiden.



Der zugehörige Wert von μ wird durch Einsetzen in (9) erhalten:

$$\mu = \sqrt{\frac{27}{32}} = 0{,}9185 \tag{10}$$

Dieses ist das absolute Minimum von μ. Der Winkel γ, welchen die Strahlen von A und B nach dem Minimumspunkt einschliessen, ist bestimmt durch

$$\frac{\gamma}{2} = arc\ tang \frac{c}{2\,y},$$

wobei y nach (9a) zu nehmen ist, also:

$$\gamma = 2\,arc\ tang \sqrt{2} = 109^\circ\ 28'.$$

Der günstigste Visur-Schnitt beim Vorwärts-Einschneiden findet also unter dem Winkel 109° 28′ statt, und **nicht** unter dem Winkel 90°. Bei näherer Betrachtung findet man, dass dieses ganz dem praktischen Gefühl entspricht, denn so lange der Winkel noch nahe an 90° ist, überwiegt, bei einer Vergrösserung desselben, die Verkürzung der Strahlen AP und BP die in der Verschlimmerung des Schnittwinkels liegende Ungunst.

Wir verfolgen nun die Gestalts-Änderungen, welche die Kurven erleiden, wenn μ von 0 bis ∞ wächst.

1) So lange $\mu < 0{,}9185$ ist (vgl. (10)), so giebt es überhaupt keine Kurven (oder etwa imaginäre Kurven).

2) Wenn $\mu = 0{,}9185$ wird, so sind die beiden Minimumspunkte, welche in Fig. 4. S. 301 mit *Min.* bezeichnet sind, die einzigen Repräsentanten der Kurven.

3) Wenn μ zwischen 0,9185 und 1 ist, so besteht die Kurve aus zwei getrennten, die Minimumspunkte umschliessenden Zweigen, wie z. B. die Kurve 0,95 in Fig. 4. S. 301.

4) Wenn μ zwischen 0,9185 und 0,9428 ist, so ist die geschlossene Kurve überall nach Aussen konvex.

5) Sobald aber $\mu > 0{,}9428$ wird, so zeigt die geschlossene Kurve in der Richtung gegen die Basis AB eine konkave Einbiegung, welche bald so zunimmt, dass eine mondsichelartige Form entsteht. Dieser letztere Schluss ist gegründet auf die Gleichung (8) und die ihr vorhergehende Betrachtung.

6) Bei weiter wachsendem μ bleibt die Mondsichel bestehen bis $\mu = 1$.

7) Für $\mu = 1$ zerfällt die Kurve, wie schon bei (6) erwähnt, in einen Kreis um AB und eine ellipsenähnliche, den Kreis in A und B berührende Kurve.

8) Wenn $\mu > 1$, so besteht die Kurve wieder aus zwei getrennten, sich in A und B schneidenden symmetrischen Teilen, wie die Zeichnung für $\mu = 1$, 1,5 , 3 darstellt.

9) Wenn $\mu = \infty$ wird, so ist die Gleichung (4) erfüllt mit $y^2 = 0$ oder $(x^2 + y^2)^2 = \infty$; die Kurve besteht also dann aus der doppelt gedachten Geraden AB und einem ebenfalls doppelt gedachten, unendlich grossen Kreis um den Halbierungspunkt von AB.

Der Ausdruck (1) kann ausser dem mittleren Fehler eines durch Vorwärtseinschneiden bestimmten Punktes auch darstellen den mittleren Fehler eines durch Messung der zwei Entfernungen a und b bestimmten Punktes, unter der Voraussetzung, dass der mittlere Fehler der Längenmessung der Länge selbst proportional ist, denn wenn nun $l\,(\delta)$ den mittleren Fehler einer Länge l bedeutet, so sind m_1 und m_2

des allgemeinen Ausdrucks (5) § 99. S. 297 bzw. $m_1 = a\,(\delta)$ und $m_2 = b\,(\delta)$, und der Schnittwinkel bleibt $= \gamma$, man hat also wie früher:

$$M = \frac{(\delta)}{\sin\gamma}\sqrt{a^2 + b^2} \;.$$

§ 102. Mittlere Coordinatenfehler für Vorwärts-Einschneiden.

Die mittleren Coordinatenfehler M_x und M_y in irgend welchem Coordinatensystem können wir für einen vorwärts eingeschnittenen Punkt auf zwei Arten finden:

Fig. 5.

I. In Fig. 5. bedeutet φ_0 das Azimut der Seite AB, φ das Azimut der Seite $A\,P$ und ψ das Azimut der Seite $B\,P$.

Denkt man sich nun die Abscisse X des Punktes P von A her berechnet, so hat man:

$$X = b\cos\varphi = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}\cos\varphi$$

Wenn nur α und β gemessen sind, so müssen γ und φ in α und β ausgedrückt werden, nämlich:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_0 - \alpha$$

also:
$$X = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\varphi_0 - \alpha) \tag{1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = c\sin\beta\left\{\frac{+\sin(\varphi_0-\alpha)\sin(\alpha+\beta) - \cos(\varphi_0-\alpha)\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right\}$$

$$= c\sin\beta\frac{-\cos(\varphi_0+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}\,\frac{\cos(\varphi_0+\beta\pm 180^0)}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{b\cos\psi}{\sin\gamma} \tag{2}$$

Bildet man bei (1) auch die Ableitung nach β, so findet man auf gleiche Weise

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{a\cos\varphi}{\sin\gamma}$$

Nun bildet man das totale Differential:

$$d\,x = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\,d\,\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}\,d\,\beta$$

Der Übergang von den Differentialen zu mittleren Fehlern giebt, wenn $\pm\,d\,\alpha = \pm\,d\,\beta = \pm\,(\delta)$ gesetzt wird:

$$(M\,x)^2 = \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2\right)(\delta)^2 = \frac{b^2\cos^2\psi + a^2\cos^2\varphi}{\sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \tag{3}$$

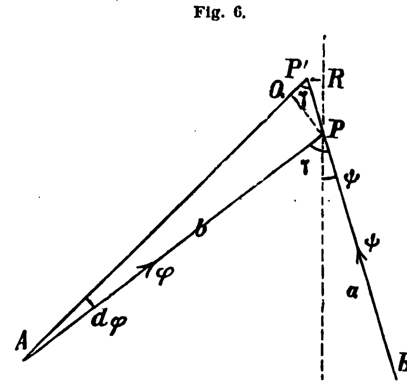
Eine entsprechende Formel gilt für y, d. h.:

$$(M\,y)^2 = \left(\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2\right)(\delta)^2 = \frac{b^2\sin^2\psi + a^2\sin^2\varphi}{\sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \tag{4}$$

Beide zusammen geben:

$$(M\,x)^2 + (M\,y)^2 = \frac{b^2 + a^2}{\sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \tag{5}$$

Dieses stimmt überein mit (1) § 101. S. 299.



II. Wir nehmen noch eine *zweite* Entwicklung vor, welche zwar kein neues Resultat ergiebt, aber doch zur weiteren Klarstellung beitragen kann.

Wenn in Fig. 6. der Punkt P bestimmt wird als Schnitt zweier Strahlen, welche von den zwei Fixpunkten A und B mit den Azimuten φ und ψ ausgehen, so ist die Abscisse X des Schnittpunktes P jedenfalls eine gewisse Funktion der Azimute:

$$X = F(\varphi, \psi)$$

und der mittlere Fehler M_x der Abscisse findet sich aus:

$$(M_x)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} d\psi\right)^2 \qquad [1]$$

wo $d\varphi$ und $d\psi$ die Bedeutungen von mittleren Azimutfehlern haben. Nun kann man die partiellen Differentiale von F angeben, ohne die Funktion F zu kennen, es ist nämlich nach Fig. 6.:

$$PQ = b\,d\varphi$$

$$PP' = \frac{PQ}{\sin\gamma} = \frac{b\,d\varphi}{\sin\gamma}$$

$$dx = PR = PP' \cos\psi = \frac{b\cos\psi}{\sin\gamma} d\varphi$$

Dieses dx rührt nur von φ her, oder es ist:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi = dx = \frac{b\cos\psi}{\sin\gamma} d\varphi \qquad [2]$$

und entsprechend ist für ψ:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} d\psi = \frac{a\cos\varphi}{\sin\gamma} d\psi \qquad [2']$$

$d\varphi$ und $d\psi$ in [2] und [2′] setzen wir beide $= \pm(\delta)$, und haben nun aus [1], [2] und [2′]:

$$(M_x)^2 = \frac{b^2\cos^2\psi + a^2\cos^2\varphi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad [3]$$

Eine ebenso gebaute Gleichung gilt für $(M_y)^2$, nämlich:

$$(M_y)^2 = \frac{b^2\sin^2\psi + a^2\sin^2\varphi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad [4]$$

und beide zusammen geben:

$$M^2 = (M_x)^2 + (M_y)^2 = \frac{b^2 + a^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad [5]$$

Die Formeln [3], [4] und [5] stimmen mit den früheren (3), (4) und (5) überein.

§ 103. Verschiebung einer Kreistangente.

Um auch solche Winkelmessungen auf schneidende Gerade zurückführen zu können, bei welchen der neu zu bestimmende Punkt als Winkelscheitel dient, bedürfen wir der Lösung folgender Vorbereitungs-Aufgabe (Fig. 7.).

Fig. 7.
Verschiebung der Kreistangente in P.

Ein Kreis ist bestimmt durch zwei Punkte A und B, durch die er gehen soll, und durch den Winkel φ, welchen er über $A\,B$ fassen soll. In irgend einem Punkte P dieses Kreises wird eine Tangente gezogen, und es fragt sich, welche (Parallel-)Verschiebung diese Tangente erleidet, wenn der Winkel φ sich um einen kleinen Betrag $d\,\varphi$ ändert.

Zum Zweck der analytischen Lösung der Aufgabe beziehen wir alle Punkte auf ein Coordinatensystem, dessen Ursprung die Mitte von $A\,B$ ist, dessen x-Achse in der Richtung $B\,A$ liegt, und dessen y-Achse die Mittelsenkrechte von $A\,B$ ist.

Der Kreismittelpunkt habe die Coordinaten $x = 0$, $y = b$, der Kreishalbmesser sei $= r$.

Dann ist die Kreisgleichung:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{1}$$

Die Gleichung einer Tangente im Punkt $x\,y$ mit den laufenden Coordinaten ξ und η ist bekanntlich:

$$x\,\xi + (y - b)\,(\eta - b) = r^2$$

oder nach ξ und η geordnet:

$$x\,\xi + (y - b)\,\eta = r^2 + b\,(y - b) \tag{2}$$

Wenn nun $A\,\xi + B\,\eta = C$ die Gleichung einer Geraden bedeutet, so ist bekanntlich ihr Abstand p vom Ursprung ausgedrückt durch:

$$p = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3}$$

also, wenn man für (2) setzt: $A = x$, $B = (y - b)$ und $C = r^2 + b\,(y - b)$, so wird $\sqrt{A^2 + B^2} = r^2$, und (3) giebt:

$$p = r + b\,\frac{y - b}{r} \tag{4}$$

Nun sind r und b in a und φ auszudrücken:

$$r = \frac{a}{2}\,\frac{1}{\sin\varphi} \quad , \quad b = \frac{a}{2}\,cotg\,\varphi \tag{5}$$

Da es sich um radiale Verschiebung von P handelt, bestimmen wir die Lage des Punktes P statt durch y, nun durch den Winkel α, welchen sein Halbmesser mit der Basisrichtung $A\,B$ macht, also nach Fig. 7.:

$$y - b = r\,\sin\alpha \tag{6}$$

Dieses in (4) gesetzt giebt:

$$p = r + b\,\sin\alpha \tag{7}$$

(Diese Gleichung kann man auch unmittelbar aus Fig. 7. ablesen.) Wenn wir nun differentiieren, so bleibt α konstant, also:

$$d\,p = d\,r + d\,b\,\sin\alpha \tag{8}$$

Dabei ist nach (5):

$$d\,r = -\frac{a}{2}\,\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\,\varphi \quad , \quad d\,b = -\frac{a}{2}\,\frac{1}{\sin^2\varphi}\,d\,\varphi \tag{9}$$

Wenn man dieses in (8) setzt, und zugleich wieder (5) und (6) berücksichtigt, so erhält man:

$$d\,p = -\frac{y}{\sin\varphi}\,d\,\varphi \tag{10}$$

Dieses ist die Verkürzung von p, d. h. unser gesuchtes Resultat, welches man übrigens auch noch auf eine andere Form bringen kann, es ist nämlich nach Fig. 7.:

$$B\,P = \frac{A\,B}{\sin\varphi} \sin A \qquad \text{und} \qquad y = A\,P \sin A$$

folglich wird (10):

$$d\,p = -\frac{A\,P\,.\,B\,P}{A\,B}\,d\varphi \tag{11}$$

Das Vorzeichen — bedeutet, dass bei wachsendem Winkel φ die Tangente gegen die Basis $A\,B$ hereinrückt, also p abnimmt.

Wir haben für die Tangentenverschiebung $d\,p$ zwei verschiedene Ausdrücke (10) und (11) gefunden. Je nach Umständen ist der eine oder der andere nützlicher. Wenn der Punkt P nahe an die Basis $A\,B$ heranrückt, oder in diese Basis selbst fällt, so wird der Ausdruck (10) unbestimmt, nämlich $= \frac{0}{0}$, während sachlich $d\,p$ bestimmt ist, wie aus (11) ersichtlich ist Rückt der Punkt P in die Mitte von $A\,B$, so ist $AP = BP = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ und damit wird nach (11) der besondere Wert von $d\,p$:

$$d\,p_0 = \frac{a}{4}\,d\varphi \tag{12}$$

Wir sind nunmehr im stande, jede durch Winkelmessungen ausgeführte Bestimmung eines Punktes zurückzuführen auf die Bestimmung durch den Schnitt von Geraden, deren mittlere zu fürchtende Querverschiebungen angegeben werden können.

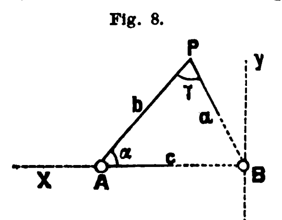
Hat man eine Winkelmessung auf einem gegebenen festen Punkte, welche als geometrischen Ort eines neuen Punktes einen Strahl liefert, so kann man dessen Querverschiebung u unmittelbar angeben, wie schon in Fig. 2. mit Gleichung (8) § 99. S. 297 gezeigt, und in § 101. S. 299 zweifach angewendet wurde.

Wenn dagegen auf einem neu zu bestimmenden Punkte selbst ein Winkel zwischen zwei Fixpunkten gemessen ist, so liefert dieser Winkel als geometrischen Ort des neuen Punktes nicht wie im vorigen Fall eine Gerade, sondern einen Kreis, welchem wir die Tangente in der Gegend des Schnittes substituieren, mit einer Querverschiebung $d\,p$, welche nach (10) oder (11) berechnet werden kann.

§ 104. Seitwärts-Einschneiden.

Wenn ein Punkt P (Fig. 8.) gegen zwei feste Punkte A und B festgelegt wird durch Messen der zwei Winkel $P\,A\,B$ und $B\,P\,A$ mit den mittleren Fehlern (δ) und (δ'), so sind zur Bestimmung von P zwei geometrische Örter vorhanden:

Fig. 8.



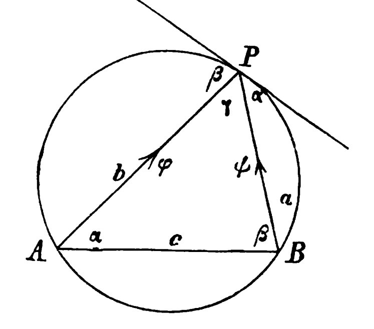
1) Die Gerade $A\,P$ mit einer mittleren Parallelverschiebung, welche in der Nähe des Punktes P gleich $= b\,(\delta)$ anzunehmen ist.

2) Ein Kreis um AB, welcher den Winkel $BPA = \gamma$ fasst; statt dieses Kreises kann seine Tangente in P in Betracht gezogen werden, indem ihre Parallelverschiebung als Funktion der Änderung (δ') des Winkels $B\,P\,A$ angegeben werden kann, diese Parallelverschiebung ist nach (11) des vorigen § 103. (s. oben):

$$\pm\, d\,p = \frac{a\,b}{c}\,(\delta')$$

Der Winkel, unter welchem sich der Strahl $A\,P$ und der Kreis in P schneiden, oder anders ausgedrückt, der Winkel, den der Strahl $A\,P$ mit der Kreistangente in P bildet, ist $=\beta$, wie aus Fig. 9. zu ersehen ist.

Fig. 9. Kreis-Tangente in P.



Folglich ist das mittlere Fehlerquadrat des Punktes P:

$$M^2 = \frac{1}{\sin^2\beta}\left\{(b\,(\delta))^2 + \left(\frac{a\,b}{c}\,(\delta')\right)^2\right\}$$

Nimmt man die beiden Winkelfehler gleich, $(\delta') = (\delta)$, so hat man nach kurzer Umformung:

$$M^2 = \frac{(\delta)}{\sin^2\gamma}\,(c^2 + a^2) \qquad (1)$$

oder wenn man wieder wie früher setzt:

$$\frac{M}{c\,(\delta)} = \mu \qquad (2)$$

so ist

$$\mu^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \qquad (3)$$

Damit lässt sich eine Untersuchung auf Minima anstellen:

Da α und γ unabhängige Veränderliche sind, so ist ersichtlich, dass das absolute Minimum von M oder μ erreicht wird mit $\alpha = 0$ und $\gamma = 90^0$, also im Punkte B, und es ist daselbst:

$$\mu_{min} = 1 \qquad (4)$$

Die Tangenten der Kurven in A und B finden sich folgendermassen: In B ist $a = 0$, also nach (3):

$$\mu^2 = \frac{1}{\sin^2\gamma'}$$

wobei γ' der Winkel ist, welchen die Tangente mit der Basisrichtung $B\,A$ bildet, also:

$$\sin\gamma' = \frac{1}{\mu} \qquad (5)$$

Je nachdem $\mu \gtreqless 1$, hat man zwei supplementäre, einen, oder keinen Wert γ', entsprechend *zwei* symmetrisch gegen $A\,B$ liegende, *eine* rechtwinklig zu $A\,B$ liegende, oder *keine* Tangente. Die Tangenten in B sind somit dieselben wie beim Vorwärts-Einschneiden (vgl. (6 c) § 101. S. 300).

Für die Tangenten in A hat man, weil hier $a = c$ wird, nach (3):

$$\mu^2 = \frac{2}{\sin^2\gamma''} \quad , \qquad \text{also } \sin\gamma'' = \frac{\sqrt{2}}{\mu}$$

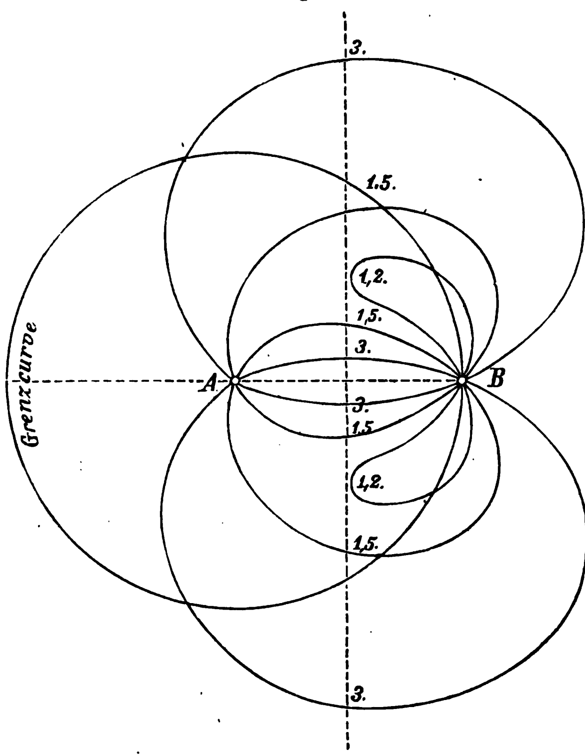
Je nachdem hier $\mu \gtreqless \sqrt{2}$, hat man *zwei, eine* oder *keine* Tangente.

Um die Kurvengleichung in rechtwinkligen Coordinaten zu entwickeln, legen wir, nach Andeutung von Fig. 8. den Ursprung des Coordinatensystems nach B und die $+\,x$-Axe nach $B\,A$; die Kurvengleichung wird dann in ähnlicher Weise aufge-

stellt, wie beim Vorwärts-Einschneiden § 101. S. 299 ausführlich gezeigt wurde. Das Resultat ist:

$$\mu^2 c^4 y^2 = c^2 [(c-x)^2 + y^2](x^2+y^2) + [(c-x)^2+y^2](x^2+y^2)^2 \qquad (6)$$

Fig. 10.
Genauigkeits-Kurven für Seitwärts-Einschneiden.
Winkelmessung in A und P.



Um die Kurven zu konstruieren, kann man zuerst ihre Schnitte mit den Ordinaten in B und in A bestimmen. Wir nehmen zuerst $x = 0$, und finden damit aus der Kurvengleichung (6) nach Zusammenziehung:

$$\mu^2 c^4 = (c^2 + y^2)^2 \qquad y = c\sqrt{\mu - 1} \qquad (7)$$

Dieses giebt:

$\mu = 1$	1,5	3	6	12
$y = 0$	0,707	1,414	2,236	3,317

Damit sind die Kurvenschnitte in der Ordinate von B in Fig. 10. aufgetragen.

Zweitens setzen wir in Gleichung (6), $x = c$, und bekommen damit eine Gleichung, welche sich ebenfalls erheblich zusammenzieht:

$$\mu^2 c^4 = 2c^4 + 3c^2 y^2 + y^4 \quad , \quad y^2 = -\frac{3}{2}c^2 \pm \frac{1}{2}c^2\sqrt{1+4\mu^2} \qquad (8)$$

Dieses giebt:

$\mu = 1$	1,5	3	6	12
$y = ..$	0,285	1,241	2,126	3,242

Damit sind die Kurvenschnitte in der Ordinate von A in Fig. 10. aufgetragen.

Sonstige Punkte lassen sich leichter mit Benutzung des in Gleichung (3) ausgesprochenen Bildungsgesetzes, als mit Hilfe der Coordinatengleichung konstruieren, und zwar wird man ähnlich verfahren, wie wir bei den Kurven für Vorwärts-Einschneiden beschrieben haben (vgl. § 101. S. 299).

Es ist nützlich, dabei zu beachten, dass je zwei Punkte, welche auf einem durch A und B gehenden Kreis liegen (γ konstant) und gleich weit von B entfernt sind, gleiche Werte von μ haben. Die auf diese Art konstruierten Kurven für $\mu = 1{,}2$, 1,5, 3 zeigt Fig. 10. So lange $\sqrt{2} > \mu > 1$, hat die Kurve ungefähr die Gestalt der für $\mu = 1{,}2$ giltigen; wenn $\mu > \sqrt{2}$ wird, so hat man die aus zwei getrennten Ästen bestehende Form, wie für $\mu = 1{,}5$, $\mu = 3$ u. s. w.

Man kann nun die Genauigkeiten für Vorwärts-Einschneiden und für Seitwärts-Einschneiden vergleichen:

$$\text{Vorwärts-Einschneiden} \qquad \mu^2 = \frac{b^2 + a^2}{\sin^2 \gamma} \tag{9}$$

$$\text{Seitwärts-Einschneiden} \qquad \mu^2 = \frac{c^2 + a^2}{\sin^2 \gamma} \tag{10}$$

Hier fällt sofort in die Augen, dass Seitwärts-Einschneiden den Vorzug verdient, wenn c kleiner als b ist, d. h. wenn der Punkt P weit von A und B entfernt ist. Ist dieses in so bedeutendem Masse der Fall, dass man näherungsweise c^2 gegen b^2 vernachlässigen kann, was zugleich in sich schliesst, dass a und b verwechselt werden dürfen, so wird:

$$\text{für Vorwärts-Einschneiden} \qquad \mu = \frac{a}{\sin \gamma} \sqrt{2} \tag{11}$$

$$\text{für Seitwärts-Einschneiden} \qquad \mu = \frac{a}{\sin \gamma} \tag{12}$$

Also giebt in diesem Falle sehr weiter Entfernung Vorwärts-Einschneiden einen $\sqrt{2}$mal so grossen Fehler, als Seitwärts-Einschneiden.

Im Übrigen findet die Vergleichung der bei Vor- und Seitwärts-Einschneiden zu befürchtenden Fehler am besten statt durch Aufeinanderlegen der betreffenden Kurven. Beobachtet man hierbei die Schnitte je zweier entsprechender Kurven für gleiche Genauigkeit, so giebt deren stetige Verbindung eine neue Kurve: die „Grenzkurve" zwischen den zwei Gebieten, in welchen die eine oder andere Operation günstiger ist. Da ein Punkt dann auf der Grenzkurve liegt, wenn für ihn die beiden Ausdrücke (9) und (10) s. oben gleich sind, so folgt, dass die Grenzkurve ein mit dem Halbmesser c um A gezogener Kreis ist, welcher in Fig. 10. gezeichnet ist. Und zwar ist im Innern des Kreises Vorwärts-Einschneiden günstiger als Seitwärts-Einschneiden, und umgekehrt.

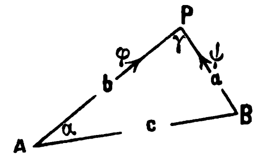
Betrachtet man die Genauigkeitskurven als Horizontalkurven krummer Flächen (wie wir zur Veranschaulichung des Konstruktionsprinzips gethan haben), so hat man die Grenzkurve aufzufassen als Horizontalprojektion der Schnittlinie zweier solcher Flächen.

§ 105. Mittlere Coordinatenfehler für Seitwärts-Einschneiden.

Der Punkt P (Fig. 11 a.) ist von der Basis $AB = c$ aus bestimmt durch Messung der zwei Winkel α und γ, folglich ist die Abscisse von P, bezogen auf B, ausgedrückt durch:

$$x = a \cos\psi = \frac{c}{\sin\gamma} \sin\alpha \cos\psi \tag{1}$$

Fig. 11 a.
Gemessen α und γ.



Das Azimut ψ muss in den gemessenen Winkeln γ und α ausgedrückt werden, es ist zunächst:

$$\psi = (B\,A) + B$$

wenn $(B\,A)$ das Azimut der Seite $B\,A$, und B der Winkel in B ist. Dieser Winkel B ist nicht gemessen, es ist daher zu setzen:

$B = 180^0 - (\alpha + \gamma)$, also $\psi = (B\,A) + 180^0 - (\alpha + \gamma)$

$$\frac{d\psi}{d\gamma} = -1 \qquad \frac{d\psi}{d\alpha} = -1$$

Berücksichtigt man dieses in (1), so wird:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = c \sin\alpha \left(-\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\cos\psi + \frac{\sin\psi}{\sin\gamma}\right) = \frac{a}{\sin\gamma}(-\cos\gamma\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi)$$

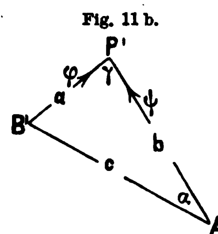
Es ist aber $\gamma = \varphi - \psi \quad , \quad \cos\varphi = \cos(\gamma + \psi)$

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{a}{\sin\gamma}\cos\varphi \tag{2}$$

Auf gleiche Weise bildet man aus (1) auch:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}(\cos\alpha\cos\psi + \sin\alpha\sin\psi) = \frac{c}{\sin\gamma}\cos(\psi - \alpha) \tag{3}$$

Fig. 11 b.



Um dieses umzuformen, betrachten wir in Fig. 11 b. ein Dreieck $A'\,B'\,P'$, welches dieselben Azimute φ und ψ hat wie Fig. 11 a., wobei aber die Seiten a und b gegen Fig. 11 a. verwechselt sind. Dann ist $\psi - \alpha$ das Azimut der Seite $A'\,B'$, und wenn man die 3 Seiten $a\ b\ c$ auf die x-Achse projiciert, so ist:

$$c \cos(A'\,B') + a\cos\varphi - b\cos\psi = 0$$
$$c \cos(\psi - \alpha) + a\cos\varphi - b\cos\psi = 0 \tag{4}$$

Damit wird (3):

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{b\cos\psi - a\cos\varphi}{\sin\gamma} \tag{5}$$

Aus (2) und (5) bildet man das totale Differential:

$$d\,x = \left(-\frac{a}{\sin\gamma}\cos\varphi\right) d\gamma + \left(\frac{b\cos\psi - a\cos\varphi}{\sin\gamma}\right) d\alpha$$

Geht man von den Differentialen zu mittleren Fehlern über, und setzt die mittleren Winkelfehler für γ und für α beide $= \pm(\delta)$, so wird:

$$(M_x)^2 = \frac{a^2\cos^2\varphi + (b\cos\psi - a\cos\varphi)^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2$$

$$(M_x)^2 = \frac{2\,a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\psi - 2\,a\,b\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \tag{6}$$

Auf ähnliche Weise ist der Ausdruck für die Ordinate gebildet:

$$(M_y)^2 = \frac{2\,a^2\sin^2\varphi + b^2\sin^2\psi - 2\,a\,b\sin\varphi\sin\psi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \tag{7}$$

Diese beiden Gleichungen (6) und (7) zusammen geben:

$$(M_x)^2 + (M_y)^2 = M^2 = \frac{2\,a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\varphi - \psi)}{\sin^2\gamma}(\delta)^2$$

Es ist aber $\varphi - \psi = \gamma$ und $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$, folglich:

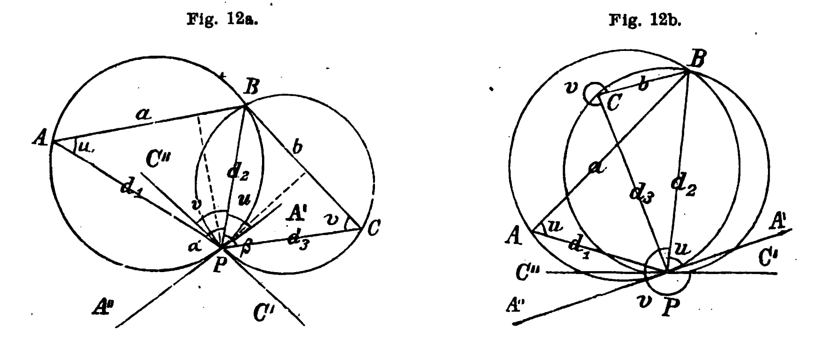
$$M^2 = \frac{a^2 + c^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \tag{8}$$

Dieses stimmt mit (1) § 104. S. 307 überein, wie es sein soll.

§ 106. Pothenotische Bestimmung mit zwei Winkeln.

Ein Punkt P wird gegen drei gegebene Punkte ABC festgelegt durch Messen der zwei Winkel $APB = \alpha$ und $BPC = \beta$, dann hat man zur Bestimmung von P zwei geometrische Örter, nämlich die zwei Kreise, welche um AB und BC beschrieben werden, bzw. die Winkel α und β fassen, und sich in P schneiden.

Fig. 12a. Fig. 12b.



Um den mittleren Fehler M des Schnittpunktes P zu bestimmen, hat man die Kreistangenten in P zu betrachten. Wenn m_1 und m_2 deren mittlere Querverschiebungen sind, und σ der Schnittwinkel der Tangenten, so hat man nach der Grundformel (5) § 99. S. 297:

$$M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2\sigma} \tag{1}$$

Die Werte m_1 und m_2 sind durch (10) oder (11) § 103. S. 305—306 vorbereitet, nämlich:

$$\pm m_1 = \frac{p}{\sin\alpha}(\delta) \quad \text{und} \quad \pm m_2 = \frac{q}{\sin\beta}(\delta') \tag{2}$$

wenn mit p und q die Abstände von P rechtwinklig von AB und BC gemessen sind (in Fig. 12a. sind die Linien für p und q punktiert gezogen).

Mit (δ) und (δ') sind in (2) die mittleren Messungsfehler der zwei gemessenen Winkel α und β bezeichnet.

Es handelt sich nun weiter um den Tangentenschnittwinkel σ. Um σ allgemein anzugeben, muss man zwei verschiedene Fälle der Lage von ABC gegen P betrachten, welche in Fig. 12a. und 12b. dargestellt sind. Wenn eine sich um P drehende Gerade die drei Punkte in der Aufeinanderfolge ABC oder CBA trifft, so hat man im wesentlichen die Fig. 12a., in jedem andern Falle hat man die Fig. 12b.

Bezeichnet man nun konsequent im positiven Sinne drehend

$$BAP = u \quad \text{und} \quad PCB = v$$

und zieht man die beiden Kreistangenten in P, nämlich PA' und PC', so wird man die soeben genannten Winkel u und v zwischen diesen Kreistangenten wieder finden. Es ist nämlich für Fig. 12a. und Fig. 12b. gemeinsam:

$$BPA' = u \quad , \quad C''PB = v$$

Also ist der Schnittwinkel σ der beiden Kreistangenten:

$$\sigma = u + v \tag{3}$$

wo u und v die stets bekannten Winkel bei A und C sind.

Setzt man dieses σ nebst (2) in die Fehlerformel (1), so hat man:

$$M^2 = \frac{1}{\sin^2(u+v)} \left(\frac{p^2}{\sin^2\alpha}(\delta)^2 + \frac{q^2}{\sin^2\beta}(\delta')^2\right) \tag{4}$$

und insbesondere mit $(\delta) = (\delta')$:

$$M^2 = \frac{(\delta^2)}{\sin^2(u+v)} \left(\frac{p^2}{\sin^2\alpha} + \frac{q^2}{\sin^2\beta}\right) \tag{5}$$

Diesem Ausdruck kann man auch noch eine zweite Form geben, denn es ist:

$$\frac{p}{\sin\alpha} = \frac{d_1 d_2}{a} \quad , \quad \frac{q}{\sin\beta} = \frac{d_2 d_3}{b} \tag{6}$$

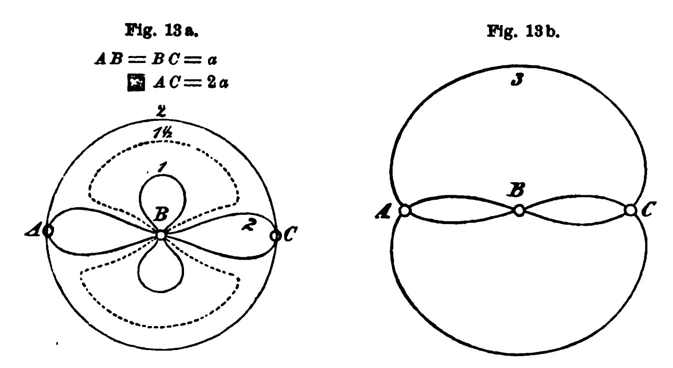
wie schon bei (10) und (11) § 103. S. 306 gezeigt wurde. Damit wird (5):

$$M^2 = \frac{(\delta)^2}{\sin^2(u+v)} \left(\left(\frac{d_1 d_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{d_2 d_3}{b}\right)^2\right) \tag{7}$$

Die Formeln (5) und (7) bestätigen zuerst die bekannte Thatsache, dass $M = \infty$ wird, wenn $\sin(u+v) = 0$ wird, d. h. wenn P auf dem um ABC gehenden Kreis liegt; die Formeln (5) und (7) zeigen ferner, was ebenfalls klar ist, dass $M = \infty$, wenn p und $q = \infty$, oder wenn d_1 d_2 und $d_3 = \infty$, d. h. wenn alle drei gegebenen Punkte im Unendlichen liegen. Wenn nur *einer* der gegebenen Punkte im Unendlichen liegt, so nimmt man ihn, wenn man zwei Winkel misst, in die Mitte B, und da hiebei p und q endlich bleiben, so bleibt auch M endlich. Es kann also einer der drei pothenotischen Zielpunkte sehr weit entfernt sein, ohne dass dadurch die Bestimmung schlecht wird.

§ 107. Pothenotische Genauigkeitskurven für einen einfachen Fall.

Wir nehmen den besonderen Fall, dass die drei pothenotischen Zielpunkte A, B und C in gleichen Abständen $AB = BC$ auf einer Geraden ABC liegen, wie in Fig. 13a. und Fig. 13b. angegeben ist.



In diesem besonderen Falle ist in der Gleichung (5) § 106. (s. o.) zu setzen: $u + v = 180° - (\alpha + \beta)$; $p = q = y$, d. h. Abstand von der Geraden ABC.

Damit geht (5) über in:

$$M = \frac{(\delta)}{\sin(\alpha + \beta)} y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \beta} \tag{1}$$

Um für die Gleichung der Genauigkeitskurven ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu erhalten, nehmen wir an, es sei die Mitte B der Ursprung, und BA die x-Axe, dann findet sich mit $AB = BC = a$:

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha + \beta)} = \frac{(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4 a^2 x^2}{4 a^2 y^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} = 2 \frac{x^2 + y^2}{a^2 y^2} (x^2 + y^2 + a^2)$$

und damit die Kurvengleichung:

$$2 \mu^2 a^6 y^2 = (a^2 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2) \left\{(a^2 + x^2 + y^2)^2 - 4 a^2 x^2\right\} \tag{2}$$

wobei, wie früher, $$\mu = \frac{M}{a(\delta)}. \tag{3}$$

Die Gleichung (2) zeigt, dass A B und C Doppelpunkte der Kurve sind, und dass ausser ihnen kein Punkt der Geraden ABC auf der Kurve liegt. Um die Kurvenschnitte mit der y-Axe zu untersuchen, hat man die Gleichung (2) mit $x = 0$:

$$2 \mu^2 a^6 y^2 = y^2 (a^2 + y^2)(a^2 + y^2)^2$$

Diese Gleichung giebt, nach y aufgelöst, zunächst $y^2 = 0$, d. h. zweimal $y = 0$ (Doppelpunkt), ferner:

$$2 \mu^2 a^6 = (a^2 + y^2)^3 \quad , \quad y^2 = a^2 (-1 + \sqrt[3]{2 \mu^2}) \tag{4}$$

Will man reelle Werte y, so muss $2 \mu^2 > 1$ sein oder man hat den Grenzfall:

$$\mu_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707 \tag{5}$$

Die Kurvengleichung (2) lässt sich in folgende zweite Form bringen:

$$(x^2 + y^2 - a^2)\left\{(x^2 + y^2)^3 + a^2 y^2 (4 y^2 + 7 a^2) - a^2 x^2 (a^2 - 4 y^2)\right\} - 2 a^6 y^2 (\mu^2 - 4) = 0 \tag{6}$$

Aus der Form des Produkts ergiebt sich, dass mit $\mu = 2$ die Kurve zerfällt in einen Kreis um B mit dem Halbmesser a und in eine Kurve sechsten Grades, deren Gleichung ist:

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (a^2 - 4 y^2) - a^2 y^2 (7 a^2 + 4 y^2) \tag{7}$$

Dass der Kreis um den Durchmesser AC ein besonderer Fall unserer Kurven ist, konnte schon aus der Gleichung (1) ersehen werden, denn es wird dann $\alpha + \beta = 90°$, $y \operatorname{cosec} \alpha = PA$, $y \operatorname{cosec} \beta = PB$, also $y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \beta} = 2 a$.

Die Schwesterkurve des Kreises, deren Gleichung in (7) gegeben ist, giebt eine ∞ artige Form, welche in Fig. 13a. mit 2 bezeichnet ist.

Wir haben nun noch verschiedene Kurven bestimmt, und zwar haben wir zuerst nach der Gleichung (4) die Schnitte mit der y-Axe berechnet.

Weiter schreiben wir mit

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Kurvengleichung (2) in diese Form:

$$2 \mu^2 a^6 y^2 = (a^2 + r^2) r^2 \left\{(a^2 + r^2)^2 - 4 a^2 x^2\right\}$$

Nun berechneten wir einzelne Werte $(a^2 + r^2) r^2$ und $(a^2 + r^2)^2$ und zeichneten die diese Funktionen darstellenden Kurven, mit deren Hilfe sich dann die Genauigkeits-

kurven empierisch konstruieren liesen Die so entstandenen Kurven für $\mu = 1$, $1\frac{1}{2}$, 2, 3 sind in Fig. 13a. und Fig. 13b. S. 312 gezeichnet.

So lange μ zwischen 0,707 und 2 liegt, besteht die Kurve in einer hochstehenden 8, welche mit $\mu = 2$ in die schon bei (7) erwähnte liegende ∞ und einen Kreis übergeht, während für jeden Wert $\mu > 2$ eine bretzelartige, in *einem* Zug zu durchfahrende Kurve, ähnlich der für $\mu = 3$ in Fig. 13b. S. 312 gezeichneten, entsteht.

In praktischer Beziehung ist zu bemerken, dass die Bestimmungen in unmittelbarer Nähe eines der drei gegebenen Punkte sehr gut sind, sofern man sich vor bedeutender Annäherung an die Gerade ABC hütet, welche hier an Stelle des in anderen Fällen pothenotischer Bestimmung gefährlichen Kreises tritt. Wenn die Wahl des Standpunktes in der Nähe eines der drei Punkte einigermassen willkürlich ist, so hat man sich möglichst in der Ordinate von A, B oder C aufzustellen.

Anmerkung.

Ein zweiter besonderer Fall, wobei das Basisdreieck ABC gleichschenklig rechtwinklig ist, findet sich mit Zeichnung der Genauigkeitskurven in der oben zitierten Abhandlung des Verfassers in *Schlömilchs* Zeitschr. f. M. u. Ph. 1871 S. 411—413.

§ 108. Vergleichung von Vorwärts-Einschneiden, Seitwärts-Einschneiden und Rückwärts-Einschneiden.

Nachdem wir Vorwärts-Einschneiden und Seitwärts-Einschneiden unter sich verglichen haben (s. (9) und (10) § 104. S. 309), können wir nun auch Rückwärts-Einschneiden über derselben Basis zuziehen.

Das heisst, wir haben für Fig. 14.:

Fig. 14.

Vorwärts, gemessen α u. β $$M_v = \frac{(\delta)}{\sin\gamma}\sqrt{r^2 + r'^2} \quad (1)$$

Seitwärts „ α „ γ $$M_s = \frac{(\delta)}{\sin\gamma}\sqrt{c^2 + r'^2} \quad (2)$$

Rückwärts „ α' „ β' $$M_r = \frac{(\delta)}{\sin\gamma}\sqrt{\left(\frac{y}{\sin\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sin\beta'}\right)^2} \quad (3)$$

Der Kreis um den Durchmesser AB ist gemeinsame Genauigkeitskurve für (1) und für (3), denn wenn P auf diesen Kreis fällt, so wird zunächst $\gamma = 90°$, $\alpha' = \beta$ und $\beta' = \alpha$, und dann:

$$\sqrt{\left(\frac{y}{\sin\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sin\beta'}\right)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} = c \quad (4)$$

Auf dem Kreis um AB sind also Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden gleich genau.

Die Vergleichung von Vorwärts- und Seitwärts-Einschneiden hat in Fig. 10. § 104. S. 308 auf einen anderen Kreis, mit dem Mittelpunkt A geführt.

Wir wollen nun noch annehmen, der zu bestimmende Punkt rücke in Fig. 14. in der Mittelsenkrechten CP' *sehr weit* hinaus, dann verschwindet a gegen r, y, r und r' gelten als gleich, und es wird:

$$\frac{y}{\sin\alpha'} = \frac{y}{a}\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{y}{a}r \quad \text{oder} \quad = \frac{r^2}{a}$$

dann bekommen (1) (2) (3) folgende Verhältnisse:

$$M_v : M_s : M_r = \sqrt{2} : 1 : \sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{a}} \tag{6}$$

Da r erheblich grösser als a sein soll, ist M_r weitaus am grössten. Oder es ist hiernach pothenotische Bestimmung in sehr weiter Entfernung P' sehr ungünstig.

Trotzdem legt man bei Basisnetzen (wo $AB = c$ unmittelbar gemessen ist) gerade auf die spitzen Winkel α' β' γ, welche der Basis gegenüber liegen, am meisten Gewicht.

Dieses widerspricht unserer Formel (3) nicht, verlangt aber eine Zurechtlegung: Die Formel (3) giebt den mittleren *Gesamt*fehler von P, und dieser hat zwei sehr ungleiche Komponenten, eine kleine in der Richtung y und eine sehr grosse in der Richtung x rechtwinklig zu y. Wenn also für manche Zwecke nur die y-Komponente in Betracht kommt, so kann die Bestimmung durch die Winkel α' und β' sehr gut sein, obgleich der Gesamtfehler durch die x-Komponente sehr gross wird. Man kann die Ungunst dieser x-Komponente leicht beseitigen, wenn man einen der Winkel α und β mit misst. Das ist die Bedeutung des in (6) sehr günstig auftretenden Wertes M_s für Seitwärts-Einschneiden.

§ 109. Mittlerer Fehler eines mehrfach eingeschnittenen Punktes.

Es handelt sich um die Auflösung der Aufgabe: den mittleren Fehler eines Punktes zu berechnen, dessen Lage nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurde aus mehr als zwei Beobachtungen, deren jede einen geometrischen Ort des Punktes liefert.

Insofern jedem geometrischen Ort (Kurve) in der Nähe des fraglichen Schnittpunktes die Tangente substituiert werden kann, können wir von „mehrfachem Einschneiden" reden.

Der Tangenten-Betrachtung entsprechend können wir auch von Anfang an lineare Fehlergleichungen zur Punktverbesserung annehmen, d. h., indem wir von irgend welchen Näherungs-Coordinaten (X) und (Y) des mehrfach eingeschnittenen Punktes ausgehen, sollen für die Verbesserungen x und y der Näherungs-Coordinaten folgende Fehlergleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + l_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right\} \tag{1}$$

Dann verlangt die Methode der kleinsten Quadrate, dass x und y zu bestimmen sind aus den zwei Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

wobei gleichgewichtige Messungen vorausgesetzt sind.

Bei der Auflösung dieser zwei Gleichungen findet man auch die Gewichte von x und von y, nämlich nach (14) § 16. S. 42:

$$p_x = \frac{D}{[b\,b]} \qquad p_y = \frac{D}{[a\,a]} \tag{3}$$

wobei gesetzt ist:

$$[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] = D \tag{4}$$

Führt man den mittleren Gewichtseinheitsfehler $=(\delta)$ ein, so hat man auch die mittleren Fehlerquadrate von x und von y nach der Ausgleichung:

$$(M_x)^2 = \frac{[b\,b]}{D}\,(\delta)^2 \qquad (M_y)^2 = \frac{[a\,a]}{D}\,(\delta)^2 \tag{5}$$

Hieraus bilden wir auch das mittlere Fehlerquadrat M^2 überhaupt:

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 = \frac{[a\,a] + [b\,b]}{D}\,(\delta)^2 \tag{6}$$

oder ausführlich:

$$M^2 = \frac{[a\,a] + [b\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]}\,(\delta)^2 \tag{6a}$$

Dieser letztere Wert ist unabhängig von der Lage des Coordinatensystems (invariant), was wir durch Coordinaten-Transformation zeigen werden.

Wir setzen zu diesem Zweck, entsprechend Fig. 15.:

Fig. 15. Coordinaten-Transformation.

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \\ y &= x' \sin\psi + y' \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Damit wird ein einzelner Wert v von (1):

$$v = a'\,x' + b'\,y' + l$$

wobei a' und b' diese Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} a' &= a \cos\psi + b \sin\psi \\ b' &= b \cos\psi - a \sin\psi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und im neuen Coordinatensystem x' y' hat man entsprechend (6a):

$$M'^2 = \frac{[a'\,a'] + [b'\,b']}{[a'\,a']\,[b'\,b'] - [a'\,b']\,[a'\,b']}\,(\delta) = \frac{[a'\,a'] + [b'\,b']}{D'}\,(\delta)^2 \tag{9}$$

Aus (8) bildet man:

$$\left.\begin{aligned} [a'\,a'] &= [a\,a] \cos^2\psi + [b\,b] \sin^2\psi + 2\,[a\,b] \sin\psi \cos\psi \\ [b'\,b'] &= [a\,a] \sin^2\psi + [b\,b] \cos^2\psi - 2\,[a\,b] \sin\psi \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$[a'\,b'] = [a\,b] \cos^2\psi - [a\,a] \sin\psi \cos\psi + [b\,b] \sin\psi \cos\psi - [a\,b] \sin^2\psi \tag{11}$$

Nun überzeugt man sich, dass der Zähler von (9) bei der Drehung des Coordinatensystems unverändert bleibt, denn die Addition von (10) giebt:

$$[a'\,a'] + [b'\,b'] = [a\,a] + [b\,b]$$

Aber auch der Nenner von (9) ist dem Nenner in (6) gleich geblieben.

Die Entwicklung des Nenners $D' = [a'\,a']\,[b'\,b'] - [a'\,b']\,[a'\,b']$ führt nämlich zunächst auf 19 Glieder, lässt sich dann aber so zusammenfassen:

$$D' = ([a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b])\,(\sin^4\psi + 2\sin^2\psi\cos^2\psi + \cos^4\psi) = D$$

Es ist also nun bewiesen, dass der mittlere Fehler M nach der Bestimmung von (6) oder (9) ein von der Lage des Coordinatensystems unabhängiges Genauigkeitsmass ist.

Die Fehler M_x und M_y selbst aber (s. o. (5)) sind mit der Lage des Coordinatensystems veränderlich, und man kann nach deren Maximal- und Minimalwerten fragen.

Da der Nenner D in (5) konstant ist, wie soeben gezeigt wurde, so hat man zur Beantwortung der Maximums- und Minimumsfrage nur die Zähler $[a\,a]$ und $[b\,b]$ von (5) mit Rücksicht auf die Drehung des Systems zu untersuchen, d. h. man hat die Summen $[a'\,a']$ und $[b'\,b']$ in (10) nach ψ zu differentiieren.

Man erhält dadurch:

$$\frac{d\,[a'\,a']}{d\psi} = -\,([a\,a] - [b\,b]) \sin 2\psi + 2\,[a\,b] \cos 2\varphi \tag{12}$$

$$\frac{d\,[b'\,b']}{d\psi} = +\,([a\,a] - [b\,b]) \sin 2\psi - 2\,[a\,b] \cos 2\varphi \tag{13}$$

Setzt man diese Differentialquotienten gleich Null, so geben sie *beide* zur Bestimmung von ψ die Gleichung:

$$tang\, 2\,\psi = \frac{2\,[a\,b]}{[a\,a] - [b\,b]} \tag{14}$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln von der Form $2\,\psi$ und $2\,\psi \pm 180°$, also ψ und $\psi \pm 90°$, d. h. die Gleichung (14) bestimmt *zwei* aufeinander rechtwinklig stehende Richtungen, welche dem Maximum oder dem Minimum von M_x bzw. M_y entsprechen. Jeder der beiden Werte ψ giebt zwei Werte M_x und zwei Werte M_y, so dass man es mit vier Werten zu thun hat.

Vorbehältlich einer nachher zu treffenden Auswahl (s. S. 318 Gl. (23)—(25) u. ff.) rechnen wir mit der Gleichung (14) weiter.

Indem wir die Maximal- oder Minimalwerte von M_x und M_y mit M_1 und M_2 bezeichnen (ohne jetzt schon zu entscheiden, welches Maximum oder Minimum ist), haben wir aus (5) und (10), mit Rücksicht auf Unveränderlichkeit des Nenners D:

$$x')\quad \frac{M_1^2}{(\delta)^2} = \frac{[b'\,b']}{D} = \frac{[a\,a]\,sin^2\,\psi + [b\,b]\,cos^2\,\psi - 2\,[a\,b]\,sin\,\psi\,cos\,\psi}{D} \tag{15$_1$}$$

$$y')\quad \frac{M_2^2}{(\delta)^2} = \frac{[a'\,a']}{D} = \frac{[a\,a]\,cos^2\,\psi + [b\,b]\,sin^2\,\psi + 2\,[a\,b]\,cos\,\psi\,sin\,\psi}{D} \tag{15$_2$}$$

Um die hiezu nötigen Funktionen von ψ aus (14) herzuleiten, nehmen wir:

$$sec^2\,2\,\psi = 1 + tang^2\,2\,\psi \quad , \quad cosec^2\,2\,\psi = 1 + cotg^2\,2\,\psi$$

$$sec^2\,2\,\psi = \frac{([a\,a] - [b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2}{([a\,a] - [b\,b])^2} \quad , \quad cosec^2\,2\,\psi = \frac{([a\,a] - [b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2}{4\,[a\,b]^2}$$

indem gesetzt wird:

$$\sqrt{([a\,a] - [b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2} = W \tag{16}$$

erhält man:

$$cos\,2\,\psi = \frac{[a\,a] - [b\,b]}{W} \qquad sin\,2\,\psi = \frac{2\,[a\,b]}{W} \tag{17}$$

$$cos^2\,\psi = \frac{1 + cos\,2\,\psi}{2} = \frac{W + [a\,a] - [b\,b]}{2\,W} \tag{18}$$

$$sin^2\,\psi = \frac{1 - cos\,2\,\psi}{2} = \frac{W - [a\,a] + [b\,b]}{2\,W} \tag{19}$$

Wenn man nun die Zähler in (15$_1$) und (15$_2$) bildet, so wird man bald finden, dass der Faktor W sich im Zähler und im Nenner ausscheiden lässt, so dass man schliesslich hat:

$$[a'\,a'] = \frac{[a\,a] + [b\,b] + W}{2} \qquad [b\,b'] = \frac{[a\,a] + [b\,b] - W}{2} \tag{20}$$

$$M_1^2 = (\delta)^2\,\frac{[a\,a] + [b\,b] - W}{2\,D} \qquad M_2^2 = (\delta)^2\,\frac{[a\,a] + [b\,b] + W}{2\,D} \tag{21}$$

Die Summe giebt wieder:

$$M_1^2 + M_2^2 = (\delta)^2\,\frac{[a\,a] + [b\,b]}{D}$$

wie es nach (6a) sein soll.

Nun kann man auch wieder umgekehrt M_x^2 und M_y^2 in M_1^2 und M_2^2 ausdrücken, nämlich:

$$(M_x)^2 = M_1^2\,cos^2\,\psi + M_2^2\,sin^2\,\psi \qquad (M_y)^2 = M_1^2\,sin^2\,\psi + M_x^2\,cos^2\,\psi \tag{22}$$

wie man aus (21) nebst (18) und (19) durch Vergleichung mit (5) findet.

Es ist bei (14) noch eine Frage der Vorzeichen und Quadranten unerledigt geblieben, wozu noch die Frage nach dem Vorzeichen von W in (16) kommt.

Ob in (21) M_1 oder M_2 das Maximum ist, entscheidet man am besten dadurch, dass man festsetzt, es soll W stets positiv oder absolut genommen werden. Damit ist der Quadrant von 2ψ entschieden; man hat dann dieselben Regeln wie in der ebenen Coordinaten-Rechnung, d. h. es ist 2ψ im I., II., III., IV. Quadranten, wenn der Bruch in (14) die Vorzeichen-Kombination bzw. hat:

$$\frac{+}{+} \quad \frac{+}{-} \quad \frac{-}{-} \quad \frac{-}{+}.$$

Damit hat man im Zusammenhang:

$$tang\, 2\psi = \frac{2[ab]}{[aa]-[bb]} \tag{23}$$

$$W = \frac{2[ab]}{sin\, 2\psi} = \frac{[aa]-[bb]}{cos\, 2\psi} = \sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2} \tag{24}$$

$$(M_x')^2 = M_1^2 = (\delta)^2 \frac{[aa]+[bb]-W}{2D} \qquad (M_y')^2 = M_2^2 = (\delta)^2 \frac{[aa]+[bb]+W}{2D} \tag{25}$$

Minimum, zu ψ gehörig. Maximum, zu $\psi \pm 90°$ gehörig.

Zur Vorbereitung der Übereinstimmung mit Formeln, die sich später (in § 123.) von selbst ergeben werden, nehmen wir aber jetzt noch eine Änderung der Bezeichnung vor. Wir wollen setzen:

$$\psi = \Theta - 90^0 \quad , \quad 2\psi = 2\Theta - 180^0 \tag{26}$$

$$tang\, 2\Theta = \frac{-2[ab]}{-([aa]-[bb])} \tag{27}$$

d. h. wenn ψ das Azimut des Minimums M_1 war, so wird nun Θ das Azimut des Maximums M_2. W soll wieder absolut gelten, und dann haben wir im Zusammenhang folgende Formeln:

$$tang\, 2\Theta = \frac{-2[ab]}{-([aa]-[bb])} \tag{28}$$

$$W = \frac{-2[ab]}{sin\, 2\Theta} = \frac{-([aa]-[bb])}{cos\, 2\Theta} = \sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab]^2} \tag{29}$$

$$M_2^2 = (\delta)^2 \frac{[aa]+[bb]+W}{2D} = A^2 \qquad M_1^2 = (\delta)^2 \frac{[aa]+[bb]-W}{2D} = B^2 \tag{30}$$

Maximum, zu Θ gehörig. Minimum, zu $\Theta \pm 90^0$ gehörig.

Diese Verhältnisse sind in Fig. 16. S. 319 dargestellt:

$+X$ und $+Y$ sind die ursprünglich benützten Coordinaten-Richtungen. Die Ausgleichung hat den Punkt O festgelegt mit den mittleren Fehlern:

$$OM = \pm M_x \qquad ON = \pm M_y \tag{31}$$

Hätte man andere Coordinaten-Richtungen zu Grunde gelegt (mit denselben Beobachtungen), etwa die Coordinaten-Richtungen OM' und ON', so würden die mittleren Coordinatenfehler andere geworden sein, etwa

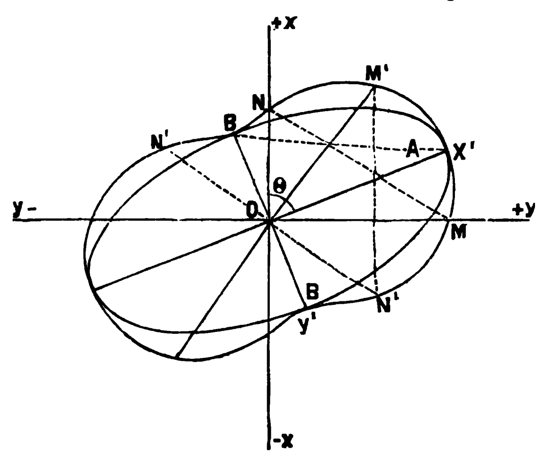
$$OM' = \pm M_\xi \qquad ON' = \pm M_\eta$$

Unter allen Lagen des Coordinaten-Systems giebt es eine ausgezeichnete Lage $X'Y'$, welche auf X' das Maximum $M_2 = A$ und auf Y' das Minimum $M_1 = B$, nach den Formeln (30), hat.

Alle so bestimmten Punkte M, N, M', N' u. s. w. liegen auf einer zweifach symmetrischen Kurve, welche man nach dem Gesetz der Gleichungen (22) konstruieren

kann. Diese Kurve, welche in Fig. 16. gezeichnet ist, hat auch eine einfache geometrische Beziehung zu der *Ellipse*, welche mit den Halbaxen $M_2 = A$ und $M_1 = B$ konstruiert werden kann.

Fig. 16.
Kurve der mittleren Fehler und Fehler-Ellipse.



Die Kurve der mittleren Fehler ist nämlich die sogenannte Fusspunkts-Kurve der Ellipse, d. h. sie ist der geometrische Ort der Fusspunkte aller Senkrechten, welche man aus dem Ellipsenmittelpunkt auf sämtliche Ellipsen-Tangenten fällen kann.

(Man kann diesen Satz, welcher mit unserer Fehlertheorie in weiter keiner Beziehung steht, einfach beweisen.)

Die Gleichung der Fusspunkts-Kurven ist in (22) enthalten, d. h. mit Einführung von Θ nach (26) in den Gleichungen:

$$(M_x)^2 = M_1^2 \sin^2 \Theta + M_2^2 \cos^2 \Theta \qquad (M_y)^2 = M_1^2 \cos^2 \Theta + M_2^2 \sin^2 \Theta \tag{32}$$

oder:

$$R^2 = A^2 \cos^2 \Theta' + B^2 \sin^2 \Theta' \tag{33}$$

Diese eine Gleichung, mit etwas anderen Zeichen, sagt dasselbe, wie die zwei Gleichungen (32) nämlich:

Wenn A und B die Ellipsen-Halbaxen, oder bzw. die Maximal- und Minimalfehler sind, und Θ' das Azimut irgend einer Richtung (R), gezählt von der grossen Halbaxe A aus, so ist der mittlere Fehler R für diese Richtung (R) durch die Gleichung (33) bestimmt.

Irgend zwei aufeinander rechtwinklige Werte R, etwa R_1 und R_2, geben immer die Gleichung:

$$R_1^2 + R_2^2 = A^2 + B^2 = M^2 \tag{34}$$

oder geometrisch: Alle Hypotenusen in Fig. 16. z. B. MN, $M'N'$ u. s. w. sind einander gleich, wornach man die Kurve Fig. 16. zum Teil konstruieren kann.

§ 110. Einfache Triangulierung.

In Fig. 17. soll der Punkt P über der Basis AB bestimmt sein durch Messung der 3 Winkel α β γ.

Fig. 17.
Gemessen α, β, γ.

Da wir die Winkelgewichte als gleich annehmen, besteht die Ausgleichung lediglich darin, dass man den Winkelwiderspruch $\alpha + \beta + \gamma - 180^0$ auf die 3 Winkel gleich verteilt, und dann die Coordinaten von P eindeutig berechnet.

Um die Genauigkeit der Lage von P zu bestimmen, verfahren wir nach unserem früheren § 55., und finden dort in (7) S. 131 eine Beziehung, welche auf Fig. 17. angewendet giebt:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= -\frac{\sin\varphi}{b}\,x + \frac{\cos\varphi}{b}\,y \\ d\psi &= -\frac{\sin\psi}{a}\,x + \frac{\cos\psi}{a}\,y \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aus den Azimutänderungen $d\varphi$ und $d\psi$ setzen sich die Winkeländerungen zusammen:

$$d\alpha = -d\varphi \qquad d\beta = +d\psi \qquad d\gamma = d\varphi - d\psi \tag{2}$$

Die Fehlergleichungen für die drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ werden daher folgende Form haben:

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= +\frac{\sin\varphi}{b}\,x - \frac{\cos\varphi}{b}\,y + l_1 & &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_\beta &= -\frac{\sin\psi}{a}\,x + \frac{\cos\psi}{a}\,y + l_2 & &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_\gamma &= \left(-\frac{\sin\varphi}{b} + \frac{\sin\psi}{a}\right) x + \left(\frac{\cos\varphi}{b} - \frac{\cos\psi}{a}\right) y + l_3 & &= a_3 x + b_3 y + l_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Damit wird:

$$[a\,a] = \frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\psi}{a^2} + \left(\frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\psi}{a^2} - 2\,\frac{\sin\varphi\sin\psi}{a\,b}\right)$$

Alle drei Summen-Coëfficienten sind:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a] &= 2\left(\frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\psi}{a^2} - \frac{\sin\varphi\sin\psi}{a\,b}\right) \\ [b\,b] &= 2\left(\frac{\cos 2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\psi}{a^2} - \frac{\cos\varphi\cos\psi}{a\,b}\right) \\ [a\,b] &= \left(\frac{\sin\psi}{a} - \frac{\sin\varphi}{b}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{b} - \frac{\cos\psi}{a}\right) - \frac{\sin\psi\cos\psi}{a^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{b^2} \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

Bei der Vereinigung dieser Summen nach Vorschrift von (4) § 109. S. 315 giebt es erhebliche Vereinfachung, indem $D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$ sich von 19 Gliedern auf 3 reduziert, welche ein volles Quadrat bilden, so dass man schliesslich hat:

$$\begin{aligned} D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] &= 3\left(\frac{\cos\varphi\sin\psi}{b\quad a} - \frac{\cos\psi\sin\varphi}{a\quad b}\right)^2 \\ &= 3\,\frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{a^2\,b^2} = 3\,\frac{\sin^2\gamma}{a^2\,b^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Damit erhält man die mittleren Coordinatenfehler nach (5) § 109. S. 316:

$$\left.\begin{aligned} M_x^2 &= \frac{2}{3}\,\frac{b^2\cos^2\psi + a^2\cos^2\varphi - b\,a\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \\ M_y^2 &= \frac{2}{3}\,\frac{b^2\sin^2\psi + a^2\sin^2\varphi - b\,a\sin\varphi\sin\psi}{\sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Summe giebt:

$$M_x^2 + M_y^2 = M^2 = \frac{1}{3\,sin^2\gamma}\left\{2\,b^2 + 2\,a^2 - 2\,a\,b\,cos\,(\varphi - \psi)\right\}$$

Es ist aber $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,\gamma = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,(\varphi - \psi)$

Also:

$$M^2 = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{3\,sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \qquad (6)$$

Es sollen nun Genauigkeits-Kurven konstruiert werden. Wenn man ein Coordinatensystem mit der Mitte von $A\,B$ als Ursprung, mit x in der Richtung $B\,A$, und mit y in der Mittelsenkrechten nimmt, d. h. ebenso wie bei Vorwärts-Einschneiden § 101. S. 299, so bekommt man die Kurvengleichung durch ähnliche Betrachtungen wie dort S. 299. Die Kurvengleichung wird:

Fig. 18.

$$3\,c^4\,\mu^2\,y^2 = \left[\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{4}\,c^2\right)^2 - c^2 x^2\right] \times$$
$$\times \left[\frac{3}{2}\,c^2 + 2\,x^2 + 2\,y^2\right] \qquad (7)$$

Diese Gleichung lässt sich so umformen:

$$0 = \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{4}\,c^2\right)\left(2\,x^4 + 4\,x^2\,y^2 + c^2\,x^2 + 3\,c^2\,y^2 + 2\,y^4 - \frac{3}{8}\,c^4\right)$$
$$+ c^4\,y^2\,(2 - 3\,\mu^2) \qquad (8)$$

Hieraus ist zu ersehen, dass mit $\mu^2 = \frac{2}{3}$ oder $\mu = 0{,}8165$, die Kurve zerfällt in einen Kreis um $A\,B$ und eine ellipsenartige Kurve vierten Grades, deren Gleichung ist:

$$2\,x^4 + 4\,x^2\,y^2 + a^2\,x^2 + 3\,a^2\,y^2 + 2\,y^4 - \frac{3}{8}\,a^4 = 0$$

Dieses giebt nach y^2 aufgelöst:

$$4\,y^2 = -(3\,c^2 + 4\,x^2) + 2\,c\sqrt{3\,c^2 + 4\,x^2}$$

Damit ist die Konstruktion der Schwesterkurve des Kreises ermöglicht.

Die Tangenten der allgemeinen Kurven in A und B lassen sich leicht konstruieren; denn wenn $B\,T$ eine Tangente in B ist, so ist $A\,B\,T = \gamma'$ derjenige Wert γ, welcher den Werten $b = c$, $a = 0$ in Gleichung (6) entspricht, also:

$$M^2 = (\delta)^2\,\frac{2\,c^2}{3\,sin^2\gamma'} \qquad sin\,\gamma' = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Man hat also $\begin{Bmatrix}2\\1\\0\end{Bmatrix}$ Tangenten, wenn $\mu \gtreqless \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Indem wir nun zu Minimums-Betrachtungen übergehen, bemerken wir, dass ausgezeichnete Werte von μ nur auf der Y-Axe zu suchen sind, man hat daher mit $x = 0$ aus der Kurvengleichung (7):

$$3\,\mu^2\,c^4 = \frac{\left(y^2 + \frac{1}{4}\,c^2\right)^2\left(\frac{3}{2}\,c^2 + 2\,y^2\right)}{y^2},$$

woraus sich durch Differentiierung findet, dass ein Minimum von μ eintritt, wenn

$$y^2 = \frac{3}{16} c^2 \left(-1 + \sqrt{\frac{11}{3}}\right) \quad , \quad y = 0{,}4142\, c$$

und es ist:

$$\mu_{min} = 0{,}7978.$$

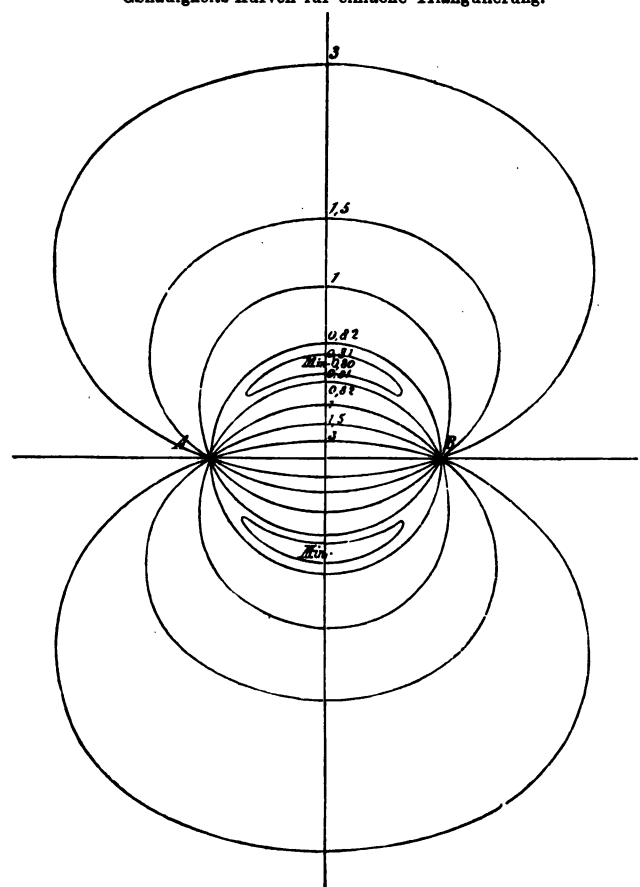
Der zu diesem y gehörige Schnittwinkel γ, den wir mit γ_0 bezeichnen wollen, bestimmt sich also aus der Gleichung:

$$cotg \frac{\gamma_0}{2} = \frac{y}{\frac{c}{2}} = 2 \frac{y}{c} = 0{,}8284$$

Dieses giebt: $\frac{\gamma_0}{2} = 50° 22'$, $\gamma = 100° 44'$

Auch bei Triangulierung findet also die günstigste Bestimmung eines Punktes nicht bei dem Schnittwinkel 90° statt, sondern bei einem stumpfen Winkel = 100° 44'. Was nun die Konstruktion der Kurven von Fig. 19. betrifft, so ist in der früher bei

Fig. 19.
Genauigkeits-Kurven für einfache Triangulierung.



§ 100. S. 298 beschriebenen Weise verfahren worden. Der Massstab ist hier in allen Beziehungen derselbe, wie in der Fig. 4. § 101. S. 301 und da die neuen Kurven Fig. 19. viel grössere Flächen umschliessen, als die gleichnamigen Kurven der Fig. 4. S. 301, so sieht man deutlich, dass die Messung des dritten Winkels an dem Punkte P selbst die Genauigkeit erheblich vergrössert hat.

§ 111. Mittlere Fehler der Dreiecksseiten.

Wenn in einem Dreieck ausser einer Seite nur *zwei* Winkel gemessen sind, so kann man den mittleren Fehler jeder der beiden anderen Seiten sehr einfach angeben, wie wir bereits in § 5. S. 13 gezeigt haben.

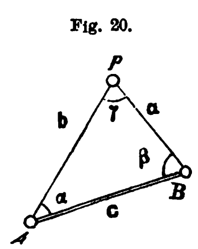


Fig. 20.

Wenn alle *drei* Winkel gemessen sind, können wir zur Berechnung der mittleren Fehler, bzw. Gewichte der Seiten nach den Regeln für bedingte Beobachtungen § 43. S. 104—106 verfahren.

(1) S. 104 entspricht: Gemessen $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ (1)

mit Gewichten $p_1 \quad p_2 \quad p_3$ (2)

(4) S. 105 entspricht der Bedingungsgleichung $\alpha + \beta + \gamma - 180° = 0$ (3)

also Coëfficienten $a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1$ (4)

(5) S. 105 entspricht $\left[\frac{a\,a}{p}\right] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \left[\frac{1}{p}\right]$, also $\left[\frac{1}{p}\right] k_1 + w_1 = 0$ (5)

(6) S. 105 entspricht $v_1 = -\frac{1}{p_1}\frac{w_1}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \quad v_2 = -\frac{1}{p_2}\frac{w_1}{\left[\frac{1}{p}\right]}, \quad v_3 = -\frac{1}{p_3}\frac{w_1}{\left[\frac{1}{p}\right]}$ (6)

$$[p\,v\,v] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 = \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}\right)\frac{w_1^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2} = \frac{w_1^2}{\left[\frac{1}{p}\right]}$$

(8) S. 105 entspricht $\frac{w_1}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} = (\delta)$ (8)

Das Vorstehende betrifft die Ausgleichung selbst, und giebt in (6) das bekannte Resultat, dass der Widerspruch w auf die drei Winkel umgekehrt proportional den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3$ verteilt wird. (8) giebt den mittleren Gewichtseinheitsfehler (δ).

Nun gehen wir zur Seitenberechnung, setzen $A\,B = c$ als fehlerfreie Basis, und haben:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$$

Die Differentiierung hievon haben wir auf S. 13 unmittelbar gemacht; bekanntlich ist es bei der Differentiierung von Produkten und Quotienten auch bequem, zuvor zu logarithmieren, d. h.:

$$\log a = \log c + \log \sin\alpha - \log\sin\gamma$$

$\log c$ ist konstant, also

$$\frac{1}{a}\,d\,a = \frac{1}{\sin\alpha}\cos\alpha\,d\,\alpha - \frac{1}{\sin\gamma}\cos\gamma\,d\,\gamma$$

$$d\,a = a\cot g\,\alpha\,d\,\alpha - a\cot g\,\gamma\,d\,\gamma$$

Dieses entspricht der Gleichung (9) S. 105, die Funktions-Coëfficienten sind daher:

$$f_1 = + a \, cotg \, \alpha \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = - a \, cotg \, \gamma \tag{9}$$

(10) S. 105 entspricht:
$$\left[\frac{a f}{p}\right] = + \frac{a \, cotg \, \alpha}{p_1} - \frac{a \, cotg \, \gamma}{p_3} \tag{10}$$

$$\left[\frac{f f}{p}\right] = \frac{a^2 \, cotg^2 \alpha}{p_1} + \frac{a^2 \, cotg^2 \gamma}{p_3} \tag{11}$$

Indem wir mit P_a das Gewicht der ausgeglichenen Seite a bezeichnen, haben wir nach (16) S. 106:

$$\frac{1}{P_a} = \left[\frac{ff}{p} \cdot 1\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a f}{p}\right]^2}{\left[\frac{a a}{p}\right]}$$

Setzt man hier (11) (10) und (5) ein, und geht von dem Gewicht P_a sogleich zu dem mittleren Fehler M_a über, so findet man:

$$M_a^2 = (\delta)^2 \frac{1}{P_a} = (\delta)^2 a^2 \left\{ \frac{cotg^2 \alpha}{p_1} + \frac{cotg^2 \gamma}{p_3} - \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \left(\frac{cotg \, \alpha}{p_1} - \frac{cotg \, \gamma}{p_3} \right)^2 \right\} \tag{12}$$

Man kann diese Gleichung auch in folgende Form bringen:

$$M_a^2 = (\delta)^2 a^2 \left\{ \frac{p_3 \, cotg^2 \alpha + p_1 \, cotg^2 \gamma + p_2 \, (cotg \, \alpha + cotg \, \gamma)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \right\} \tag{13}$$

Die Gleichung (12) giebt ein hübsches Neben-Resultat:

Wenn $\alpha = \gamma$ und $p_1 = p_3$ ist, so fällt das letzte Glied in (12) ganz fort, und die beiden ersten Teile stellen das mittlere Fehlerquadrat für den Fall vor, dass nur die zwei Winkel α und γ gemessen sind. Wenn also, bei gleichen Gewichten, das Dreieck $A B C$ gleichschenklig ist, so dass $B C = a$ der Basis $B A = c$ gleich wird, so ist es nach Messung der beiden Winkel α und γ für die Berechnung von a ganz gleichgültig, ob man auch noch den dritten Winkel β hinzu misst, oder nicht.

Dieses Resultat klingt zuerst eigentümlich, denn der gleichgültige Winkel β ist doch ein Bestandteil des Dreiecks. Betrachtet man die Sache aber näher, so erklärt sie sich so: Wenn nur α und γ gemessen sind, so berechnet man $a = c \frac{sin \, \alpha}{sin \, \gamma}$. Misst man den dritten Winkel β noch dazu, und gleicht die 3 Winkel α β γ aus, so ändern sich die Winkel α und γ um gleich viel, und wenn sie selbst nahezu gleich sind, so ändern sich auch ihre Sinus um gleich viel, und der Quotient $\frac{sin \, \alpha}{sin \, \gamma}$ bleibt unverändert.

Dieses gilt aber nur für die Berechnung *einer* Seite $B C = a$, die andere Seite $A C = b$ wird durch das Hinzumessen des dritten Winkels β jedenfalls beeinflusst.

Sogar wenn das Dreieck *zweifach* gleichschenklig, d. h. gleichseitig ist, kann, nach Messung von zwei Winkeln, das Hinzutreten des dritten gemessenen Winkels nur *eine* Seite ungeändert lassen.

Die Gleichung (13), in welcher die drei Winkelgewichte allgemein $= p_1, p_2, p_3$ eingeführt sind, muss den einfachen Fall, den wir schon zu Anfang in (6) § 5. S. 13 behandelt haben, dass nämlich nur *zwei* Winkel α und γ gemessen sind, mit enthalten. Setzt man in (3) das Gewicht $p_2 = 0$, so geht in der That (13) über in die frühere Formel (6) § 5. S. 13, wenn die früheren $(\delta_\alpha)^2$ und $(\delta\gamma)^2$ den Werten $\frac{(\delta)^2}{p_1}$ und $\frac{(\delta)^2}{p_2}$ in (13) gleichgesetzt werden.

Wenn man abwechselnd je einen Winkel als nicht gemessen betrachtet, und deswegen sein Gewicht $p = 0$ setzt, und wenn man zugleich die beiden anderen Winkel mit Gewichten $p = 1$ einführt, so bekommt man der Reihe nach folgende Formeln (14):

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gemessen} & \alpha \text{ und } \beta & (M_a^{\alpha\beta})^2 = a^2(\delta)^2\left\{(\cot g\,\alpha + \cot g\,\gamma)^2 + \cot g^2\gamma\right\} \\ \quad " & \alpha \text{ und } \gamma & (M_a^{\alpha\gamma})^2 = a^2(\delta)^2\left\{\cot g^2\alpha + \cot g^2\gamma\right\} \\ \quad " & \beta \text{ und } \gamma & (M_a^{\beta\gamma})^2 = a^2(\delta)^2\left\{\cot g^2\alpha + (\cot g\,\alpha + \cot g\,\gamma)^2\right\} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Zur Vergleichung wird wieder (13) mit $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ hergesetzt:

$$\text{Gemessen } \alpha, \beta, \gamma \quad (M_a^{\alpha\beta\gamma})^2 = a^2(\delta)^2\left\{\frac{\cot g^2\alpha + (\cot g\,\alpha + \cot g\,\gamma)^2 + \cot g^2\gamma}{3}\right\} \quad (15)$$

$$\text{Dieses giebt:} \quad (M_a^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(M_a^{\alpha\beta})^2 + (M_a^{\alpha\gamma})^2 + (M_a^{\beta\gamma})^2}{3} \quad (16)$$

Ähnliche Formen werden wir in § 112. noch mehrfach finden.

§ 112. Vergleichung der Genauigkeit von Vorwärts-Einschneiden, Seitwärts-Einschneiden und Triangulierung.

Aus den verschiedenen bisher gewonnenen Ergebnissen, mittleren Fehlern von Dreiecksseiten, Coordinaten oder mittleren Punktfehlern, können wir Vergleichungen bilden, welche sich an die soeben geschriebenen Formeln (14), (15), 16) des vorigen § 111. nach Bezeichnungsart und Inhalt anschliessen:

Fig. 21.

Nach Fig. 21. sind 3 Winkel α, β, γ vorhanden, von denen nach Umständen nur zwei gemessen sind, oder welche alle drei gemessen sein können.

Für den mittleren Abscissenfehler M_x hat man folgende Fälle:

$$(3)\ \S\ 102.\ \text{S. } 303 \quad (M_x^{\alpha\beta})^2 = \frac{b^2\cos^2\psi + a^2\cos^2\varphi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \quad (1)$$

$$(6)\ \S\ 105.\ \text{S. } 310 \quad (M_x^{\alpha\gamma})^2 = \frac{2\,a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\psi - 2\,a\,b\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \quad (2)$$

$$\text{desgl.} \quad (M_x^{\beta\gamma})^2 = \frac{2\,b^2\cos^2\psi + a^2\cos^2\varphi - 2\,a\,b\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \quad (3)$$

$$(5)\ \S\ 110.\ \text{S. } 320 \quad (M_x^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{2}{3}\,\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\psi - a\,b\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \quad (4)$$

Zwischen diesen Werten besteht die Beziehung:

$$(M_x^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(M_x^{\alpha\beta})^2 + (M_x^{\beta\gamma})^2 + (M_x^{\alpha\gamma})^2}{3} \quad (5)$$

d. h. das Quadrat des mittleren Abscissenfehlers für die vollständige Triangulierung ist das halbe arithmetische Mittel der entsprechenden Werte für Triangulierung aus je zwei Winkeln.

Für die mittleren Ordinatenfehler M_y erhält man ganz ähnliche Ausdrücke, indem man überall *sin* statt *cos* setzt.

Ähnliche Formen findet man auch bei den Formeln für den Punktfehler M:

(1) § 101. S. 299 $$(M^{\alpha\beta})^2 = \frac{a^2+b^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (6)$$

(1) § 104. S. 307 $$(M^{\alpha\gamma})^2 = \frac{a^2+c^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (7)$$

desgl. $$(M^{\beta\gamma})^2 = \frac{b^2+c^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (8)$$

(6) § 110. S. 321 $$(M^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (9)$$

Auch zwischen diesen vier Grössen besteht dieselbe Beziehung wie bei den Coordinatenfehlern in (1), nämlich:

$$(M^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2}\,\frac{(M^{\alpha\beta})^2+(M^{\beta\gamma})^2+(M^{\alpha\gamma})^2}{3} \qquad (10)$$

Ist P so weit von A und B entfernt, dass die Basis $AB = c$ gegen die Entfernungen $AP = b$ und $BP = a$ vernachlässigt werden kann, so hat man, indem $a = b = r$ und $c = 0$ gesetzt wird:

1. für Vorwärts-Einschneiden: $$(M^{\alpha\beta})^2 = \frac{2r^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (6')$$

2. für Seitwärts-Einschneiden: $$(M^{\alpha\gamma})^2 = \frac{r^2}{\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (7')$$

3. für Triangulierung: $$(M^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{2r^2}{3\sin^2\gamma}(\delta)^2 \qquad (9')$$

Diese drei Werte verhalten sich wie:

$\sqrt{3} : \sqrt{1,5} : 1$ oder wie 1,732 : 1,225 : 1,

genähert wie 7 : 5 : 4.

Die entsprechenden Formeln für eine Dreiecksseite bei verschiedenen Fällen der Winkelmessung sind schon in (14), (15), (16) § 111. S. 325 gegeben.

Alle diese Vergleichungen gelten für *gleiche* Gewichte der drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$. Wenn diese Gewichte nicht gleich, sondern bzw. $= p_1, p_2, p_3$ gegeben sind, so haben wir, zunächst für eine Dreiecksseite a, nach (13) § 111. S. 324 folgendes:

$$p_3 = 0, \quad (M_a^{\alpha\beta})^2 = a^2(\delta)^2\frac{p_1\cot g^2\gamma + p_2(\cot g\,\alpha + \cot g\,\gamma)^2}{p_1 p_2} \qquad (10)$$

$$p_2 = 0, \quad (M_a^{\alpha\gamma})^2 = a^2(\delta)^2\frac{p_3\cot g^2\alpha + p_1\cot g^2\gamma}{p_1 p_3} \qquad (11)$$

$$p_1 = 0, \quad (M_a^{\beta\gamma})^2 = a^2(\delta)^2\frac{p_3\cot g^2\alpha + p_2(\cot g\,\alpha + \cot g\,\gamma)^2}{p_1 p_3} \qquad (12)$$

$$(M_a^{\alpha\beta\gamma})^2 = a^2(\delta)^2\frac{p_3\cot g^2\alpha + p_1\cot g^2\gamma + p_2(\cot g\,\alpha + \cot g\,\gamma)^2}{p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3} \qquad (13)$$

Hieraus kann man eine Beziehung bilden, welche allgemeiner so lautet:

Wenn μ^2 das mittlere Fehlerquadrat ist, für eine Dreiecksseite AP oder BP in Fig. 21., für eine Abscisse oder Ordinate des Punktes P, oder auch für den Punkt P überhaupt, so gilt die Gleichung:

$$(\mu^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2} \frac{p_2 p_3 (\mu^{\beta\gamma})^2 + p_1 p_3 (\mu^{\alpha\gamma})^2 + p_1 p_2 (\mu^{\alpha\beta})^2}{p_2 p_3 + p_1 p_3 + p_1 p_2} \tag{14}$$

oder

$$(\mu^{\alpha\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{p_1}(\mu^{\beta\gamma})^2 + \frac{1}{p_2}(\mu^{\alpha\gamma})^2 + \frac{1}{p_3}(\mu^{\beta\gamma})^2}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} \tag{15}$$

Anmerkung.

Setzt man in (14) etwa den Winkel α als nicht gemessen voraus, folglich $p_1 = 0$, so geht (14) wieder über in:

$$(\mu^{\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2} \frac{p_2 p_3 (\mu^{\beta\gamma})^2}{p_2 p_3}, \quad \text{d. h.} \quad (\mu^{\beta\gamma})^2 = \frac{1}{2} (\mu^{\beta\gamma})^2 \qquad (?)$$

ein Paradoxon, das wir dem Leser anheim geben.

§ 113. Fehlergleichung für Parallel-Verschiebung.

Man kann jedem Winkelmessungs-Fehler in Hinsicht auf Genauigkeits-Betrachtungen eine Parallel-Verschiebung einer Geraden substituieren, wie wir schon in (9) § 99. S. 298 und in § 103. S. 305 geometrisch gezeigt haben.

Auch die Beziehung zwischen einer Azimutkorrektion $d\varphi$ und Coordinatenkorrektionen dx und dy, welche wir schon früher in § 55. S. 131—134 behandelt, und in § 110. S. 320 auf ein Dreieck mit 3 Winkeln α β γ angewendet haben, hat eine ähnliche Bedeutung.

Es ist nun für viele Zwecke nützlich, die Fehlergleichungen und die Normalgleichungen sogleich in solcher Form aufzustellen, dass die Parallel-Verschiebung deutlich hervortritt.

Damit beschäftigen wir uns nun: *)

Es sei die Gleichung einer Geraden:

$$0 = A x + B y + L \tag{1}$$

oder

$$0 = x \sin\varphi - y \cos\varphi + \lambda \tag{2}$$

Die beiden Formen stimmen überein, wenn folgendes erfüllt ist:

$$\tan\varphi = -\frac{A}{B} \tag{3}$$

$$\lambda = \frac{L}{A} \sin\varphi = -\frac{L}{B} \cos\varphi \tag{4}$$

Fig. 22.

Die geometrische Deutung hievon ist in Fig. 22. enthalten.

Es ist nämlich φ das Azimut einer Geraden $(A)(B)$, welche von den Axen x und y die Stücke bzw. $\frac{L}{A}$ und $-\frac{L}{B}$ abschneidet. λ ist der rechtwinklige Abstand der Geraden $(A)(B)$ vom Ursprung O.

Aus (1) und (2) bilden wir nun Fehlergleichungen:

$$0 = A x + B y + (L - V) \quad \text{oder} \quad V = A x + B y + L \tag{5}$$

$$0 = x \sin\varphi - y \cos\varphi + (\lambda - \varepsilon) \quad \text{,,} \quad \varepsilon = x \sin\varphi - y \cos\varphi + \lambda \tag{6}$$

V ist mit L gleichartig, und ε ist mit λ gleichartig.

*) Vgl. *Helmert* „Studien über rationelle Vermessungen" § 17. und § 18.

Man kann die Gleichung (6) einer Ausgleichung zu Grunde legen, wenn man das Gewicht der als beobachtet betrachteten Länge λ kennt. Wir wollen dieses Gewicht π nennen, und haben folglich mit π die Genauigkeit bezeichnet, mit welcher die Gerade $(A)(B)$ in ihrer Lage, d. h. in Hinsicht auf Parallel-Verschiebung bestimmt ist.

Wir können auf Fehlergleichungen von der Form (6) die Entwicklungen (2) bis (6a) von § 109. S. 315 und S. 316 anwenden. Man habe

Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = x \sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1 + \lambda_1 & \text{Gewicht} = \pi_1 \\ \varepsilon_2 = x \sin\varphi_2 - y\cos\varphi_2 + \lambda_2 & \quad " \quad = \pi_2 \\ \varepsilon_3 = x \sin\varphi_3 - y\cos\varphi_3 + \lambda_2 & \quad " \quad = \pi_3 \\ \dots & \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die frühere entsprechende Form (1) von § 109. S. 315 war:

$$v = a\,x + b\,y + l \qquad \text{Gewicht} = 1. \quad (8)$$

Die Formeln (5) und (4) § 109. S. 316 werden daher mit Anwendung auf (7) geben:

$$M_x^2 = \frac{[\pi\cos^2\varphi]}{D}(\delta)^2 \qquad M_y^2 = \frac{[\pi\sin^2\varphi]}{D}(\delta)^2 \quad (9)$$

wobei zunächst:

$$D = [\pi\sin^2\varphi]\,[\pi\cos^2\varphi] - [\pi\sin\varphi\cos\varphi]^2 \quad (10)$$

Die Entwicklung von D wollen wir hier nur mit zwei Gliedern vorführen:

$$(\pi_1\sin^2\varphi_1 + \pi_2\sin^2\varphi_2)(\pi_1\cos^2\varphi_1 + \pi_2\cos^2\varphi_2) - (\pi_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + \pi_2\sin\varphi_2\cos\varphi_2)^2$$

Bei der Entwicklung heben sich die Glieder mit π_1^2 und mit π_2^2 auf und es bleibt nur:

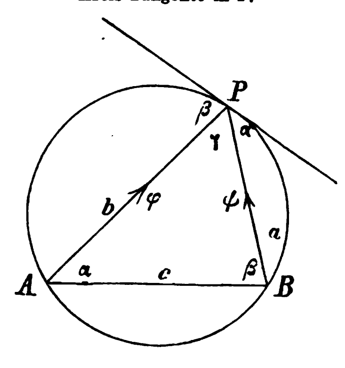
$$\pi_1\pi_2(\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 - 2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2)$$
$$= \pi_1\pi_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)^2 = \pi_1\pi_2\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Hat man mehr als zwei Glieder, also $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3 \dots$, so setzt sich diese Entwicklung in allen Kombinationen fort, und man bekommt:

$$D = [\pi_i\pi_k\sin^2(\varphi_i - \varphi_k)] \quad (11)$$

wobei sich die Summierung auf alle Kombinationen von i und k erstreckt.

Fig. 23.
Kreis-Tangente in P.



Wir wollen die neuen Formeln (9) und (10) auf den schon in § 110. behandelten Fall der Triangulierung mit 3 Winkeln anwenden.

Den drei Winkeln $\alpha\ \beta\ \gamma$, welche in Fig. 23. als gemessen angenommen sind, entsprechen gewisse bestimmende Gerade, und mittlere zu fürchtende Querverschiebungen $(\varepsilon_1)\ (\varepsilon_2)\ (\varepsilon_3)$ derselben. Die mittleren Winkelfehler selbst nehmen wir als gleich an, nämlich $= (\delta)$.

1) Dem Winkel α entspricht die Gerade AP, mit der mittleren Verschiebung:

$$(\varepsilon_1) = b\,(\delta) \quad (12)$$

2) Dem Winkel β entspricht die Gerade BP, mit der mittleren Verschiebung:

$$(\varepsilon_2) = a\,(\delta) \quad (13)$$

3) Dem Winkel γ entspricht zunächst ein Kreis um ABP, dessen Tangente in P nach (11) § 103. S. 306 die mittlere Querverschiebung hat:

$$(\varepsilon_3) = \frac{AP \cdot BP}{AB}(\delta) = \frac{a\,b}{c}(\delta) \qquad (14)$$

Diesen mittleren Lagefehlern (12) (13) (14) entsprechen die Gewichte bzw.:

$$\pi_1 = \frac{1}{b^2} \qquad \pi_2 = \frac{1}{a^2} \qquad \pi_3 = \frac{c^2}{a^2\,b^2} \qquad (15)$$

Die Azimute sind nach Angabe der Fig. 23. S. 328:

$$\varphi_1 = \varphi \qquad \varphi_2 = \psi \qquad \varphi_3 = \varphi + \beta \pm 180^\circ \quad \text{oder} \quad = \psi - \alpha \pm 180^\circ \qquad (16)$$

Die Azimut-Differenzen:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi - \psi = \gamma \quad , \quad \varphi_1 - \varphi_3 = -\beta \pm 180^\circ \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \alpha \pm 180^\circ \qquad (17)$$

Nun kann man D nach (11) zusammensetzen:

$$D = \frac{1}{a^2\,b^2}\sin^2\gamma + \frac{c^2}{a^2\,b^4}\sin^2\beta + \frac{c^2}{a^4\,b^2}\sin^2\alpha$$

Das zweite und das dritte Glied sind dem ersten Gliede gleich (wegen des Sinus-Satzes im Dreieck), es ist also:

$$D = 3\,\frac{\sin^2\gamma}{a^2\,b^2} \qquad (18)$$

Damit hat man den Nenner von (9), und der Zähler von $M_x{}^2$ in (9) ist zunächst, wegen (15) und (16):

$$[\pi\cos^2\varphi] = \pi_1\cos^2\varphi_1 + \pi_2\cos^2\varphi_2 + \pi_3\cos^2\varphi_3 = \frac{1}{b^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{a^2}\cos^2\psi + \frac{c^2}{a^2\,b^2}\cos^2(\varphi + \beta)$$

Hiezu hat man eine bereits früher gebrauchte Beziehung, nämlich nach (4) § 105, S. 310:

$$c\cos(\psi - \alpha) = -\,a\cos\varphi + b\cos\psi$$

oder:

$$c\cos(\varphi + \beta) = -\,a\cos\varphi + b\cos\psi$$

Dieses giebt:

$$[\pi\cos^2\varphi] = \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\psi + (a\cos\varphi - b\cos\psi)^2}{a^2\,b^2}$$

Setzt man dieses in (9) nebst dem Nenner D von (18), so bekommt man:

$$M^2 = \frac{2}{3}\,\frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\psi - a\,b\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma} \qquad (19)$$

Dieses stimmt mit (5) § 110. S. 320, wie es sein soll.

Die Gewichte π, welche hier benützt wurden, sind nicht Messungsgewichte, sondern sie rühren von den geometrischen Verhältnissen her. Die eigentlichen Messungsgewichte sind hier zunächst als gleich angenommen. Wenn nun auch Messungsgewichte $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots$ zu berücksichtigen sind, so treten sie als Faktoren zu den Ausdrücken für π hinzu.

Wenn also in (12) (13) (14) die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ bzw. die Messungsgewichte $p_1\ p_2\ p_3$ haben, so bekommt man statt (15):

$$\pi_1 = \frac{p_1}{b^2} \quad , \quad \pi_2 = \frac{p_2}{a^2} \quad , \quad \pi_3 = p_3\,\frac{c^2}{a^2\,b^2} \qquad (20)$$

und die übrige Weiterrechnung giebt dann:

$$M_x{}^2 = \frac{(p_1 + p_3)\,a^2\cos^2\varphi + (p_2 + p_3)\,b^2\cos^2\psi - 2\,p_3\,a\,b\cos\varphi\cos\psi}{\sin^2\gamma\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3)} \qquad (21)$$

Wenn man hier $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ setzt, so geht das wieder in (19) zurück.

Anmerkungen.

Als Probe für die Richtigkeit der Entwicklung kann man die letzte Formel (21) in die frühere (13) § 111. S. 324 überführen, wenn man setzt $\psi = 0$, damit wird $\varphi = \gamma$ und die übrigen Konsequenzen hievon bringen nach einiger Umformung (21) auf das frühere (13) § 111. S. 324, wie es sein muss, denn der Fehler der Abscisse x geht in den Fehler der Seite a über, wenn diese Seite das Azimut $\psi = 0$ bekommt.

In Bezug auf die Gewichte π ist noch eine allgemeine Bemerkung zu machen. Wir nehmen nochmals von (3) bis (7):

$$\text{Fehlergleichung} \quad V = A\,x + B\,y + L \qquad \text{mit Gewicht} = 1 \tag{22}$$

$$\text{„} \quad \varepsilon = x \sin\varphi - y \cos\varphi + \lambda \quad \text{„} \qquad \text{„} \quad = \pi \tag{23}$$

$$tang\,\varphi = -\frac{A}{B} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{-B}{\sqrt{A^2-B^2}}$$

$$\lambda = \frac{L}{A}\sin\varphi = -\frac{L}{B}\cos\varphi \quad , \quad \text{d. h.} \quad \lambda = \frac{L}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{24}$$

Diese letzte Gleichung gestattet auch, das Gewicht π anzugeben, denn wenn L eine Beobachtung vom Gewicht $= 1$ ist, so muss λ, das nach (24) durch Division mit der Konstanten $\sqrt{A^2+B^2}$ aus L entsteht, das Gewicht π umgekehrt proportional dem Quadrat von $\sqrt{A^2+B^2}$ haben, d. h.:

$$\pi = A^2 + B^2 \tag{25}$$

Man kann diese Gleichung auf Fig. 23. S. 328 anwenden. Dem Strahl AP entspricht nach (7) § 55. S. 131 eine Winkelfehlergleichung von der Form:

$$V = -\frac{\sin\varphi}{b}\,x + \frac{\cos\varphi}{b}\,y + \ldots$$

Vergleicht man dieses mit (22), so ist:

$$A = -\frac{\sin\varphi}{b} \qquad B = +\frac{\cos\varphi}{b} \quad ,$$

folglich nach (25):

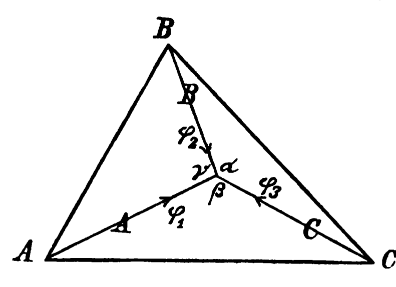
$$\pi = A^2 + B^2 = \frac{1}{b^2} \tag{26}$$

Dieses stimmt mit π_1 in (15) S. 329, wie es sein soll.

Im übrigen haben wir bei (15) vorgezogen, die Gewichte π unmittelbar durch geometrische Betrachtungen anzuschreiben, wie auch später meist geschehen soll.

§ 114. Vorwärts-Einschneiden mit drei Strahlen.

Fig. 24.
Vorwärts-Einschneiden von A B C aus.



Ein Punkt wird bestimmt durch Messung dreier Winkel in den Ecken $A\,B\,C$ eines gegebenen Dreiecks, wodurch drei Strahlen AP, BP, CP festgelegt werden. Die Längen dieser Strahlen seien bzw. mit A B C bezeichnet. (Das Zeichen P selbst ist in Fig. 24. nicht beigeschrieben.)

Da hier unmittelbar bestimmende Gerade gegeben sind, so führen die Formeln (9) und (11) § 113. S. 328 am raschesten zum Ziel.

Wenn die drei Strahlen durch gleich genaue Winkelmessungen festgelegt sind, so sind die entsprechenden mittleren Querverschiebungen in der Gegend des Schnittpunktes mit den Bezeichnungen von Fig. 24. S. 330 bzw.:

$$A\,(\delta) \qquad B\,(\delta) \qquad C\,(\delta)$$

wenn (δ) der mittlere Winkelmessungsfehler ist, oder es kann auch (δ) den mittleren Fehler einer auf der Station ausgeglichenen Richtung bedeuten.

Wenn die 3 Richtungen AP, BP und CP an sich nicht gleichgewichtig sind, sondern die Gewichte bzw. $p_1\ p_2\ p_3$ haben, so sind die mittleren Querverschiebungen der Strahlen bzw.:

$$A\,\frac{(\delta)}{\sqrt{p_1}} \qquad B\,\frac{(\delta)}{\sqrt{p_2}} \qquad C\,\frac{(\delta)}{\sqrt{p_3}}$$

und die entsprechenden Gewichte:

$$\pi_1 = \frac{p_1}{A^2} \qquad \pi_2 = \frac{p_2}{B^2} \qquad \pi_3 = \frac{p_3}{C^2} \tag{1}$$

Die Azimute der drei Strahlen seien:

$$\varphi_1 \qquad \varphi_2 \qquad \varphi_3$$

und die Winkel zwischen den Strahlen:

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \alpha \qquad \varphi_1 - \varphi_3 = \beta \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \gamma$$

Als Formel für M_x hat man nach (9) und (11) § 113. S. 328:

$$M_x^2 = \frac{\pi_1 \cos^2\varphi_1 + \pi_2 \cos^2\varphi_2 + \pi_3 \cos^2\varphi_3}{\pi_1\,\pi_2 \sin^2\gamma + \pi_1\,\pi_3 \sin^2\beta + \pi_2\,\pi_3 \sin^2\alpha}\,(\delta)^2 \tag{2}$$

Dieser Ausdruck geht in den für Vorwärts-Einschneiden mit zwei Strahlen gültigen über, wenn $p_1 = p_2 = 1$ und $p_3 = 0$ gesetzt wird, wie man sich durch Vergleichung mit (3) § 102. S. 303 überzeugen kann.

Wir lassen nun die Verschiedenheit der Gewichte p wieder fallen, und haben mit $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, aus (1) und (2):

$$M_x^2 = \frac{\dfrac{\cos^2\varphi_1}{A^2} + \dfrac{\cos^2\varphi_2}{B^2} + \dfrac{\cos^2\varphi_3}{C^2}}{\dfrac{\sin^2\alpha}{B^2C^2} + \dfrac{\sin^2\beta}{A^2C^2} + \dfrac{\sin^2\gamma}{A^2B^2}}\,(\delta)^2 \tag{3}$$

Für M_y^2 erhält man einen Ausdruck, der sich von diesem nur dadurch unterscheidet, dass überall im Zähler $\sin\varphi$ statt $\cos\varphi$ sich einstellt. Zusammen genommen geben beide Ausdrücke:

$$M^2 = \frac{A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2}{A^2\sin^2\alpha + B^2\sin^2\beta + C^2\sin^2\gamma}\,(\delta)^2 \tag{4}$$

Für das Folgende setzen wir ein gleichseitiges Dreieck voraus, dessen Seite $= 1$ ist, und nehmen wie früher:

$$\frac{M}{1\,(\delta)} = \mu \tag{5}$$

Für einzelne Punkte in der Ebene des Dreiecks lässt sich nun μ sofort angeben:

1) In der Dreiecksmitte wird:

$$A = B = C = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \qquad \alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$$

und hiemit:

$$\mu^2 = \frac{4}{9} \qquad \mu = \frac{2}{3} \tag{6}$$

2) In der Mitte einer Seite wird:

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad B = C = \frac{1}{2} \qquad \alpha = 180^\circ \qquad \beta = \gamma = 90^\circ$$

$$\mu^2 = \frac{7}{8} \qquad \mu = 0{,}935 \tag{7}$$

3) In der Ecke des Dreiecks wird μ unbestimmt, wie bei allen bisher betrachteten Fällen; es lässt sich jedoch angeben, wenn gesagt wird, dass die Dreiecksecke als Punkt einer bestimmten, durch sie gehenden Geraden aufgefasst werden soll, und demnach ist:

3a) In der Ecke auf der Winkelhalbierungslinie

$$A = 0 \qquad B = C = 1 \qquad \alpha = 60^\circ \qquad \beta = \gamma = 150^\circ$$

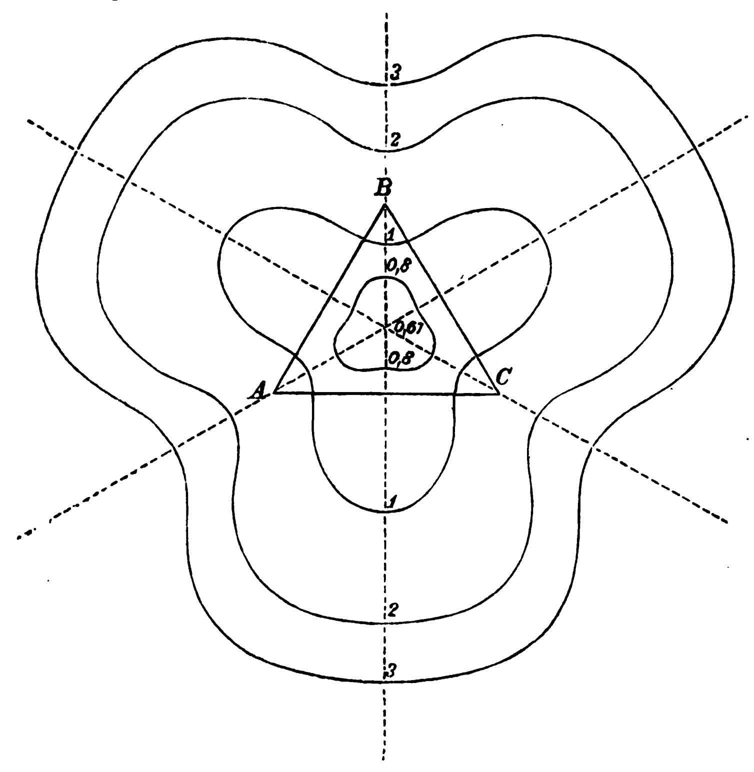
$$\mu^2 = 2 \qquad \mu = 1{,}414 \tag{8}$$

3b) In der Ecke auf einer Dreiecksseite:

$$A = 0 \qquad B = C = 1 \qquad \alpha = 60^\circ \qquad \beta = 180^\circ \qquad \gamma = 120^\circ \tag{9}$$

$$\mu^2 = \frac{4}{3} \qquad \mu = 1{,}155$$

Fig. 25.
Genauigkeitskurven für Vorwärts-Einschneiden von drei Punkten A B C aus.



Zu weiteren Untersuchungen eignen sich am besten Genauigkeitskurven (Fig. 25.). Die Konstruktion derselben geschah durch Ermittelung von μ für eine grössere Anzahl

von Punkten mit Hülfe der Gleichung (4) S. 331 und graphische Interpolation, also ohne Benutzung der Kurvengleichung in rechtwinkligen Coordinaten, weil diese nach den bisher gemachten Erfahrungen die Konstruktion nicht wesentlich fördert.

Das absolute Minimum von μ findet statt in der Dreiecksmitte. Ein zweites Minimum zeigt sich ausserhalb des Dreiecks, ungefähr an der Stelle, wo die Winkelhalbierungslinie den um das Dreieck beschriebenen Kreis schneidet.

Ein relatives Maximum findet statt beim Überschreiten der Dreiecksseite, und erklärt sich sehr einfach durch das Wertloswerden des Schnittes derjenigen zwei Strahlen, welche sich dort unter 180° schneiden.

Die sonstigen Genauigkeitsverhältnisse erklärt der blosse Anblick der Kurven.

Wir haben im Vorstehenden die mittleren Fehler M_x, M_y, M für die Ausgleichung dreier Strahlenschnitte berechnet, ohne diese Ausgleichung selbst zu behandeln, indem angenommen ist, dass die Ausgleichung nach § 57. S. 136 gemacht werde.

Wenn jedoch nur *drei* Strahlen vorhanden sind, so kann man die Ausgleichung auch einfach graphisch machen.

Fig. 26.
Fehlerzeigendes Dreieck A' B' C' für Vorwärts-Einschneiden.

Die gemessenen Richtungen geben statt *eines* Punktschnittes ein fehlerzeigendes Dreieck, das man aufzeichnen kann. Dasselbe ist in Fig. 26. mit A' B' C' bezeichnet und habe die Seiten s_1 s_2 s_3. Nun kommt es darauf an, einen Punkt so zu bestimmen, dass die ihm entsprechenden Richtungsänderungen v_1 v_2 v_3 eine kleinste Quadratsumme $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ geben. Dabei ist:

$$v_1 = \frac{e_1}{A} \qquad v_2 = \frac{e_2}{B} \qquad v_3 = \frac{e_3}{C} \tag{8}$$

wo e_1 e_2 e_3 die Abstände des gesuchten Punktes von den Seiten s_1 s_2 s_3 des fehlerzeigenden Dreiecks, und A B C die Strahlenlängen sind.

Zwischen den e besteht die Bedingung:

$$e_1 s_1 + e_2 s_2 + e_3 s_3 = 2 \triangle \text{ (doppelte Dreiecksfläche)} \tag{9}$$

oder wegen (8):

$$v_1 A s_1 + v_2 B s_2 + v_3 C s_3 - 2 \triangle = 0 \tag{10}$$

Das ist eine Bedingung von der Form (4) § 43. S. 105, es besteht daher auch eine Korrelatengleichung nach (5) S. 105, mit $p = 1$:

$$((A s_1)^2 + (B s_2)^2 + (C s_3)^2) k - 2 \triangle = 0 \tag{11}$$

dann nach (6) S. 105:

$$v_1 = A s_1 k \qquad v_2 = B s_2 k \qquad v_3 = C s_3 k$$

Ohne k selbst aus (11) einzusetzen, kann man nach (8) bilden:

$$e_1 = A^2 s_1 k \qquad e_2 = B^2 s_2 k \qquad e_3 = C^2 s_3 k$$

$$e_1 : e_2 : e_3 = A^2 s_1 : B^2 s_2 : C^2 s_3 \tag{12}$$

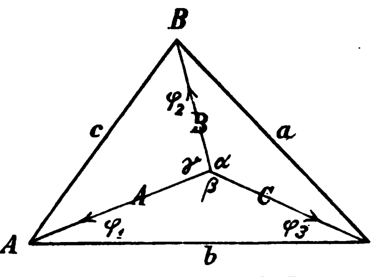
Diese Verhältnisse genügen, um den Punkt in dem fehlerzeigenden Dreieck zu konstruieren.

§ 115. Pothenotische Bestimmung mit drei Winkeln.

Ein Punkt ist festgelegt gegen drei gegebene Punkte A B C durch Messung der drei Winkel α β γ zwischen den Strahlen, welche man nach den gegebenen Punkten A B C ziehen kann.

Zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Lage des pothenotischen Punktes kann man die drei gemessenen Winkel α β γ auf den Horizont ausgleichen und dann mit irgend welchen zweien der ausgeglichenen Winkel die Coordinaten von P berechnen. Damit bekommt man aber keinen Aufschluss über die Genauigkeit der Punktlage, ebenso wie die Ausgleichung der drei Winkel in einem Dreieck unmittelbar keinen Schluss auf die Genauigkeit der Triangulierung giebt.

Fig. 27.
Pothenotische Bestimmung.



Innerer Schnittpunkt P.

Um zu den mittleren Fehlern M_x und M_y der Coordinaten X Y des pothenotischen Punktes zu gelangen, betrachten wir die Aufgabe als Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen α β γ mit zwei Unbekannten X Y.

Wir benützen die Formeln (9) und (11) § 113. S. 328 und schreiben hiernach:

$$M_x^2 = \frac{\pi_1 \cos^2 \psi_1 + \pi_2 \cos^2 \psi_2 + \pi_3 \cos^2 \psi_3}{\pi_1 \pi_2 \sin^2 \sigma_3 + \pi_1 \pi_3 \sin^2 \sigma_2 + \pi_2 \pi_3 \sin^2 \sigma_1} (\delta)^2 \tag{1}$$

wobei π_1 π_2 π_3 die Gewichte der fingierten bestimmenden Geraden (Kreistangenten) sind, ψ_1 ψ_2 ψ_3 deren Azimute, und σ_1 σ_2 σ_3 deren Schnittwinkel.

Nach Andeutung der Fig. 27. bezeichnen wir mit φ_1 φ_2 φ_3 die Azimute der drei Strahlen, zwischen denen die drei gemessenen Winkel α β γ liegen. Die Gewichte der drei gemessenen Winkel α β γ seien p_1 p_2 p_3, dann sind die Gewichte der Kreistangenten im Schnittpunkt, nach dem Gesetz von π_3 in (20) § 113. S. 329, die folgenden:

$$\pi_1 = \frac{a^2}{B^2\,C^2} p_1 \qquad \pi_2 = \frac{b^2}{A^2\,C^2} p_2 \qquad \pi_3 = \frac{c^2}{A^2\,B^2} p_3 \tag{2}$$

Hiemit wird das erste Glied des Zählers in (1):

$$\pi_1 \cos^2 \psi_1 = \frac{p_1}{B^2\,C^2} (a \cos \psi_1)^2$$

Es besteht aber die Beziehung:

$$a \cos \psi_1 = B \cos \varphi_3 - C \cos \varphi_2 \tag{3}$$

Dieses ist eine Gleichung von ähnlicher Form, wie (4) § 105. S. 310.

Man denke sich in Fig. 27. den Kreis BPC und dessen Tangente in P gezogen. Diese Tangente hat das Azimut ψ_1. Auf den Azimutrichtungen φ_2 und φ_3 trage man dann die Strecken B und C verwechselt auf, d. h. C auf φ_2 und B auf φ_3. Dann entsteht abermals ein Dreieck mit den

Seiten	B	C	a
und Azimuten	φ_3	φ_2	ψ_1

Das Azimut ψ_1 gehört zu der Seite a, weil nach der angegebenen Konstruktion die Seite a parallel der Tangente in P wird.

Wendet man endlich auf das so beschriebene Dreieck die Cosinus-Projektion an, so ist die algebraische Summe der Projektionen = Null, was in Gleichung (3) S. 334 ausgesagt ist. (Auf das Vorzeichen kommt es nicht an, weil nur das Quadrat gebraucht wird.)

Entsprechendes gilt für den zweiten und für den dritten Teil des Zählers in (1), und wenn man auch die π aus (2) einsetzt, so wird der Zähler von (1):

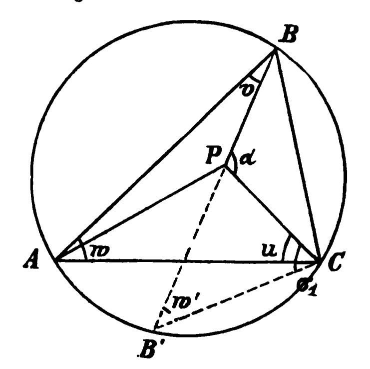
$$p_1\left(\frac{B\cos\varphi_3 - C\cos\varphi_2}{B\,C}\right)^2 + p_2\left(\frac{C\cos\varphi_1 - A\cos\varphi_3}{A\,C}\right)^2 + p_3\left(\frac{A\cos\varphi_2 - B\cos\varphi_1}{A\,B}\right)^2 \quad (4)$$

Nun handelt es sich um die Schnittwinkel $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$, welche die drei Kreistangenten in P unter sich bilden.

Die hiezu nötigen Betrachtungen haben wir schon in § 106. mit Fig. 12a. und 12b. S. 311 angestellt, und daselbst die Formel (3) S. 312, $\sigma = u + v$ gefunden, welche auf Fig. 27. S. 334 angewendet, giebt:

$$\sigma_1 = A\,C\,P + P\,B\,A \qquad \sigma_2 = B\,A\,P + P\,C\,B \qquad \sigma_3 = C\,B\,P + P\,A\,C \quad (5)$$

Fig. 28.
Tangentenschnittwinkel $B'CP = \sigma$.



Von diesen drei Winkeln betrachten wir mit Beziehung auf Fig. 28. zuerst den Winkel σ_1, unter welchem sich die Kreise $A\,P\,B$ und $A\,P\,C$ schneiden, d. h. diejenigen zwei Kreise, welche die Winkel β und γ fassen.

Nach Fig. 28. ist:

$$\sigma_1 = A\,C\,P + P\,B\,A = u + v$$

Es ist aber:

$$u + v + w + (360^0 - \alpha) = 360^0$$

also $\quad u + v = \alpha - w$

oder auch $\quad u + v = \alpha - w'$

d. h. $\quad u + v = B'\,C\,P = \sigma_1 \quad (6)$

Das Dreieck $P\,C\,B'$ giebt ferner:

$$P\,C\,\sin\sigma_1 = P\,B'\,\sin w'$$

$$\frac{PB\,.\,PC}{B\,C}\sin\sigma_1 \quad \frac{P\,B\,.\,P\,B'}{B\,C}\sin w' \quad (7)$$

Das Produkt $P\,B\,.\,B\,B'$, welches in (7) vorkommt, ist für alle durch P gehende Richtungen $B\,P$, $A\,P$, $C\,P$ u. s. w. konstant, man nennt dieses Produkt die *Potenz* des Punktes P in Bezug auf den Kreis $A\,B\,C$.

Wir wollen kurz setzen:

$$P\,B\,.\,P\,B' = P^2 \quad (8)$$

Die Gleichung (7) enthält noch eine zweite geometrische Bedeutung, es ist nämlich: $\dfrac{B\,C}{\sin w'}$ oder $\dfrac{B\,C}{\sin w}$ der Durchmesser des Kreises $A\,B\,C$. Nennt man diesen Durchmesser D, und führt die früher gebrauchten kürzeren Bezeichnungen der drei Strahlen wieder ein, nämlich:

$$P\,B = B \qquad P\,C = C \qquad B\,C = a \quad (9)$$

so hat man jetzt aus (7):

$$\frac{B\,.\,C}{a}\sin\sigma_1 = \frac{P^2}{D} \quad (10)$$

Die Ausdrücke für alle drei Schnittwinkel $\sigma_1\, \sigma_2\, \sigma_3$ sind:

$$\sin\sigma_1 = \frac{a}{B\,C}\frac{P^2}{D} \qquad \sin\sigma_2 = \frac{b}{A\,C}\frac{P^2}{D} \qquad \sin\sigma_3 = \frac{c}{A\,B}\frac{P^2}{D} \tag{11}$$

Nunmehr lässt sich der Ausdruck für M_x^2 nach (1) bilden, denn den Zähler hievon haben wir bereits in (4) fertig gestellt, und der Nenner von (1) bildet sich aus (2) und (11). Wenn man zugleich im Zähler und im Nenner mit $A\,B\,C$ multipliziert, so findet man:

$$\frac{M_x^2}{(\delta)^2} = \frac{\frac{D^2}{P^4}\, p_1 A^2(B\cos\varphi_3 - C\cos\varphi_2)^2 + p_2 B^2(C\cos\varphi_1 - A\cos\varphi_3)^2 + p_3 C^2(A\cos\varphi_2 - B\cos\varphi_1)^2}{\frac{a^2\,b^2\,c^2}{A^2\,B^2\,C^2}(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3)} \tag{12}$$

Schreibt man im Zähler überall *sin* statt *cos*, so hat man den entsprechenden Ausdruck für M_y^2, d. h.:

$$\frac{M_y^2}{(\delta)^2} = \frac{\frac{D^2}{P^4}\, p_1 A^2(B\sin\varphi_3 - C\sin\varphi_2)^2 + p_2 B^2(C\sin\varphi_1 - A\sin\varphi_3)^2 + p_3 C^2(A\sin\varphi_2 - B\sin\varphi_1)^2}{\frac{a^2\,b^2\,c^2}{A^2\,B^2\,C^2}(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3)} \tag{13}$$

Durch Addition dieser beiden Ausdrücke (12) und (13) bekommt man das mittlere Fehlerquadrat M^2 für den Punkt überhaupt. Dabei ergeben sich erhebliche Vereinfachungen, z. B.:

$$(B\cos\varphi_3 - C\cos\varphi_2)^2 + (B\sin\varphi_3 - C\sin\varphi_2)^2$$
$$= B^2 + C^2 - 2\,B\,C\cos(\varphi_3 - \varphi_2) = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\cos\alpha = a^2$$

Damit giebt die Addition von (12) und (13):

$$\frac{M^2}{(\delta)^2} = \frac{D^2}{P^4}\,\frac{A^2\,B^2\,C^2}{a^2\,b^2\,c^2}\,\frac{p_1\,A^2\,a^2 + p_2\,B^2\,b^2 + p_3\,C^2\,c^2}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3} \tag{14}$$

Wenn alle Gewichte p der gemessenen Winkel gleich werden, d. h. $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, so hat man:

$$\frac{M^2}{(\delta)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{D^2}{P^4}\,A^2\,B^2\,C^2\left(\frac{A^2}{b^2c^2} + \frac{B^2}{a^2c^2} + \frac{C^2}{a^2b^2}\right) \tag{15}$$

wobei die Bezeichnungen von Fig. 27. gelten, und P^2 die Potenz des pothenotischen Punktes P in Bezug auf den Kreis ist, welcher um das gegebene Dreieck beschrieben wird. D ist der Durchmesser dieses Kreises, (δ) ist der mittlere Winkelmessungsfehler.

Aus (14) bilden wir noch die Fehlerformeln für die drei besonderen Fälle, dass nur je zwei Winkel (gleich genau) gemessen sind, z. B. wenn α und β allein gemessen sind, ist $p_1 = p_2 = 1$ und $p_3 = 0$ und der entsprechende Wert von M heisse $M^{\alpha\beta}$. Hiefür und für die zwei andern Fälle hat man:

$$\frac{(M^{\alpha\beta})^2}{(\delta)^2} = \frac{D^2}{P^4}\,A^2\,B^2\,C^2\left(\frac{A^2}{b^2\,c^2} + \frac{B^2}{a^2\,c^2}\right) \tag{16ab}$$

$$\frac{(M^{\alpha\gamma})^2}{(\delta)^2} = \frac{D^2}{P^4}\,A^2\,B^2\,C^2\left(\frac{A^2}{b^2\,c^2} + \frac{C^2}{a^2\,b^2}\right) \tag{16ac}$$

$$\frac{(M^{\beta\gamma})^2}{(\delta)^2} = \frac{D^2}{P^4}\,A^2\,B^2\,C^2\left(\frac{B^2}{a^2c^2} + \frac{C^2}{a^2\,b^2}\right) \tag{16bc}$$

zieht man die Gleichung (15) zu, so hat man wieder wie in früheren ähnlichen Fällen:

$$M^2 = \frac{1}{2} \frac{(M^{\alpha\beta})^2 + (M^{\alpha\gamma})^2 + (M^{\beta\gamma})^2}{3} \tag{17}$$

Die Formeln (16) stimmen mit der früher für zwei Winkel aufgestellten Formel (7) § 106. S. 312, wenn man die Werte von P^2 und D nach (10) berücksichtigt. Um hiezu die Formel (10) auf (16_{ab}) anzuwenden, muss man mit cyklischer Vertauschung schreiben:

$$\frac{A\,B}{c} \sin \sigma_3 = \frac{P^2}{D}$$

Dieses in (16_{ab}) gesetzt giebt:

$$\frac{(M^{\alpha\beta})^2}{(\delta)^2} = \frac{1}{\sin^2\sigma_3} \left(\frac{A^2\,C^2}{b^2} + \frac{B^2\,C^2}{a^2} \right)$$

Dieses stimmt mit (7) § 106. S. 312 überein, wenn man die Änderung der Zeichen berücksichtigt. (d_1 d_2 d_3 entspricht B C A.)

Aus der Formel (14) oder (15) kann man folgende Schlüsse ziehen:

Wenn der Punkt P auf den Kreis der drei gegebenen Punkte fällt, so wird das Potenz-Quadrat $P^4 = 0$, also $M = \infty$, wie es sein muss, ausgenommen, wenn zugleich eine der Strahlenlängen A, B oder $C = 0$ wird, d. h. wenn der pothenotische Punkt P mit einem der gegebenen Punkte A, B oder C zusammenfällt. In diesem Ausnahmsfalle wird der mittlere Fehler M unbestimmt, und lässt sich nur angeben, wenn P als ein Punkt einer bestimmten, durch den gegebenen Punkt A, B oder C gehenden Linie betrachtet wird. Wenn der Kreisdurchmesser $D = \infty$ ist, d. h. wenn die drei gegebenen Punkte auf einer Geraden liegen, so wird der eine Abstand des Punktes P von dem Kreis, d. h. von der Geraden unendlich, der andere bleibt endlich. Der Quotient $\frac{D}{P^2}$, den wir brauchen, bleibt aber dabei doch endlich, denn nehmen wir etwa $P^2 = F f$, wo $F = \infty$ und f endlich ist, so wird:

$$\frac{D}{P^2} = \frac{D}{F} \frac{1}{f} = \frac{1}{f}$$

Denn die *beiden* unendlich grossen Werte D und F sind hier gleich.

Nunmehr betrachten wir den besonderen Fall, dass ein gleichseitiges Dreieck $A\,B\,C$ gegeben ist, dessen Seite $a = b = c = 1$.

Damit wird der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises:

$$D = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

und im Übrigen giebt (15):

$$\frac{M^2}{(\delta)^2} = \mu^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{D}{f f'}\right)^2 A^2\,B^2\,C^2\,(A^2 + B^2 + C^2) \tag{18}$$

wenn f und f' die Abstände des pothenotisch bestimmten Punktes von dem Kreis der drei gegebenen Punkte sind.

Hiernach lässt sich μ berechnen für jeden beliebigen Punkt, z. B.:

1) *Dreiecksmitte* giebt $A = B = C = f = f' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

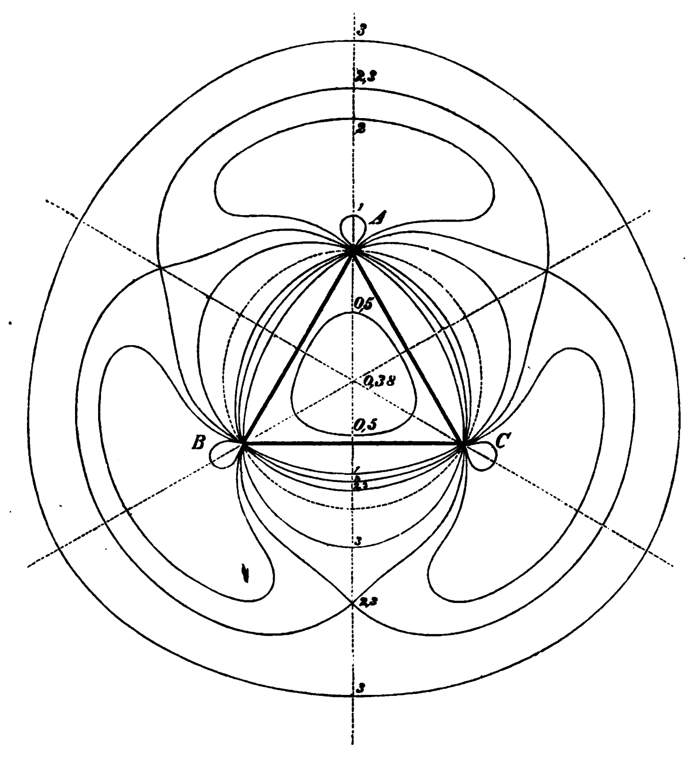
$$\mu^2 = \frac{4}{27} \qquad \mu = 0{,}385.$$

2) *Seitenmitte:* $A = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad B = C = \frac{1}{2}, \quad ff' = \frac{1}{4}$

$$\mu^2 = \frac{5}{12} \qquad \mu = 0{,}645.$$

Fig. 29.

Genauigkeitskurven für pothenotische Bestimmung mit 3 Winkeln oder 3 Richtungen.



3) In der *Ecke des Dreiecks* ist μ unbestimmt, wenn nicht zugleich eine durch die Ecke gehende Linie angegeben wird, auf welcher der Schnittpunkt liegen soll, daher:

3a) auf der *Winkelhalbierungslinie:* $A = 0, \; B = C = 1,$

$$f = 0, \; f' = D, \qquad \frac{A}{f} = \frac{0}{0} = 1,$$

$$\mu^2 = \frac{2}{3} \qquad \mu = 0{,}816;$$

3b) auf einer *Dreiecksseite:* $A = 0, \quad B = C = 1,$

$$f = 0, \quad f' = 1, \qquad \frac{A}{f} = \frac{0}{0} = 1$$

$$\mu^2 = \frac{8}{9} \qquad \mu = 0{,}943.$$

Die übrigen Genauigkeitsverhältnisse werden durch die in Fig. 29. gezeichneten Genauigkeitskurven veranschaulicht.

Die Kurve für $\mu = 2{,}3$, welche den Übergang zwischen den zwei Hauptformen bildet, ist im Innern des Kreises, wo sie nichts Besonderes zeigt, der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

§ 116. Pothenotische Bestimmung mit drei Richtungen.

Man kann den im vorigen § 115. angenommenen Fall, dass drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ gemessen und ausgeglichen sind, auf den Fall der Richtungsmessung zurückführen, mit Hilfe unserer früheren Betrachtungen von § 83. S. 257.

Schreiben wir zunächst nochmals die Gleichung (14) des vorigen § 115. S. 336:

$$\frac{M^2}{(\delta)^2} = \frac{D^2}{P^4}\frac{A^2\,B^2\,C^2}{a^2\,b^2\,c^2}\frac{p_1\,A^2\,a^2 + p_2\,B^2\,b^2 + p_3\,C^2\,c^2}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3} \tag{1}$$

Hier sind $p_1\ p_2\ p_3$ die Winkelgewichte für die drei gemessenen und ausgeglichenen Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$. Nach (9) § 83. S. 258 entsprechen dieser Ausgleichung die Richtungsgewichte $q_1\ q_2\ q_3$ nach folgenden Formeln:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{p_1}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3}\ ,\quad \frac{1}{q_2} = \frac{p_2}{p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3}\ ,\quad \frac{1}{q_3} = \ldots \tag{2}$$

Dieses in (1) eingesetzt giebt:

$$\frac{M^2}{(\delta)^2} = \frac{D^2}{P^4}\frac{A^2\,B^2\,C^2}{a^2\,b^2\,c^2}\left(\frac{A^2\,a^2}{q_1} + \frac{B^2\,b^2}{q_2} + \frac{C^2\,c^2}{q_3}\right) \tag{3}$$

Diese Gleichung gilt für den Fall, dass ein Punkt P pothenotisch eingeschnitten wird durch einen Satz von Richtungen, welche nach den Festpunkten A, B, C gehen, und bzw. die Gewichte $q_1\ q_2\ q_3$ haben.

Bei Theodolitmesungen werden die drei Richtungen eines Satzes wohl immer gleiche Gewichte $q_1\ q_2\ q_3$ haben.

Einen besonderen Fall ungleicher Gewichte $q_1\ q_2\ q_3$ kann man bei dem Rückwärts-Einschneiden mit dem *Messtisch* annehmen. Hier ist es wohl denkbar, dass nicht sowohl das Anzielen der entfernten Punkte mit dem Kippregel-Fernrohr, als vielmehr das Anlegen des Lineals auf dem Tisch an die Zeichenpunkte, mit Fehlern behaftet ist. Ja, wenn man die Fehler *nur* letzteren Handtierungen zuschreibt, und etwa hier einen mittleren Lineal-Anlagefehler oder mittleren Punkt-Zeichnungsfehler $\pm e$ annimmt, so erzeugt dieses bei Strahlenlängen $A\ B\ C$ mittlere Richtungsfehler:

$$\varepsilon_1 = \pm\frac{e}{A} \qquad \varepsilon_2 = \pm\frac{e}{B} \qquad \varepsilon_3 = \pm\frac{e}{C} \tag{4}$$

Wenn hiernach die Richtungsfehler ε umgekehrt proportional den Strahlenlängen sind, so muss man die Richtungsgewichte q proportional den Quadraten $A^2\ B^2\ C^2$ setzen, oder in Zeichen:

$$\frac{(\delta)^2}{q_1} = \varepsilon_1^2 = \frac{e^2}{A^2}\ ,\quad \frac{(\delta)^2}{q_2} = \varepsilon_2^2 = \frac{e^2}{B^2}\ ,\quad \frac{(\delta)^2}{q_3} = \varepsilon_3^2 = \frac{e^2}{C^2} \tag{5}$$

Dieses in (3) gesetzt giebt:

$$M'^2 = e^2\frac{D^2}{P^4}\frac{A^2\,B^2\,C^2}{a^2\,b^2\,c^2}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad \text{(Messtisch)} \tag{6}$$

Hier sind e^2, D^2, a^2, b^2, c^2 konstant d. h. mit dem Grunddreieck $A\,B\,C$ gegeben, dagegen die Strahlenlängen A, B, C und die Kreis-Potenz P^2 sind mit der Lage des pothenotischen Punktes veränderlich. Wir wollen deshalb (6) so ordnen:

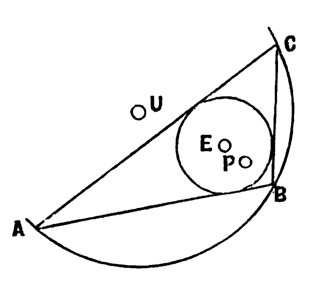
$$M'^2 = e^2\,D^2\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2\,b^2\,c^2}F^2 \quad \text{wo} \quad F = \frac{A\,B\,C}{P^2} \tag{7}$$

§ 117. Günstigster pothenotischer Punkt.

Wenn ein Basisdreieck $A\,B\,C$ gegeben ist, gegen welches ein Punkt P pothenotisch festgelegt werden soll, so kann man nach der günstigsten Lage von P fragen.

Um diese Frage zu beantworten, muss man die Funktion (1) oder (3) § 116. S. 339 in ihrem Verlauf über die ganze Ebene verfolgen, und durch Konstruktion von Genauigkeitskurven kann man jedenfalls die Lage des Minimums jener Funktion feststellen. So haben wir beispielshalber in dem ganz unregelmässigen Dreieck $A\,B\,C$ (Fig. 30.), in welchem U den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises und E den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises bedeutet, die günstigste pothenotische Lage P in der Nähe des stumpfen Winkels B empirisch bestimmt.

Fig. 30.
Günstigster pothenotischer Punkt P für Theodolitmessung.



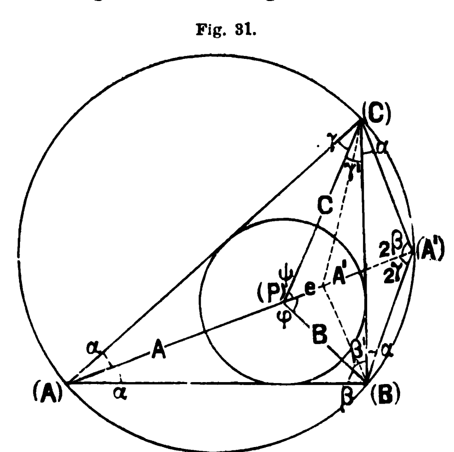
Ein einfaches *Gesetz* zur Bestimmung dieser günstigsten Punktlage ist nicht gefunden worden.

Dieses gilt für die gewöhnliche Bestimmung mit dem Theodolit, wobei die Gewichte der gemessenen Winkel oder Richtungen entweder gleich oder beliebig angenommen werden, jedenfalls in keiner Beziehung zu den Längen $A\;B\;C$ der drei Strahlen stehen.

Anders verhält es sich bei der Annahme, dass die Richtungsgewichte q proportional den Entfernungsquadraten $A^2\,B^2\,C^2$ genommen werden dürfen, was, wie wir im vorigen § 116. S. 339 gezeigt haben, etwa bei einer Messtischaufnahme zutreffen mag.

In diesem besonderen Fall mit der Gleichung (7) § 116. S. 339 besteht für das Minimum des pothenotischen Fehlers ein einfaches Gesetz. Der günstigte Punkt ist in diesem Fall der *Mittelpunkt des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises*, was wir durch folgende Betrachtung beweisen wollen.

Fig. 31.



In Fig. 31. sind die Strahlenlängen wie bisher mit A, B, C bezeichnet; die Ecken des gegebenen Dreiecks sind zur Unterscheidung mit (A), (B), (C) benannt. (P) ist der Mittelpunkt des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises, und dem entsprechend sind die Winkel in (A), (B), (C) bzw. mit 2α, 2β, 2γ bezeichnet, indem α, β, γ hier die *halben* Dreieckswinkel vorstellen, so dass man hat:

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ. \tag{1}$$

Ausser dem *ein*geschriebenen Kreis haben wir auch den *um* das Dreieck beschriebenen Kreis, und betrachten auf demselben den Punkt (A'), welcher auf der Geraden $(A)\,(P)\,(A')$ liegt.

Die Funktion, um welche es sich nun handelt, ist nach (7) § 116. S. 339:

$$F = \frac{A\,B\,C}{P^2} \tag{2}$$

Dabei ist P^2 die Potenz des Punktes (P), bezogen auf den umschriebenen Kreis, d. h. z. B.:

$$P^2 = A A' \tag{3}$$

wenn A' die Entfernung von (P) nach (A') ist. Damit wird (2):

$$F = \frac{B C}{A'} \tag{4}$$

Wir betrachten nun die Änderung dieser Funktion F beim Verschieben des Punktes (P) in der Richtung nach (A') hin um das kleine Stück e. Dadurch wird die Halbierung der Winkel in (B) und (C) gestört, d. h. wenn β der halbe Winkel in (B) und γ der halbe Winkel in (C) ist, so werden bei der Verschiebung die mit β' und γ' bezeichneten Teile sich ändern, d. h. kleiner als β bzw. γ werden. B und C lassen sich beide in A' ausdrücken:

$$B = \frac{A'}{\sin(\alpha + \beta')} \sin 2\gamma \qquad C = \frac{A'}{\sin(\alpha + \gamma')} \sin 2\beta \tag{5}$$

also:

$$F = A' \frac{\sin 2\gamma \sin 2\beta}{\sin(\alpha + \beta') \sin(\alpha + \gamma')} \tag{6}$$

Bei der Verschiebung e ändern sich von den hier benützten Winkeln nur die Winkel β' und γ', die Differentiierung von (6) giebt daher:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dA'}{A'} - d\beta' \operatorname{cotg}(\alpha + \beta') - d\gamma' \operatorname{cotg}(\alpha + \gamma') \tag{7}$$

Aus Fig. 31. S. 340 entnimmt man:

$$dA' = -e \quad , \quad d\beta' = -\frac{e}{B} \sin\varphi \quad , \quad d\gamma' = -\frac{e}{C} \sin\psi$$

und wenn man zugleich die Formeln (5) wieder benützt, so giebt (7):

$$\frac{dF}{F} = -\frac{e}{A'} \left\{ 1 - \frac{\sin\varphi \cos(\alpha + \beta')}{2 \sin\gamma \cos\gamma} - \frac{\sin\psi \cos(\alpha + \gamma')}{2 \sin\beta \cos\beta} \right\} \tag{8}$$

Da aber nach Fig. 31. S. 340:

$$\varphi = \alpha + \beta \text{ bzw. } \varphi = \alpha + \beta' \quad \text{und} \quad \psi = \alpha + \gamma'$$

und nach (1):

$$\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma \qquad (\alpha + \gamma) = 90^\circ - \beta$$

so folgt aus (8):

$$\frac{dF}{F} = -\frac{e}{A'} \left\{ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\} = 0$$

Da dieselbe Gleichung auch für Verschiebung nach der Richtung (B) oder (C) gilt, muss die Funktion F, als Gleichung einer Fläche betrachtet, in der Ebene des Dreiecks Berührung in (P) geben, oder die Funktion F hat in P ein Minimum.

Anmerkungen.

Einen mehr direkten Beweis für das Minimum der Funktion $\frac{ABC}{P^2}$ giebt Herr Professor *Kiepert* in der „Zeitschrift für Vermessungswesen" 1887.

Die im Vorstehenden behandelte Fehlertheorie für pothenotisches Einschneiden mit dem Messtisch, welche wir in stetiger Folge aus dem Prinzip des mittleren Fehlers entwickelt haben, kommt in dem Schluss-Satze, betreffend das Minimum im Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, in Berührung mit Fehler-Untersuchungen, welche einen anderen Entwicklungsgang genommen haben, nämlich:

C. A. F. Peters, Bestimmung der Fehler, welche bei der Auflösung der pothenotischen Aufgabe mit dem Messtisch entstehen, in dem „Bulletin de la classe physico-mathématique de l'académice imp. d. sc. de St. Petersbourg". Petersburg und Leipzig 1849. Tome VII, S. 145.

Richelot und *Mondthal*, Astr. Nachrichten 42. Band (1856) S. 215—219.

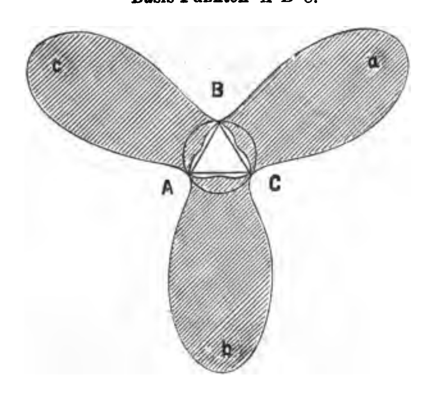
Andrä, Fehlerbestimmung bei der Auflösung der pothenotischen Aufgabe mit dem Messtisch. Astr. Nachrichten 47. Band (1858) S. 200 (Fehler-Ellipse), vgl. auch Zeitschrift für Vermessungswesen 1876, S. 403—407.

§ 118. Vergleichung zwischen pothenotischer Bestimmung und Vorwärts-Einschneiden mit drei Strahlen.

Eines der schönsten Resultate aller unserer Kurven-Konstruktionen erhalten wir durch Übereinanderlegen der Genauigkeitskurven für Vorwärts-Einschneiden mit drei Strahlen § 114. und der Genauigkeitskurven für pothenotische Bestimmung § 115., wobei beiden Arten von Punktbestimmung dasselbe gleichseitige Dreieck ABC zu Grunde liegt.

Alle die Punkte, in welchen sich zwei gleichwertige Kurven der einen und der andern Art (d. h. zwei gleichbezifferte Kurven von Fig. 25. S. 232 und Fig. 29. S. 338) schneiden, bilden in ihrer Gesamtheit die Grenzkurve für pothenotisches Einschneiden mit drei Strahlen, bei gemeinsamem gleichseitigem Basis-Dreieck.

Fig. 32.*)
Grenzkurve für pothenotisches Einschneiden und Vorwärts-Einschneiden mit den gemeinsamen Basis-Punkten A B C.



In Fig. 32. ist diese Grenzkurve in kleinem Massstab gezeichnet. Die Kurve verläuft zum Teil innerhalb, zum Teil ausserhalb des Grundkreises um A B C, und giebt ausserhalb desselben die drei beutelartigen Zweige a b c.

Die Gesamtkurve wird in *einem* Zuge durchlaufen, und kehrt in sich selbst zurück.

$$A\ C\ a\ B\ A\ b\ C\ B\ c\ A \ldots$$

Die Knotenpunkte A B C werden bei einer Durchlaufung je zweimal getroffen.

Vorwärts-Einschneiden ist genauer als pothenotische Bestimmung innerhalb der drei beutelartig gestalteten schraffierten Flächenteile BaC, CbA, AcB, welche naturgemäs den für pothenotische Bestimmung vollkommen ungünstigen Kreis in seiner ganzen Ausdehnung enthalten. Der ganze Flächenraum des Dreiecks ABC selbst gehört zum Gebiete der pothenotischen Bestimmung.

---

*) Diese Figur ist geradezu durch Übereinanderlegen von Fig. 25. S. 332, und Fig. 29. S. 338 graphisch erhalten worden (in grossem Massstab mit Dreiecksseite $a = 6^{cm}$), wobei zum Teil ungünstige schiefe Schnitte benützt werden mussten. Eine spätere, mehr rechnerische Behandlung nach den Gleichungen (4) S. 331 und (15) S 336 hat für die Hauptpunkte in den drei Axen schärfer gegeben:

$$x = 0{,}08a \ , \ \mu = 0{,}95 \quad \text{und} \quad x = 2{,}93a \ , \ \mu = 12{,}63.$$

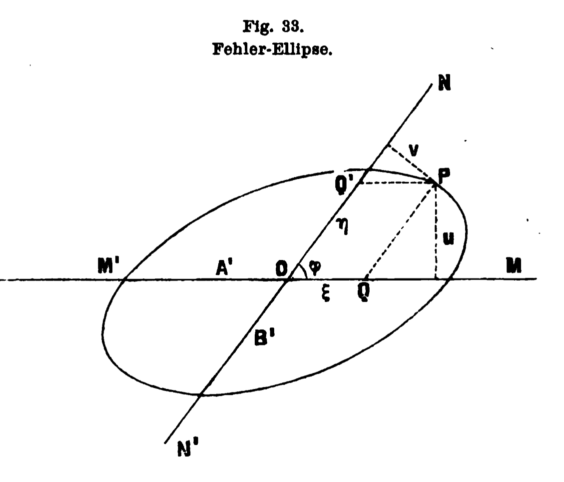
Dabei ist a die Seite des gleichseitigen Grunddreiecks ABC und x der Abstand eines Kurvenpunktes von einer solchen Seite.

§ 119. Die Fehler-Ellipse. *)

Nachdem wir in den Genauigkeitskurven ein Mittel kennen gelernt haben, um die mittleren Fehler verschiedener Punkte zu vergleichen, dient die Fehler-Ellipse dazu, die Genauigkeit in *einem* Punkte aber nach verschiedenen Richtungen zu bestimmen.

In Fig. 33. seien $M'M$ und $N'N$ zwei Gerade, welche durch ihren Schnitt einen Punkt O bestimmen. Wenn die Gerade $M'M$ eine Parallel-Verschiebung u, und die Gerade $N'N$ eine Parallel-Verschiebung v erfährt, so erscheint ein anderer Punkt P als Schnittpunkt.

Fig. 33.
Fehler-Ellipse.



Sind h_1 und h_2 Genauigkeitszahlen für die Fehler u und v, so sind die Wahrscheinlichkeiten für u und v, nach dem Fehler-Gesetz (10) § 86. S. 266 bzw. proportional den Grössen:

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 u^2} \quad \text{und} \quad \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 v^2} \tag{1}$$

und die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Fehler u und v, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Schnittpunktes P, ist proportional dem Produkt beider Einzelwahrscheinlichkeiten (1), d. h. proportional der Exponentialgrösse:

$$\frac{h_1 h_2}{\pi} e^{-(h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2)} \tag{2}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist also konstant, wenn der Exponent in (2) konstant ist, d. h.

$$h_1^2 u^2 + h_2^2 v^2 = s^2 \tag{3}$$

Um statt der abstrakten Zahlen h_1 und h_2 die mittleren Fehler einzuführen, setzen wir nach (6) § 89. S. 271:

---

*) Die Fehler-Ellipse wurde im Jahr 1858 von *Andrä* behandelt bei Gelegenheit einer Genauigkeitsuntersuchung für pothenotische Bestimmung (Astr. Nachrichten 47. Band S. 193—202), und in der Dänischen Gradmessung (Den Danske Gradmaaling 1. Band, Kopenhagen 1867 S. 212—219) wurde diese Theorie von *Andrä* weiter entwickelt und auf die Dänische Triangulierung angewendet (vgl. hiezu auch einen Bericht von *Helmert* in der Vierteljahrsschrift der astr. Gesellsch. 12. Jahrg. 1877, S. 184 u. ff.).

Unabhängig hievon hat *Helmert* im Jahr 1868 die Theorie der Fehler-Ellipse aufgestellt in seinen „Studien über rationelle Vermessungen (*Schlömilch*, Zeitschrift für Math. u. Physik 1868, S. 73 u. ff.) und in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q.“, Leipzig 1872 S. 231—256 weiter verfolgt. Die Fehler-Ellipse wurde hiebei in Beziehung gebracht zu der Theorie der „partiell äquivalenten Beobachtungen“.

Eine holländische Arbeit von *Schols* über die Fehler-Ellipse wird von *Helmert* im Litteraturbericht der Zeitschr. f. Verm. 1876 S. 22 angeführt.

$$h_1^2 = \frac{1}{2\,m_1^2} \qquad h_2^2 = \frac{1}{2\,m_2^2} \tag{4}$$

damit geht (3) über in:

$$\left(\frac{u}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{m_2}\right)^2 = 2\,s^2 \tag{5}$$

und die Wahrscheinlichkeit einer Punktlage wird proportional der Exponential-Grösse:

$$E = e^{-s^2} \tag{6}$$

Indem wir nach Fig. 33. S. 343 die schiefwinkligen Coordinaten einführen:

$$\xi = \frac{v}{\sin\varphi} \qquad \eta = \frac{u}{\sin\varphi} \tag{7}$$

und zugleich setzen:

$$2\left(\frac{m_1 s}{\sin\varphi}\right)^2 = B'^2 \qquad 2\left(\frac{m_2 s}{\sin\varphi}\right)^2 = A'^2 \tag{8}$$

geht obige Gleichung (5) über in:

$$\frac{\xi^2}{A'^2} + \frac{\eta^2}{B'^2} = 1 \tag{9}$$

Dieses ist die Gleichung einer *Ellipse*, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser A' und B' als schiefwinklige Coordinaten-Axen.

Wenn s sich ändert, so bleibt doch das Verhältnis $A' : B'$ und der Schnittwinkel φ konstant, d. h. die Ellipse bleibt sich ähnlich und sie bleibt auch gegen die Geraden M und N ähnlich liegend (vgl. das folgende (17)).

Wir haben deshalb den Satz, dass bei der Bestimmung eines Punktes durch zwei sich schneidende Gerade, Schnittpunkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen gruppiert sind.

Um auf die Hauptaxen A und B der Ellipse überzugehen, benützen wir die bekannten Sätze über konjugierte Durchmesser der Ellipse, nämlich:

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2 \tag{10}$$

$$2\,A\,B = 2\,A'\,B'\sin\varphi \tag{11}$$

Diese zwei Gleichungen geben durch Addition und Subtraktion $(A + B)^2$ und $(A - B)^2$, und hieraus:

$$2\,A^2 = A'^2 + B'^2 + \sqrt{(A'^2 + B'^2)^2 - 4\,A'^2\,B'^2\sin^2\varphi}$$

$$2\,B^2 = A'^2 + B'^2 - \sqrt{(A'^2 + B'^2)^2 - 4\,A'^2\,B'^2\sin^2\varphi}$$

Setzt man hier A'^2 und B'^2 nach (8) ein, so erhält man:

$$A^2 = \frac{s^2}{\sin^2\varphi}\left\{(m_1^2 + m_2^2) + \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4\,m_1^2\,m_2^2\sin^2\varphi}\right\} \tag{12}$$

$$B^2 = \frac{s^2}{\sin^2\varphi}\left\{(m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4\,m_1^2\,m_2^2\sin^2\varphi}\right\} \tag{13}$$

$$A^2 + B^2 = 2\,s^2\,\frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2\varphi} = 2\,s^2\,M^2 \tag{14}$$

wo M die Bedeutung des mittleren Schnittpunktsfehlers nach (5) § 99. S. 297 hat.

Die Grösse s^2 ist in (3) ganz willkürlich eingeführt worden.

Setzt man als besonderen Fall $s^2 = \frac{1}{2}$, so hat man nach (10) und (14):

$$s^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2 = M^2 \tag{15}$$

d. h. die Quadratsumme der Ellipsen-Haupthalbaxen A und B und die Quadratsumme irgend welcher konjugierter Halbaxen A' und B' geben das mittlere Fehlerquadrat M^2 des Schnittpunktes P.

Nachdem wir so die Längen A und B der beiden Haupthalbaxen der Ellipse bestimmt haben, kann man auch noch nach der Lage der Hauptaxen gegen die ursprünglichen Geraden MM' und NN' fragen. Man kann durch Transformation der Coordinaten diese Axenlagen bestimmen, und dabei nochmals die Formeln (12) und (13) herleiten. Da wir eine allgemeinere Entwicklung dieser Art später in § 121. und § 123. zu machen haben werden, mag hier folgendes genügen:

Wenn man in Fig. 32. S. 342, x auf OM und y rechtwinklig hiezu zählt, so ist:

$$\xi = x - y \cot \varphi \quad , \quad \eta = y \operatorname{cosec} \varphi$$

Setzt man dieses in (9) und nimmt dazu aus (8) mit $s^2 = \frac{1}{2}$:

$$\frac{m_1}{\sin \varphi} = B' \qquad \frac{m_2}{\cos \varphi} = A'$$

so findet man:

$$x^2 m_1^2 \sin^2 \varphi + y^2 (m_1^2 \cos^2 \varphi + m_2^2) - 2 x y m_1^2 \sin \varphi \cos \varphi = m_1^2 m_2^2 \tag{16}$$

Zur Coordinaten-Drehung sei:

$$x = x' \cos \Theta - y' \sin \Theta \quad , \quad y = x' \sin \Theta + y' \cos \Theta$$

Setzt man dieses in (16), und setzt in der entstehenden Gleichung den Coëfficienten von $x'y'$ gleich Null, so wird:

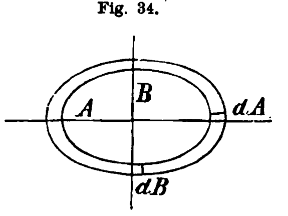
$$\operatorname{tang} 2\Theta = \frac{m_1^2 \sin 2\varphi}{m_2^2 + m_1^2 \cos 2\varphi} \tag{17}$$

Dabei ist Θ der Winkel der grossen Ellipsen-Axe mit der Geraden OM in Fig. 32. S. 342.

§ 120. Wahrscheinlichkeit einer Punktlage innerhalb oder ausserhalb der Ellipse.

Nachdem erkannt ist, dass alle Ellipsenpunkte gleich wahrscheinliche Lage haben, kann man die Wahrscheinlichkeit bestimmen für das Fallen eines Punktes innerhalb der Ellipse. (*Helmert*, Studien über rationelle Vermessungen. 4.) Für die Differentialbehandlung haben alle Punkte, welche auf einem schmalen Ellipsenring (Fig. 34.) liegen, gleiche Wahrscheinlichkeit; wir bestimmen deshalb zunächst die Fläche dieses Ellipsenrings. Die Ellipsenfläche selbst ist:

Fig. 34.



$$\varepsilon = A B \pi \tag{1}$$

folglich die Fläche des Ellipsenrings:

$$d\varepsilon = (A\,dB + B\,dA)\,\pi \tag{2}$$

A und B, sowie dA und dB sind hier nicht unabhängig, sondern durch die Gleichungen (12) und (13) § 119. S. 344 mit einander verbunden, nämlich:

$$A = \frac{s}{k_1} \quad \text{und} \quad B = \frac{s}{k_2} \tag{3}$$

$$dA = \frac{ds}{k_1} \qquad dB = \frac{ds}{k_2} \tag{4}$$

Hiebei ist über k_1 und k_2 (welche sich aus der Vergleichung von (3) mit (12) und (13) § 119. S. 344 ergeben) nur so viel zu wissen nötig, dass sie nur von m_1, m_2 und φ abhängen, also für eine Punktbestimmung konstant sind. (3) und (4) in (2) gesetzt geben:

$$d\varepsilon = 2\frac{s\,ds}{k_1 k_2}\pi \tag{5}$$

Das ist die Fläche des Ellipsenrings.

Für alle Punkte, welche auf diesem Ellipsenring von der Fläche $d\varepsilon$ liegen, ist die Wahrscheinlichkeit dieselbe, nämlich nach (6) § 119. S. 344 proportional dem Ausdruck e^{-s^2}. Um die Wahrscheinlichkeit des Fallens auf eine Fläche zu veranschaulichen, denken wir uns in jedem Flächenpunkte die Wahrscheinlichkeit als Ordinate aufgetragen, dann ist (nach § 84. I.) die Wahrscheinlichkeit für das Fallen auf die Fläche, proportional dem durch jene Ordinaten mit den zugehörigen Flächen-Elementen erzeugten Volumen, d. h. für das Fallen auf den Ellipsenring $d\varepsilon$ ist die Wahrscheinlichkeit proportional der Grösse

$$e^{-s^2}\,d\varepsilon$$

und für das Fallen auf die Fläche der ganzen Ellipse ist die Wahrscheinlichkeit proportional dem Integral:

$$\int_0^s e^{-s^2} d\varepsilon = \frac{2\pi}{k_1 k_2}\int_0^s e^{-s^2} s\,ds \tag{6}$$

Das allgemeine Integral ist:

$$\int s\,e^{-s^2}\,ds = -\frac{1}{2}\,e^{-s^2}$$

folglich:

$$2\int_0^s s\,e^{-s^2}\,ds = -e^{-s^2} - (-1) = 1 - e^{-s^2}$$

also nach (6):

$$W = \cdots \frac{\pi}{k_1 k_2}\left(1 - e^{-s^2}\right) \tag{7}$$

W ist die Wahrscheinlichkeit des Fallens auf die Ellipsenfläche mit der Konstanten s, und durch . . . in (7) soll angedeutet sein, dass W *proportional* dem Ausdrucke (7) ist. Man sieht nun aber leicht, dass

$$W = \left(1 - e^{-s^2}\right) \tag{8}$$

denn wenn $s = \infty$ genommen wird, so wird hiernach $W = 1$, und die Ellipse selbst unendlich und bedeckt die ganze Ebene. Die Wahrscheinlichkeit einer Punktlage auf der Ebene überhaupt ist aber die Gewissheit, d. h. $W = 1$.

Zur numerischen Ausrechnung hat man aus (8) bequemer:

$$1 - W = e^{-s^2} \quad , \quad \log(1 - W) = -0{,}434\,2945\,s^2 \tag{9}$$

Mit $s^2 = \frac{1}{2}$ bekommt man die Ellipsendimensionen, welche bereits im vorigen § 119. bei (15) S. 344 erwähnt worden sind, wobei die Quadratsumme der Halbaxen A und B gleich dem mittleren Fehlerquadrat des Mittelpunktes ist. Wir bezeichnen, nach *Helmert,* diese Ellipse, für welche $A^2 + B^2 = M^2$ ist, mit $s^2 = \frac{1}{2}$, als

mittlere Fehler-Ellipse.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt innerhalb der mittleren Ellipse falle, ist ziemlich gering, nemlich nach (8) oder (9) wird:

$$\text{für } s^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad W = 0{,}39348$$

und hiezu:

$$A^2 + B^2 = 2\, s^2 M^2 \qquad \sqrt{A^2 + B^2} = 1{,}1774\, M$$

Für andere Werte von s bekommt man folgendes:

$$\left.\begin{array}{lll}
s = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071, & W = 0{,}39348\ \sqrt{A^2 + B^2} = M & \text{(Mittl. Fehler-Ellipse)} \\
s = 0{,}83254, & W = 0{,}50000\ \sqrt{A^2 + B^2} = 1{,}1774\, M & \text{(Wahrscheinl. Ellipse)} \\
s = 1, & W = 0{,}63212\ \sqrt{A^2 + B^2} = 1{,}4142\, M & \text{(Annahme von } \textit{Andrä}) \\
s = 2, & W = 0{,}98168\ \sqrt{A^2 + B^2} = 2{,}8284\, M & \\
s = 3, & W = 0{,}99999\ \sqrt{A^2 + B^2} = 4{,}2426\, M & \\
s = \infty, & W = \qquad \sqrt{A^2 + B^2} = \infty &
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Wir legen im Folgenden die mittlere Fehler-Ellipse zu Grunde, welche durch die einfache Beziehung $A^2 + B^2 = M^2$ ausgezeichnet ist.

§ 121. Die Fehler-Ellipse für mehrfache Punktbestimmung.

Hat man zur Bestimmung der Coordinaten eines Punktes mehr als zwei Fehlergleichungen, nämlich die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l}
v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\
v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\
v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}\right\} \quad (1)$$

wobei x y die Korrektionen sind, welche an irgend welchen Näherungswerten der Coordinaten noch anzubringen sind, so bestimmt man x y aus den 2 Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\
[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0
\end{array}\right\} \quad (2)$$

welche man einfacher so schreiben kann:

$$[a\,v] = 0 \qquad [b\,v] = 0 \quad (3)$$

Wir bezeichnen nun mit ξ η irgend welche Werte von x y, welche *nicht* dem Minimum $[v\,v]$, d. h. *nicht* den Normalgleichungen (2) bzw. (3) entsprechen, und die zu ξ η gehörigen übrigbleibenden Fehler seien mit v' bezeichnet. Es ist also:

$$\begin{array}{ll}
\text{allgemein:} & v = a\,x + b\,y + l \\
\text{speciell:} & v' = a\,\xi + b\,\eta + l \\
\text{Differenz:} & v' = a\,(\xi - x) + b\,(\eta - y) + v
\end{array}$$

Hieraus bildet man die Quadratsumme der v', nämlich:

$$\left.\begin{array}{rl}
[v'\,v'] = [a\,a]\,(\xi - x)^2 + 2\,[a\,b]\,(\xi - x)\,(\eta - y) & + 2\,[a\,v]\,\xi \\
+ \quad [b\,b]\,(\eta - y)^2 & + 2\,[b\,v]\,\eta \\
& + \quad [v\,v]
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Die Glieder mit $[a\,v]$ und $[b\,v]$ fallen wegen (3) fort, also:

$$[v'\,v'] = [v\,v] + [a\,a]\,(\xi - x)^2 + 2\,[a\,b]\,(\xi - x)\,(\eta - y) + [b\,b]\,(\eta - y)^2 \quad (4a)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $[v'\,v']$ ist nach § 94. S. 280, proportional der Exponentialgrösse:

$$e^{-h^2 [v'\,v']} \quad (5)$$

Dabei sind die Beobachtungen als gleich genau vorausgesetzt, oder es ist angenommen, dass bei ungleicher Genauigkeit die v' bereits mit den Gewichtswurzeln multipliziert seien. Jedenfalls ist h die Genauigkeitszahl für den mittleren Fehler (δ) vom Gewicht 1, d. h. nach (6) § 89. S. 271:

$$h^2 = \frac{1}{2\,(\delta)^2} \tag{6}$$

wo (δ) der mittlere Messungsfehler ist, oder der mittlere Gewichtseinheitsfehler, wenn die Fehlergleichungen (1) ursprünglich nicht gleichgewichtig sind.

Da $[v v]$ in (4a) in Bezug auf $(\xi - x)$ und $(\eta - y)$ konstant ist, so ist die erwähnte Wahrscheinlichkeit auch proportional der Grösse:

$$e^{-h^2([v'v'] - [v v])}$$

oder proportional der Exponentialgrösse:

$$e^{-s^2} \tag{7}$$

wobei s^2 nach (4a) und (6) folgende Bedeutung hat:

$$s^2 = \frac{[a a]\,(\xi - x)^2 + 2\,[a b]\,(\xi - x)\,(\eta - y) + [b b]\,(\eta - y)^2}{2\,(\delta)^2} \tag{7a}$$

Diese Gleichung stellt eine Ellipse vor mit den rechtwinkligen Coordinaten $(\xi - x)$ und $(\eta - y)$, auf den Mittelpunkt bezogen, und man erkennt aus (7) und (7a), dass alle Punkte, welche auf einer solchen Ellipse um die wahrscheinlichste Lage des zu bestimmenden Punktes liegen, gleich wahrscheinliche Lage haben (s konstant).

Um die Ellipsengleichung (7a) auf die Hauptaxen der Ellipse zu transformieren, wird das Coordinatensystem um einen Winkel ψ gedreht, wozu folgende Gleichungen dienen:

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \\ \eta - y &= x' \sin\psi + y' \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Setzt man dieses in (7a), so entsteht eine Gleichung von folgender Form:

$$[a'a']\,x'^2 + 2\,[a'b']\,x'y' + [b'b']\,y'^2 - 2\,(\delta)^2 s^2 = 0 \tag{9}$$

wo die Coëfficienten werden:

$$\left.\begin{aligned} [a'a'] &= [a a] \cos^2\psi + [b b] \sin^2\psi + 2\,[a b] \sin\psi \cos\psi \\ [b'b'] &= [a a] \sin^2\psi + [b b] \cos^2\psi - 2\,[a b] \sin\psi \cos\psi \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$[a'b'] = [a b]\,(\cos^2\psi - \sin^2\psi) - ([a a] - [b b]) \sin\psi \cos\psi \tag{11}$$

Wenn (9) die Ellipsengleichung, bezogen auf die Hauptaxen, sein soll, so muss das Glied $[a'b']\,x'y'$ verschwinden, also nach (11):

$$0 = 2\,[a b] \cos 2\psi - ([a a] - [b b]) \sin 2\psi \tag{12}$$

das ist dieselbe Gleichung wie (14) § 109. S. 317, wie auch schon (10) und (11) oben mit (10) und (11) § 109. S. 316 übereinstimmen.

Um zu der mittleren Fehler-Ellipse überzugehen (nach (10) § 120. S. 347), haben wir in (9) zu setzen $s^2 = \frac{1}{2}$, und da das zweite Glied in (9) durch (12) zum Verschwinden gebracht wurde, haben wir:

$$\frac{[a'a']}{(\delta)^2}\,x'^2 + \frac{[b'b']}{(\delta)^2}\,y'^2 = 1 \tag{13}$$

oder:

$$\frac{x'^2}{B^2} + \frac{y'^2}{A^2} = 1 \tag{13a}$$

wo

$$B^2 = \frac{(\delta)^2}{[a'a']} \qquad A^2 = \frac{(\delta)^2}{[b'b']} \tag{14}$$

Hiezu gehören die Formeln (16)—(20) § 109. S. 317, also:

$$B^2 = \frac{2\,(\delta)^2}{[a\,a]+[b\,b]+W} \quad \text{oder} \quad = 2\,(\delta)^2 \frac{[a\,a]+[b\,b]-W}{([a\,a]+[b\,b])^2-W^2} \tag{15}$$

und wenn man dieses mit Rücksicht auf die Bedeutung von $W^2 = ([a\,a]-[b\,b])^2 + 4\,[a\,b]^2$ weiter verfolgt, und auch A^2 entsprechend behandelt, so findet man:

$$B^2 = \frac{[a\,a]+[b\,b]-W}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]}\,\frac{(\delta)^2}{2} \qquad A^2 = \frac{[a\,a]+[b\,b]+W}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]}\,\frac{(\delta)^2}{2} \tag{16}$$

Diese Formeln stimmen mit (21) § 109. S. 317 überein, d. h. die Ellipsen-Axen A und B sind identisch mit den Längen des Minimalfehlers M_1 und des Maximalfehlers M_2 der Betrachtung von § 109.

Der Winkel ψ gehört hiebei als Azimut zu der kleinen Axe B. Wenn wir, wie früher, das Azimut $\Theta = \psi \pm 90°$ der grossen Axe A einführen, so haben wir folgende Gleichungen:

Gegeben: $[a\,a]$, $[b\,b]$ und (δ) (17)

$$tang\,2\,\Theta = \frac{-2\,[a\,b]}{-([a\,a]-[b\,b])} \tag{18}$$

$$W = \frac{-2\,[a\,b]}{sin\,2\,\Theta} = \frac{-([a\,a]-[b\,b])}{cos\,2\,\Theta} = \sqrt{([a\,a]-[b\,b])^2+4\,[a\,b]^2} \tag{19}$$

$$A^2 = \frac{[a\,a]+[b\,b]+W}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]}\,\frac{(\delta)^2}{2} \qquad B^2 = \frac{[a\,a]+[b\,b]-W}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]}\,\frac{(\delta)^2}{2} \tag{20}$$

Θ ist das Azimut der grossen Ellipsen-Axe A.

Zu einem Zahlen-Beispiel für die vorstehenden Formeln nehmen wir die pothenotische Winkelausgleichung auf Karlsruhe, Polytechnikum, welche wir früher in § 58. S. 140—144 ausführlich behandelt haben. Von S. 143 haben wir:

$$\left.\begin{array}{ll} [a\,a] = +57{,}9 & [a\,b] = -35{,}3 \\ & [b\,b] = +47{,}7 \end{array}\right\} \tag{21}$$

Mittlerer Winkelfehler $m = \pm 8{,}5''$, d. h. in der Bezeichnung von (17):

$$(\delta) = \pm 8{,}5$$

Setzt man dieses in (18), (19) und (20), so erhält man:

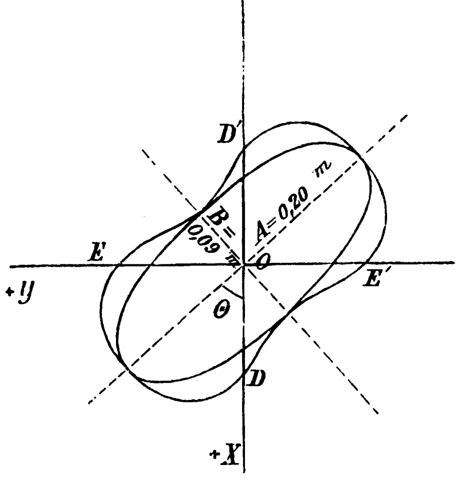
$$\left.\begin{array}{l} 2\,\Theta = 98°\,13' \quad , \quad \Theta = 49°\,7' \\ W = 71{,}33 \end{array}\right\} \tag{22}$$

$A = 2{,}054^{dm}$ $\quad B = 0{,}904^{dm}$

$A = 0{,}205^{m}$ $\quad B = 0{,}090^{m}$ (23)

damit ist Fig. 35. konstruiert.

Fig. 35.
Pothenotische Fehler-Ellipse: Karlsruhe, Polytechnikum.
Massstab 1 : 10.



Das Azimut Θ ist dabei von Süd nach West gezählt, indem das badische Coordinatensystem $+x$ nach Süden, und $+y$ nach Westen zählt (vgl. § 58. S. 140).

Nun kann man noch eine Probe für die Werte A und B der grossen und kleinen Ellipsen-Halbaxen machen. Dieselben geben nach (23):

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{0{,}205^2+0{,}090^2} = 0{,}224^{m} = M \tag{24}$$

Dieses ist der mittlere Punktfehler der pothenotischen Bestimmung.

Diesen mittleren Punktfehler kann man auch aus den mittleren Coordinatenfehlern m_y und m_x ableiten, welche wir schon früher in § 58. auf S. 143 berechnet haben, nämlich:

$$m_y = \pm 1{,}66^{dm} = \pm 0{,}166^{m} \quad \text{und} \quad m_x = \pm 1{,}50^{dm} = \pm 0{,}150^{m}$$

Dieses giebt:

$$M = \sqrt{0{,}166^2 + 0{,}150^2} = 0{,}224^{m} \tag{25}$$

Die Werte (24) und (25) stimmen überein, wie es sein soll.

Anmerkung zu § 119.—121.

Die Definition der Fehler-Ellipse durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist insofern eine bedingte, als dabei die Gültigkeit des *Gauss*schen Fehlergesetzes vorausgesetzt ist. Man kann jedoch die Fehler-Ellipse auch unabhängig hievon schlechthin definieren als den geometrischen Ort für konstante Fehlerquadratsumme, ebenso wie die Fehlerquadratsumme auch in § 12. S. 33 selbständig eingeführt wurde.

Man könnte also in (4a) § 121. S. 347 die selbständige Bedingung stellen, dass $[v'v'] - [vv]$ konstant sei; damit kann man alles entwickeln, was in unserem § vorkommt, auch kann man § 119. so behandeln, während die theoretisch schöne Betrachtung von § 120. verloren ginge oder nur gezwungen angefügt würde.

§ 122. Fehler-Ellipse für zwei Gerade. Äquivalente Beobachtungen.

In den Formeln (18) und (20) § 121. S. 349 für mehrfache Punkt-Einschneidung müssen die früheren Formeln (12), (13) und (17) § 119. S. 344—345, wo es sich um *zwei* Gerade handelte, mit enthalten sein. Wir wollen dieses nachweisen, und zugleich einige weitere Betrachtungen hieran knüpfen.

Ein Strahl von der Länge r und dem Azimut ψ giebt nach (7) § 55. S. 131 eine Differentialgleichung von der Form:

$$d\psi = -\frac{\sin\psi}{r}\,x + \frac{\cos\psi}{r}\,y$$

oder:

$$r\,d\psi = -\sin\psi\,x + \cos\psi\,y$$

Dabei ist $r\,d\psi$ das Mass der Querverschiebung an der betrachteten Stelle.

Wenn man diese Verschiebung $r\,d\psi$ unmittelbar als Beobachtungsfehler betrachtet, und den mittleren Fehler hiefür a priori $= m$ einführt, und wenn man nun *zwei* solcher Geraden mit Azimuten ψ_1, ψ_2 und mit mittleren Querverschiebungen m_1, m_2 in Betracht nimmt, so hat man zwei Fehlergleichungen von der Form:

$$\begin{array}{lll} & \quad\; a \qquad\quad\;\; b & \\ r_1\,d\psi_1 = & -\sin\psi_1\,x + \cos\psi_1\,y + \ldots & \text{mittlerer Fehler} = m_1 \quad (1)^{*)} \\ r_2\,d\psi_2 = & -\sin\psi_2\,x + \cos\psi_2\,y + \ldots & \qquad ,, \qquad\quad ,, \quad\; = m_2 \quad (2) \end{array}$$

Wir rechnen nach § 22. S. 54:

*) Diese Gleichungen (1) und (2) kann man auch nach den Betrachtungen von § 113. S. 330 anschreiben, indem $r\,d\psi$ an Stelle von $-\varepsilon$ in (23) S. 330 gesetzt wird, und die mittleren Fehler m_1 und m_2 nach (26) S. 330 bestimmt werden.

$$\left.\begin{array}{l}\left[\frac{a\,a}{m\,m}\right]=\frac{\sin^2\psi_1}{m_1^2}+\frac{\sin^2\psi_2}{m_2^2}\ ,\quad \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right]=-\frac{\sin\psi_1\cos\psi_1}{m_1^2}-\frac{\sin\psi_2\cos\varphi_2}{m_2^2}\\ \left[\frac{b\,b}{m\,m}\right]=\frac{\cos^2\psi_1}{m_1^2}+\frac{\cos^2\psi_2}{m_2^2}\end{array}\right\}\quad (3)$$

$$D=\left[\frac{aa}{mm}\right]\left[\frac{bb}{mm}\right]-\left[\frac{ab}{mm}\right]\left[\frac{ab}{mm}\right]=\frac{(\sin\psi_1\cos\psi_2-\sin\psi_2\cos\psi_1)^2}{m_1^2\,m_2^2}=\frac{\sin^2(\psi_2-\psi_1)}{m_1^2\,m_2^2}\quad (4)$$

Im übrigen rechnet man nach den Formeln (18) (19) (20) § 121. S. 349 mit Einrechnung der Nenner m_1 , m_2 in den übrigen Coëfficienten (3); damit findet man, nach kurzer Umformung:

$$tang\,2\,\Theta=\frac{m_2^2\sin 2\,\psi_1+m_1^2\sin 2\,\psi_2}{m_2^2\cos 2\psi_1+m_1^2\cos 2\,\psi_2}\quad (5)$$

$$\frac{m_1^2+m_2^2}{\sin^2\varphi}=M^2\qquad \text{wo}\qquad \psi_2-\psi_1=\varphi\quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l}A^2\\B^2\end{array}\right\}=\frac{M^2}{2}\pm\frac{M^2}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2\,m_1\,m_2}{M^2\sin\varphi}\right)^2}\quad (7)$$

Diese Formeln stimmen mit (17) , (12) und (13) § 119., wenn $\psi_1=0$, $\psi_2=\varphi$ und $s^2=\frac{1}{2}$ gesetzt wird.

Man kann auch die umgekehrte Aufgabe stellen: Zu einer gegebenen Fehler-Ellipse mit den Halbaxen A und B sollen zwei konjugierte Richtungen ψ_1 und ψ_2 mit mittleren Fehlern m_1 und m_2 bestimmt werden.

Diese Aufgabe ist zunächst unbestimmt. Man kann *ein* Azimut ψ willkürlich wählen. Wir wollen die Azimute nicht wie vorhin allgemein ψ_1 und ψ_2 von irgend welcher x-Axe an, sondern nun von der grossen Ellipsen-Axe A an zählen, und zur Unterscheidung von ψ_1 und ψ_2 mit ψ' und ψ'' bezeichnen.

ψ' sei willkürlich gewählt, A und B gegeben, dann berechnet man $\varphi=\psi''-\psi'$ sowie m_1 und m_2 aus folgenden leicht herzuleitenden Formeln:

$$A'^2=\frac{A^2\,B^2}{A^2\sin^2\psi'+B^2\cos^2\psi'}\ ,\quad B'^2=(A^2+B^2)-A'^2\quad (8)$$

$$\sin\varphi=\frac{A\,B}{A'\,B'}\qquad \psi''=\psi'+\varphi\quad (9)$$

$$m_1=B'\sin\varphi\qquad m_2=A'\sin\varphi\quad (10)$$

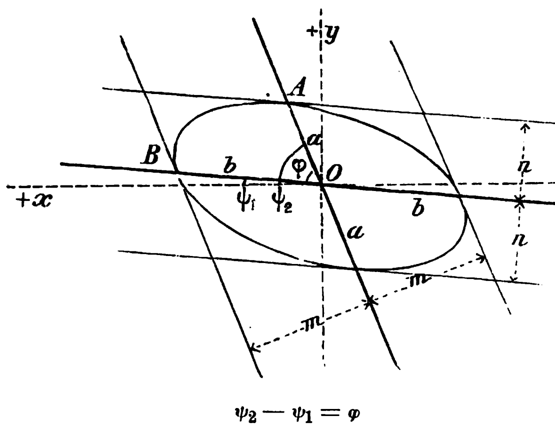
Äquivalente Beobachtungen.

Die vorstehende Entwicklung führt noch zu einer anderen Betrachtung, welche wir an Fig. 36. S. 352 anschliessen.

Wenn zwei Gerade mit mittleren Querverschiebungen m und n (entsprechend m_1 und m_2 im bisherigen) gegeben sind, so kann man deren Fehler-Ellipse nach Lage und Grösse bestimmen, und zwar kann man entweder die Halbaxen A und B und das Azimut Θ von A nach den Formeln (5) (6) (7) berechnen, oder auch die Ellipse geradezu in das gegebene berührende Parallelogramm hineinzeichnen.

Nachdem die Ellipse gezeichnet vorliegt, kann man abermals ein anderes Parallelogramm nach zwei konjugierten Richtungen um die Ellipse herumlegen, d. h. entweder geradezu zeichnen, oder nach den Formeln (8) (9) (10) berechnen. Damit hat man zwei andere Richtungen ψ' und ψ'' mit gewissen anderen mittleren Querverschiebungen m und n, welche selbst wieder als Bestimmungswerte der Ellipse gelten können.

Fig. 36.
Ellipse mit konjugierten Tangenten-Paaren.



$\psi_2 - \psi_1 = \varphi$

Es giebt unendlich viele Geraden-Paare mit gewissen mittleren Querverschiebungen m und n, welche alle *dieselbe* Ellipse liefern, und welche daher auch alle denselben mittleren Punktfehler $M = \sqrt{A^2 + B^2}$ haben.

Alle diese Geraden-Paare heissen, in Hinsicht auf die fragliche Punktbestimmung, einander äquivalent.

Eines dieser Geraden-Paare, dessen Schnittwinkel $\varphi = 90°$ ist, entspricht den Hauptaxen der Ellipse.

Denkt man ferner die Ellipse aus einer Ausgleichung irgendwelcher Art hervorgegangen, z. B. aus einer Triangulierung (welche hunderte und mehr Einzelbeobachtungen enthalten kann, § 124.), so kann man, in Hinsicht auf den fraglichen Punkt, jene ganze Ausgleichung durch irgend eines der vorhin erwähnten konjugierten Geraden-Paare ersetzt denken.

§ 123. Einführung der Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\beta\beta]$.

Teils zu unmittelbarem Gebrauch, teils zur Vorbereitung der Verallgemeinerung der Formeln (§ 124.) wollen wir neue Formeln aufstellen, in welchen überall, statt der Coëfficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ $[b\,b]$ der Normalgleichungen, die Gewichts-Coëfficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\beta\beta]$ vorkommen sollen.

Hiezu haben wir nach (14) bis (18) § 16. S. 42:

$$[a\,a] = \frac{[\beta\beta]}{\varDelta} \qquad [a\,b] = \frac{-[\alpha\beta]}{\varDelta} \qquad [b\,b] = \frac{[\alpha\alpha]}{\varDelta} \, . \tag{1}$$

wo

$$\varDelta = [\alpha\alpha]\,[\beta\beta] - [\alpha\beta]\,[\alpha\beta] \tag{2}$$

und

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] = \frac{1}{\varDelta} \tag{3}$$

In (28) § 109. S. 318, und in (18) § 121. S. 349 hatten wir:

$$tang\,2\,\Theta = \frac{-2\,[a\,b]}{-([a\,a] - [b\,b])} \tag{4}$$

Setzt man hier die Werte von (1) ein, so findet man:

$$tang\,2\,\Theta = \frac{2\,[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha] - [\beta\beta]} \tag{5}$$

Wir nehmen ferner das frühere W nach (19) § 121. S. 349:

$$W^2 = 4\,[a\,b]^2 + ([a\,a] - [b\,b])^2 \tag{6}$$

Setzt man hier die Ausdrücke (1) ein, so findet man:

$$W^2 = \frac{4\,[\alpha\beta]^2 + ([\alpha\alpha] - [\beta\beta])^2}{\varDelta^2} = \frac{Q^2}{\varDelta^2} \tag{7}$$

Q^2 ist hier ein neu eingeführtes Zeichen für den Zähler von W^2, und es ist also nun:

$$Q = W\varDelta \qquad \text{oder} \qquad Q = \frac{W}{D} \tag{8}$$

Damit gehen die Formeln (18), (19) und (20) § 121. S. 349 über in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} tang\, 2\,\Theta &= \frac{2\,[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]-[\beta\beta]} \\ Q = \frac{2\,[\alpha\beta]}{sin\,2\,\Theta} &= \frac{[\alpha\alpha]-[\beta\beta]}{cos\,2\,\Theta} = \sqrt{4\,[\alpha\beta]^2+([\alpha\alpha]-[\beta\beta])^2} \\ A^2 = ([\alpha\alpha]+[\beta\beta]+Q)\frac{(\delta)^2}{2} & \qquad B^2 = ([\alpha\alpha]+[\beta\beta]-Q)\frac{(\delta)^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese Formeln (9) enthalten die vollständige Rechnungsvorschrift zur Bestimmung der Lage und der Dimensionen der Fehler-Ellipse. Die Halbaxen A und B geben die Quadratsumme:

$$A^2 + B^2 = ([\alpha\alpha]+[\beta\beta])\,(\delta)^2 = M^2 \tag{10}$$

Zu einem einfachen Zahlen-Beispiel können wir wieder die pothenotische Winkel-Ausgleichung von Karlsruhe benützen, nämlich nach § 58. S. 143:

$$[a\,a] = +57{,}9 \quad , \quad [a\,b] = -35{,}3 \quad , \quad [b\,b] = +47{,}7 \quad , \quad (\delta) = \pm 8{,}5 \tag{11}$$

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p_x} = \frac{1}{31{,}8} = 0{,}03145 \quad , \quad [\beta\beta] = \frac{1}{p_y} = \frac{1}{26{,}3} = 0{,}03802 \tag{12}$$

Nun braucht man noch $[\alpha\beta]$, nach § 16. (14) und (16) S. 42:

$$[\alpha\beta] = \frac{-[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b]-[a\,b]\,[a\,b]} = \frac{1}{42{,}9} = +0{,}2331 \tag{13}$$

Setzt man dieses in (9), so erhält man:

$$2\,\Theta = 98^\circ\,1' \qquad \Theta = 49^\circ\,0' \qquad Q = 0{,}04708$$

$$A = 2{,}052^{dm} \qquad B = 0{,}899^{dm}$$

Diese Resultate stimmen so genau mit den früheren (22) und (23) § 121. S. 349 überein, als bei unserer Rechnung, welche mit nur etwa drei scharfen Stellen geführt wurde, möglich ist.

Anmerkung.

Wenn $[a\,b]=0$ wird, womit auch $[\alpha\beta]=0$ wird, so wird $2\,\Theta=0^\circ$ oder $=180^\circ$, $\Theta=0^\circ$ oder $=90^\circ$, d. h. dann fallen die Ellipsen-Axen A und B in die Richtungen der Coordinaten-Axen X oder Y.

Wenn $[a\,b]=0$ und $[a\,a]-[b\,b]=0$, ($[\alpha\beta]=0$ und $[\alpha\alpha]-[\beta\beta]=0$), so wird $tang\,2\,\Theta = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt, zugleich wird $W=0$ (und $Q=0$). In diesem Falle ist die Fehler-Ellipse ein Kreis vom Halbmesser:

$$A = B = (\delta)\sqrt{\frac{1}{[a\,a]}} = (\delta)\sqrt{\frac{1}{[b\,b]}}$$

$$\text{oder} \quad = (\delta)\sqrt{[\alpha\alpha]} = (\delta)\sqrt{[\beta\beta]}$$

Dieser Kreis ist zugleich Fusspunkts-Kurve, und der mittlere Fehler ist nach allen Richtungen gleich.

§ 124. Verallgemeinerung der bisherigen Theorie der Fehler-Ellipse.

Man kann eine weitere Verallgemeinerung der Formeln (9) § 123. S. 353 dadurch erzielen, dass man die Bedeutung der $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\beta\beta]$ als Gewichts-Coëfficienten weiter verfolgt

Wir sind in (2) § 121. S. 347 von folgenden Normalgleichungen ausgegangen:

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x+[ab]\,y+[al]&=0\\ [ab]\,x+[bb]\,y+[bl]&=0\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

wo x und y als Coordinaten den Mittelpunkt der Fehler-Ellipse bestimmen. Hiezu gehören nach (14) § 16. S. 42 die Gewichts-Coëfficienten:

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]&=\frac{[bb]}{[aa][bb]-[ab][ab]}=\frac{1}{p_x}\qquad[\alpha\beta]=\frac{-[ab]}{[aa][bb]-[ab][ab]}\\ [\beta\beta]&=\frac{[aa]}{[aa][bb]-[ab][ab]}=\frac{1}{p_y}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Hiernach haben wir in dem Zahlen-Beispiel (11) (12) (13) § 123. S. 353 unmittelbar gerechnet.

Auch wenn x und y nicht die einzigen Unbekannten der Ausgleichung sind, aber die zwei *letzten* Unbekannten in der Elimination von Normalgleichungen für vermittelnde Beobachtungen, so gelten immer noch Formeln von der Form (2), z. B. wenn vorher eine andere Unbekannte z eliminiert worden wäre, und die zwei letzten Gleichungen hiessen:

$$\begin{aligned}[bb.1]\,x+[bc.1]\,y+[bl.1]&=0\\ [bc.1]\,x+[cc.1]\,y+[cl.1]&=0\end{aligned}$$

so würde man haben:

$$[\alpha\alpha]=\frac{[cc.1]}{[bb.1][cc.1]-[bc.1][bc.1]}\qquad[\alpha\beta]=\frac{-[bc.1]}{[bb.1][cc.1]-[bc.1][bc.1]}\qquad(3)$$

(vgl. hiezu (21) § 28. S. 72) $\qquad [\beta\beta]=\ldots$

Wenn x und y nicht die letzten Unbekannten in der Elimination, und überhaupt nicht unmittelbare Unbekannte der Ausgleichung, sondern nur Funktionen der unmittelbaren Unbekannten sind, so treten bei vermittelnden Beobachtungen die Formeln (11) § 30. S. 76 in Kraft.

Wenn p_x und p_y die Gewichte von x und y, ferner p_{x+y} das Gewicht von $x+y$ ist, so gelten sowohl für den obigen einfachen Fall (2) als auch für den Fall von § 30. S. 76 die Gleichungen:

$$\frac{1}{p_x}=[\alpha\alpha]\qquad\frac{1}{p_y}=[\beta\beta]\qquad\frac{1}{p_{x+y}}=[\alpha\alpha]+2[\alpha\beta]+[\beta\beta]\qquad(4)$$

woraus man auch bilden kann:

$$[\alpha\beta]=\frac{\dfrac{1}{p_{x+y}}-\dfrac{1}{p_x}-\dfrac{1}{p_y}}{2}\qquad(5)$$

Indem diese Gleichungen (4) und (5) für alle bisher betrachteten Fälle gemeinsam gelten, ist die Anwendbarkeit der $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\beta\beta]$ zur Fehler-Ellipsen-Berechnung in allen diesen Fällen gezeigt.

In gleicher Weise gehen wir auch zu dem Fall bedingter Beobachtungen § 46. S. 111—112 über.

Hier sind wir genötigt, die Formeln nochmals herzusetzen, weil in der Entwicklung S. 111 ein (leicht zu berichtigendes) Versehen vorgekommen ist [vgl. unten (9) (10) (11)].

Die ersten Teile von $[\alpha\alpha]$ und $[\beta\beta]$ in (12) S. 112 sind selbst wieder Summen von der früheren Form (11) § 30. S. 76, und damit werden die Schluss-Formeln von § 46. S. 112 richtig so:

$$[\alpha\alpha] = \frac{f_1 f_1}{p_1} + \frac{f_2 f_2}{p_2} + \frac{f_3 f_3}{p_3} + \cdots - \left\{\frac{A_0 A_0}{[a a]} + \frac{A_1 A_1}{[b b . 1]} + \frac{A_2 A_2}{[c c . 2]} + \cdots\right\} \quad (6)$$

$$[\beta\beta] = \frac{f_1' f_1'}{p_1} + \frac{f_2' f_2'}{p_2} + \frac{f_3' f_3'}{p_3} + \cdots - \left\{\frac{B_0 B_0}{[a a]} + \frac{B_1 B_1}{[b b . 1]} + \frac{B_2 B_2}{[c c . 2]} + \cdots\right\} \quad (7)$$

$$[\alpha\beta] = \frac{f_1 f_1'}{p_1} + \frac{f_2 f_2'}{p_2} + \frac{f_3 f_3'}{p_3} + \cdots - \left\{\frac{A_0 B_0}{[a a]} + \frac{A_1 B_1}{[b b . 1]} + \frac{A_2 B_2}{[c c . 2]} + \cdots\right\} \quad (8)$$

Auch für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungs-Gleichungen gelten ganz analoge Formeln, es kommt nur immer darauf an, die Gewichts-Reciproken $[\alpha\alpha]$ für x und $[\beta\beta]$ für y richtig zu berechnen (§ 52. S. 123—124) und dann nach dem Gesetz (5) auch auf $[\alpha\beta]$ überzugehen.

In (6) und (7) ist:

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p_x} \qquad [\beta\beta] = \frac{1}{p_y} \quad (9)$$

und wenn man wieder mit p_{x+y} das Gewicht von $x+y$ bezeichnet, so ist:

$$\frac{1}{p_{x+y}} = \frac{(f_1+f_1')^2}{p_1} + \frac{(f_2+f_2')^2}{p_2} + \frac{(f_3+f_3')^2}{p_3} - \left\{\frac{(A_0+B_0)^2}{[a a]} + \frac{(A_1+B_1)^2}{[b b . 1]} + \frac{(A_2+B_2)^2}{[c c . 2]} + \cdots\right\} \quad (10)$$

$$\frac{1}{p_{x+y}} = [\alpha\alpha] + 2(\alpha\beta) + (\beta\beta) \quad (11)$$

Im Zusammenhang haben wir folgendes:

Zur Bestimmung einer Punkt-Genauigkeit ohne Fehler-Ellipse würde man die Coordinaten-Gewichte p_x und p_y berechnen. Der Übergang von diesen Gewichten bzw. mittleren Fehlern zu der ohne Zweifel viel anschaulicheren und erschöpfenden Fehler-Ellipse verursacht dann verhältnismässig nur noch wenig mehr Rechen-Arbeit. Man hat nur noch $[\alpha\beta]$ nach (2) (3) oder (8) hinzuzuberechnen, oder, wenn man (5) oder (10) betrachtet, so kann man es auch nützlich finden, noch das Funktions-Gewicht für x und y zu berechnen, und zwar aus dem Grunde, weil man damit eine ganz angenehme Rechen-Probe bei der Ausrechnung von p_x und p_y in jener Linie hat.

Mögen nun die $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ $[\beta\beta]$ berechnet sein, auf welchem Wege sie wollen, jedenfalls hat man daraus, mit Zuziehung des mittleren Gewichts-Einheitsfehlers (δ) die grosse und die kleine Ellipsen-Halbaxe A und B, und das Azimut Θ der grossen Axe nach den Formeln (9) § 123. S. 353, welche wir hier zum Abschluss der Theorie nochmals hersetzen:

$$tang\, 2\,\Theta = \frac{2\,[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha] - [\beta\beta]} \quad (12)$$

mit Unterscheidung der Quadranten von $2\,\Theta$ nach den Vorzeichen im Zähler und im Nenner.

$$Q = \frac{2\,[\alpha\beta]}{\sin 2\,\Theta} = \frac{[\alpha\alpha] - [\beta\beta]}{\cos 2\,\Theta} = \sqrt{([\alpha\alpha] - [\beta\beta])^2 + 4\,[\alpha\beta]^2} \quad (13)$$

Q ist stets positiv.

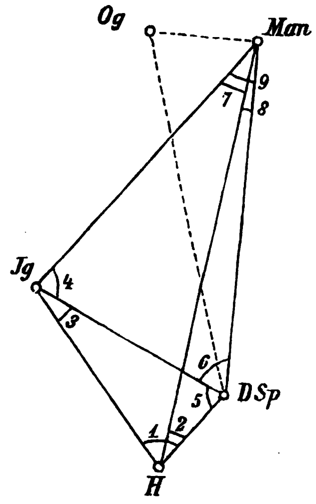
$$A^2 = ([\alpha\alpha] + [\beta\beta] + Q)\,\frac{(\delta)^2}{2} \qquad B^2 = ([\alpha\alpha] + (\beta\beta) - Q)\,\frac{(\delta)^2}{2} \quad (14)$$

§ 125. Fehler-Ellipse für den Punkt Mannheim in *Schwerds* Basis-Netz.

Zu einem Zahlen-Beispiel für die Fehler-Ellipse eines Triangulierungs-Punktes nehmen wir die Ausgleichung von *Schwerds* Basis-Netz, welche wir in § 72. S. 207 und in § 73. S. 212 nach zwei verschiedenen Methoden behandelt haben. Dieses giebt uns auch zwei Fehler-Ellipsen-Berechnungen, nämlich: I. für vermittelnde Beobachtungen, und II. für bedingte Beobachtungen.

I. Fehler-Ellipse für vermittelnde Beobachtungen nach § 73. (S. 212—216.)

Fig. 37.
Schwerds Basisnetz.
(1 : 400 000.)



In dem *Schwerd*schen Netze Fig. 11. S. 213, welches wir hier in Fig. 37. wieder hersetzen, betrachten wir die Basis $H\text{-}DSp = 4962{,}8^m$ als fest, in Hinsicht auf Entfernung und Richtung. Wenn man daher die Genauigkeit des Punktes M (Mannheim) relativ gegen diese Basis HD bestimmen will, so braucht man bei so einfachem Netz nur den mittleren Fehler dHM der ausgeglichenen Seite HM und den mittleren Fehler d_2 des ausgeglichenen Winkels 2. anzugeben, oder wenn man statt in Polar-Coordinaten in rechtwinkligen Coordinaten $x'\,y'$ rechnen will, so hat man:

$$dx' = -dHM \quad , \quad dy' = +HM\,d_2 \qquad (1)$$

wo $+x'$ in der Richtung von M nach H und $+y'$ rechtwinklig hiezu mit dem Azimut 90° angenommen ist, wie die spätere Fig. 38. S. 358 zeigt.

Die beiden Funktionen (1) müssen auf die gemessenen Winkel bezogen werden, also:

$$HM = \frac{HD}{sin\,(8)}\,sin\,(2+8) \qquad (2)$$

Wenn man dieses logarithmiert und differentiiert, wobei HD konstant ist, so erhält man:

$$\frac{dHM}{HM} = -\,cotg\,(8)\,\frac{d_8}{\varrho} + cotg\,(2+8)\,\frac{d_2+d_8}{\varrho}$$

Die Ausrechnung giebt, mit $log\ HM = 4{,}35977$, von (14) S. 211:

$$dHM = -\,0{,}7964\,d_8 + 0{,}1343\,(d_2+d_8) = +\,0{,}1343\,d_2 - 0{,}6621\,d_8 \qquad (3)$$

Dieses gilt für Meter als Mass-Einheit. Es ist uns aber bequemer, in Decimetern zu rechnen, d. h. zu nehmen:

$$dHM = +\,1{,}343\,d_2 - 6{,}621\,d_8 \text{ (in Decimetern)} \qquad (4)$$

d. h. dHM wird in Decimetern erhalten, wenn d_2 und d_8 in Sekunden gesetzt werden. Wenn wir dieselben Masse auch in der Gleichung für dy' in (1) einführen, und nun beides zusammen nehmen, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} dx' &= -\,1{,}343\,d_2 + 6{,}621\,d_8 \\ dy' &= +\,1{,}110\,d_2 \end{aligned}\right\}\ \text{für Decimeter} \qquad (5)$$

Um die Gewichte für x' und y' zu erlangen, folgen wir der Anweisung von

§ 29. S. 73—75, wie wir bereits auf S. 215 mit der Seite JM als Funktion F gethan haben.

Dass hiebei q_2 die letzte Unbekannte ist, ist wegen der Funktion dy' in (5) sehr angenehm, jedoch nicht wesentlich.

Folgendes ist die Gewichts-Berechnung für die zwei Funktionen (5), im Anschluss an (16), (17), (18), (19) S. 215:

q_8	q_3	q_1	q_2	$-fx'$	$-fy'$	
+ 14,870	— 3,980	+ 0,960	— 4,160	— 6,621	0,000	(6_1)
	+ 3,390	+ 1,230	+ 0,370	0,000	0,000	
		+ 2,540	— 1,370	0,000	0,000	
			+ 2,570	+ 1,343	— 1,110	
	+ 2,325	+ 1,487	— 0,743	— 1,772	0,000	(6_2)
		+ 2,478	— 1,101	+ 0,427	0,000	
			+ 1,406	— 0,509	0,000	
		+ 1,527	— 0,626	+ 1,561	0,000	(6_3)
			+ 1,169	— 1,075	— 1,110	
			+ 0,912	— 0,436	— 1,110	(6_4)

Wir haben hier um eine Stelle schärfer gerechnet als auf S. 215, so dass nun z. B. 0,912 statt früher 0,92 erscheint u. s. w.

Es folgt die Anwendung der Formeln (11) § 31. unten auf S. 76:

$$[\alpha\alpha] = \frac{(-6{,}621)^2}{14{,}870} + \frac{(-1{,}772)^2}{2{,}325} + \frac{+(1{,}561)^2}{1{,}527} + \frac{(-0{,}436)^2}{0{,}912}$$

$$[\beta\beta] = \quad .\,. \qquad .\,. \qquad .\,. \quad + \frac{(-1{,}110)^2}{0{,}912}$$

$$[\alpha\beta] = \quad .\,. \qquad .\,. \qquad .\,. \quad \frac{(-0{,}436)(-1{,}110)}{0{,}912}$$

Die Ausrechnung giebt:

$$\left.\begin{array}{l} [\alpha\alpha] = 2{,}947 + 1{,}351 + 1{,}588 + 0{,}208 = +6{,}094 \\ [\beta\beta] = \quad .\,. \qquad .\,. \qquad .\,. \quad +1{,}351 = +1{,}351 \\ [\alpha\beta] = \quad .\,. \qquad .\,. \qquad .\,. \quad +0{,}531 = +0{,}531 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Hiezu hat man auch den mittleren Gewichts-Einheitsfehler nach (9) § 73. S. 214, nämlich:

$$(\delta) = \pm\, 0{,}477'' \qquad (8)$$

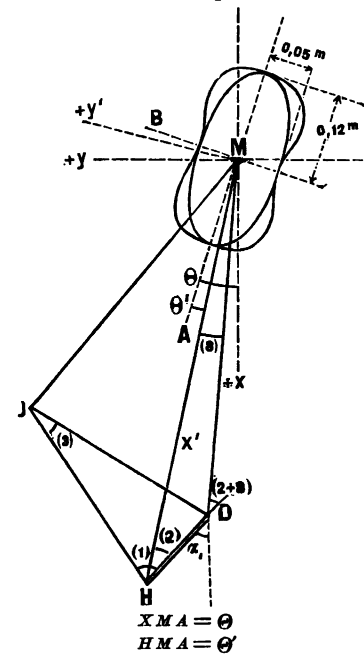
Wendet man nun auf diese (7) und (8) die Formeln (12), (13), (14) § 124. S. 355 an, so findet man, indem man das Azimut der grossen Ellipsen-Axe A mit Θ' bezeichnet,:

$$\left.\begin{array}{lll} 2\,\Theta' = 12^\circ\, 37' & Q = 4{,}860 & A = 1{,}183^{dm} \\ \Theta' = 6^\circ\, 19' & & B = 0{,}542^{dm} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Hiernach ist die Fehler-Ellipse nebst Fusspunkts-Kurve in Fig. 38. S. 358 gezeichnet. Das Azimut Θ' der grossen Ellipsen-Axe A ist von MH als $+x'$-Axe, im positiven Sinn, gegen $+y'$ hin gezählt. Es ist noch ein zweites Azimut Θ eingeschrieben, welches sich auf unsere nun folgende zweite Berechnung bezieht.

II. Fehler-Ellipse für bedingte Beobachtungen nach § 72. (S. 207—212.)

Fig. 38.
Fehler-Ellipse und Fusspunkts-Kurve für den Punkt Mannheim.
Massstab des Netzes 1 : 400 000.
Massstab der Ellipse 1 : 10.



Um ein nach dem Meridian von *M* (Mannheim) orientiertes Coordinaten-System *X Y* zu haben, geben wir der Basis *D H* in Fig. 38. das Azimut:

$$(DH) = \alpha_1 = 43^\circ 14' 10'' \text{ v. Süd über West} \quad (10)$$

dann wird das Azimut der Seite *D M*:

$$(DM) = \alpha_1 + 180^\circ - (2+8) \text{ v. Süd über West} \quad (11)$$

Die Seite *D M* selbst ist ausgedrückt in der Basis *D H* und in den zwei Winkeln (2) und (8):

$$DM = \frac{DH}{\sin(8)} \sin(2) \quad (12)$$

folglich sind nun die Coordinaten von *M*, mit $+X$ nach Süden, $+Y$ nach Westen (badisches System), relativ gegen *D*:

$$X = DM \cos(DM) =$$
$$-\frac{DH}{\sin(8)} \sin(2) \cos(\alpha_1 - (2+8)) \quad (13)$$
$$Y = DM \sin(DM) =$$
$$-\frac{DH}{\sin(8)} \sin(2) \sin(\alpha_1 - (2+8)) \quad (14)$$

Zur Genauigkeits-Bestimmung hat man diese Werte nach (2) und (8) zu differentiieren. Wenn man zuerst logarithmiert und mit (X) den absoluten Wert von X bezeichnet, so hat man:

$$\log(X) = \log HD - \log \sin(8) + \log \sin(2) + \log \cos(\alpha_1 - (2+8))$$
$$\frac{d(X)}{(X)} = -\operatorname{cotg}(8)\, d_8 + \operatorname{cotg}(2)\, d_2 - \operatorname{tang}(\alpha_1 - (2+8))\,(-d_2 - d_8) \quad (15)$$

Um dieses auszurechnen, haben wir:

$$\log DH = 3.69582 \text{ *)}$$
$$X = -18816^m \qquad Y = -1208^m$$
$$(X) = 18816 \qquad (Y) = 1208$$
$$\log(X) = 4.27453 \qquad \log(Y) = 3.08202$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 43^\circ 14' 10'' \quad (2) = 31^\circ 37' 40'' \quad (8) = 7^\circ 56' 10'' \\ \alpha_1 - (2+8) = 3^\circ 40' 20''\end{array}\right\} \quad (15a)$$

Damit giebt die Ausrechnung nach (15):

$$d(X) = -0{,}65437\, d_8 + 0{,}14812\, d_2 + 0{,}00585\,(d_2 + d_8)$$
$$d(X) = +0{,}15397\, d_2 - 0{,}64852\, d_8$$

---

*) $\log DH = 3.69582$ entspricht den badischen Coordinaten (vgl. S. 203) in jener Gegend, während wir auf S. 211 oben bei (14) $\log DH = 3.69573$ nach *Schwerds* Angabe gesetzt haben. Dieser scheinbare Widerspruch hat, wie schon auf S. 211 erwähnt ist, darin seinen Grund, dass *Schwerd* mit einer gänzlich *vorläufigen* Masseinheit rechnet. Für den Zweck der Fehler-Ellipsen-Berechnung ist das offenbar gleichgültig.

oder, indem (X) den absoluten Wert, X den Abscissen-Wert mit Vorzeichen bedeutet:

$$d\,X = -\,0{,}15397\; d_2 + 0{,}64852\; d_8 \text{ in Metern}$$

$$\text{oder } d\,X = -\,1{,}540\; d_2 + 6{,}485\; d_8 \text{ in Decimetern} \tag{16}$$

Ebenso wird auch $d\,Y$ berechnet:

$$d\,Y = +\,0{,}817\; d_2 + 1{,}332\; d_8 \text{ in Decimetern} \tag{17}$$

Dieses sind zwei Funktionen von der Form (9) § 43. S. 105, und um deren Gewichte zu bestimmen, hat man die Coëfficienten (10) und (11) S. 105 auszurechnen.

Zu diesem Zweck nehmen wir wieder die Coëfficienten-Tabelle (10) § 72. S. 210 zur Hand, und schreiben die Coëfficienten f nach (16) und (17) dazu:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	70	7	101	47	85	57	10	28	30
a	+ 0,320	— 3,419	— 4,459	+ 0,503	. .	. .	. .	+ 15,105	— 2,860
b		+ 1			+ 1	+ 1		+ 1	
c	+ 1		+ 1		+ 1				
d				+ 1		+ 1			+ 1
e							+ 1	+ 1	— 1
f_x	. .	— 1,540	. .	. .	. .	. .	. .	+ 6,485	. .
f_y	. .	+ 0,817	. .	. .	. .	. .	. .	+ 1,332	. .

Da viele Coëfficienten ausgefallen sind, so ist die Berechnung der $\left[\frac{af}{p}\right]$ u. s. w. verhältnismässig einfach.

Für f_x hat man z. B.:

$$\left[\frac{af}{p}\right]_x = \frac{(-3{,}419)\,(-1{,}540)}{70} + \frac{(+15{,}105)\,(+6{,}485)}{28} = +\,0{,}75218 + 3{,}49841 = +\,4{,}25059$$

Ähnlich wird auch:

$$\left[\frac{bf}{p}\right]_x = +\,0{,}01160 \quad , \quad \left[\frac{cf}{p}\right]_x = +\,0{,}23160 \tag{18}$$

Desgleichen auch für f_y:

$$\left[\frac{af}{p}\right]_y = +\,0{,}31951 \quad , \quad \left[\frac{bf}{p}\right]_y = +\,0{,}16428 \quad , \quad \left[\frac{ef}{p}\right]_y = +\,0{,}04757 \tag{19}$$

Bei der Berechnung der quadratischen Schluss-Glieder $\left[\frac{ff}{p}\right]$ fügen wir auch sogleich die Produkte bei, welche man zum ersten Teil von $[\alpha\beta]$ nach den Formeln (6), (7), (8) § 124. S. 355 braucht:

$$\left[\frac{ff}{p}\right]_x = \frac{(-\,1{,}540)^2}{7} + \frac{(+\,6{,}485)^2}{28} = +0{,}33880 + 1{,}50197 = +1{,}84077 \tag{20}$$

$$\left[\frac{ff}{p}\right]_y = \frac{(+\,0{,}817)^2}{7} + \frac{(+\,1{,}332)^2}{28} = +0{,}09535 + 0{,}06336 = +0{,}15871 \tag{21}$$

$$\left[\frac{ff}{p}\right]_{xy} = \frac{(-1{,}540)(+0{,}817)}{7} + \frac{(+6{,}485)(+1{,}332)}{28} = -0{,}17972 + 0{,}30849 = +0{,}12877 \tag{22}$$

Die Coëfficienten (18) und (19) setzt man an Stelle der Absolutglieder der Normal-Gleichungen (11) S. 210, und hat dann:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	f_x	f_y	
+10,2941	+ 0,0511	— 0,0396	— 0,0846	+ 0,6348	+ 4,2506	+ 0,3195	[1]
	+ 0,2079	+ 0,0118	+ 0,0175	+ 0,0357	+ 0,0116	+ 0,1643	
		+ 0,0360	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
			+ 0,0721	— 0,0333	0,0000	0,0000	
				+ 0,1690	+ 0,2316	+ 0,0476	

Nun wird in gewöhnlicher Weise eliminiert, wobei allmählich folgende Coëfficienten-Gruppen erhalten werden:

	+ 0,2076	+ 0,0120	+ 0,0179	+ 0,0326	— 0,00950	+ 0,16271	[2]
		+ 0,0358	— 0,0003	+ 0,0024	+ 0,01635	+ 0,00123	
			+ 0,0714	— 0,0281	+ 0,03493	+ 0,00263	
				+ 0,1299	— 0,03052	+ 0,02790	
		+ 0,0351	— 0,0013	+ 0,0005	+ 0,01690	— 0,00818	[3]
			+ 0,0699	— 0,0309	+ 0,03575	— 0,01140	
				+ 0,1248	— 0,02903	+ 0,00235	
			+ 0,0699	— 0,0309	+ 0,03638	— 0,01170	[4]
				+ 0,1248	— 0,02927	+ 0,00247	
				+ 0,1111	— 0,01319	— 0,00270	[5]

Nach dem Anblick dieser Eliminations-Coëfficienten in den Linien [1] , [2] , [3] , [4] , [5] berechnet man die Abzüge $\left\{\cdots\right\}$ für die Formeln (6) , (7) (8) § 124. S. 355, nämlich:

$$\left\{\cdots\right\}_x = \frac{(+4{,}2506)^2}{10{,}2941} + \frac{(-0{,}00950)^2}{0{,}2076} + \frac{(+0{,}01690)^2}{0{,}0351} + \frac{(+0{,}03638)^2}{0{,}0699} + \frac{(-0{,}01319)^2}{0{,}1111} = 1{,}78419 \qquad (23)$$

$$\left\{\cdots\right\}_y = \frac{(+0{,}3195)^2}{10{,}2941} + \frac{(+0{,}16271)^2}{0{,}2076} + \frac{(-0{,}00818)^2}{0{,}0351} + \frac{(-0{,}01170)^2}{0{,}0699} + \frac{(-0{,}00270)^2}{0{,}1111} = 0{,}14138 \qquad (24)$$

$$\left\{\cdots\right\}_{xy} = \frac{(+4{,}2506)\,(+0{,}3195)}{10{,}2941} + \frac{(-0{,}00950)\,(+0{,}16271)}{0{,}2076} + \ldots = 0{,}11477 \qquad (25)$$

Nun kann man aus (20) , (21) , (22) und (23) , (24) , (25) die Coëfficienten $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$ und $[\alpha\beta]$ zusammensetzen:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= +1{,}84077 - 1{,}78419 = +0{,}05658 \\ [\beta\beta] &= +0{,}15871 - 0{,}14138 = +0{,}01733 \\ [\alpha\beta] &= +0{,}12877 - 0{,}11477 = +0{,}01400 \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Hiezu hat man noch den mittleren Gewichts-Einheitsfehler nach (16) § 72. S. 211:

$$(\delta) = \pm 4{,}77'' \qquad (27)$$

Auf (26) und (27) werden die Formeln (12) (13) (14) § 124. angewendet, und geben:

$$\begin{aligned} 2\,\Theta &= 35^\circ\,30' & Q &= 0{,}04821 & A &= 1{,}179^{dm} \\ \Theta &= 17^\circ\,45' & & & B &= 0{,}541^{dm} \end{aligned} \qquad (28)$$

Dieses stimmt mit dem früheren (9) so genau, als unter solchen Umständen zu erwarten ist.

Die Verschiedenheit von Q und (δ) im Vergleich mit (8) und (9) beruht auf verschiedener Gewichts-Einheit, was in A und B sich wieder aufhebt.

Die zwei Azimute $\Theta' = 6^\circ\, 19'$ und $\Theta = 17^\circ\, 45'$ differieren um $11^\circ\, 26$, was dem Winkel XMH in Fig. 38. S. 358 hinreichend entspricht, denn es ist nach (15a) der Winkel $XMD = 3^\circ\, 40'$ und der Winkel (8) $= 7^\circ\, 56' = DMH$, also $XMH = 11^\circ\, 36'$ was mit $11^\circ\, 26'$ für diesen Zweck genügend stimmt.

In der Hauptsache haben wir nun nach Fig. 38.:

$$\Theta = 17^\circ\, 45' \qquad A = 0{,}118^m \qquad B = 0{,}054^m \tag{29}$$

A und B sind abgerundet $= 0{,}12^m$ und $= 0{,}05^m$ in Fig. 38. eingeschrieben.

Auch die Fusspunkts-Kurve wurde in Fig. 38. konstruiert; diese Kurve zeigt den mittleren Fehler, oder die mittlere zu fürchtende Verschiebung des Punktes Mannheim nach jeder beliebigen Richtung.

Wollen wir z. B. wissen, welche Verschiebung der Punkt M nach der Richtung MJ erwarten lässt, so können wir unmittelbar das betreffende Stück von M bis zur Fusspunkts-Kurve auf MJ abmessen, und finden (soweit der etwas ungenaue Holzschnitt Fig. 38. abzumessen gestattet):

$$R = \pm\, 0{,}11^m \tag{30}$$

Dieses soll der Formel (33) § 109. S. 319 entsprechen, nämlich:

$$R^2 = A^2 \cos^2 \Theta_J + B^2 \sin^2 \Theta_J \tag{31}$$

wo nun Θ_J das Azimut der Richtung MJ gegen die grosse Axe A ist. Dieses Azimut setzt sich aus den früher (S. 208 und S. 357) angegebenen Winkeln zusammen: $AMJ = 28^\circ\, 26' - 6^\circ\, 19' = 22^\circ\, 7'$, rund $= \Theta_J = 22^\circ$, was nebst A und B von (29) in (31) gesetzt, wieder $R = 0{,}11^m$ giebt, wie schon bei (30) angegeben ist.

Dieser Wert R bezieht sich auf die Verschiebung des Punktes Mannheim, M, in der Richtung MJ, jedoch bezogen auf die Punkte H und D als feste Basispunkte. $R = \pm\, 0{,}11^m$ ist also sachlich nicht gleichbedeutend mit dem früher in (23) S. 215 berechneten mittleren Fehler der Dreiecksseite MJ, jedoch numerisch zufällig damit nahe übereinstimmend.

Anhang.

Seite

I. Quadrat-Zahlen.

a	a²	d	a	a²	d	a	a²	d	a	a²	d
0,00	0,0000	1	0,50	0,2500	101	1,00	1,0000	201	1,50	2,2500	301
0,01	0,0001	3	0,51	0,2601	103	1,01	1,0201	203	1,51	2,2801	303
0,02	0,0004	5	0,52	0,2704	105	1,02	1,0404	205	1,52	2,3104	305
0,03	0,0009	7	0,53	0,2809	107	1,03	1,0609	207	1,53	2,3409	307
0,04	0,0016	9	0,54	0,2916	109	1,04	1,0816	209	1,54	2,3716	309
0,05	0,0025	11	0,55	0,3025	111	1,05	1,1025	211	1,55	2,4025	311
0,06	0,0036	13	0,56	0,3136	113	1,06	1,1236	213	1,56	2,4336	313
0,07	0,0049	15	0,57	0,3249	115	1,07	1,1449	215	1,57	2,4649	315
0,08	0,0064	17	0,58	0,3364	117	1,08	1,1664	217	1,58	2,4964	317
0,09	0,0081	19	0,59	0,3481	119	1,09	1,1881	219	1,59	2,5281	319
0,10	0,0100	21	0,60	0,3600	121	1,10	1,2100	221	1,60	2,5600	321
0,11	0,0121	23	0,61	0,3721	123	1,11	1,2321	223	1,61	2,5921	323
0,12	0,0144	25	0,62	0,3844	125	1,12	1,2544	225	1,62	2,6244	325
0,13	0,0169	27	0,63	0,3969	127	1,13	1,2769	227	1,63	2,6569	327
0,14	0,0196	29	0,64	0,4096	129	1,14	1,2996	229	1,64	2,6896	329
0,15	0,0225	31	0,65	0,4225	131	1,15	1,3225	231	1,65	2,7225	331
0,16	0,0256	33	0,66	0,4356	133	1,16	1,3456	233	1,66	2,7556	333
0,17	0,0289	35	0,67	0,4489	135	1,17	1,3689	235	1,67	2,7889	335
0,18	0,0324	37	0,68	0,4624	137	1,18	1,3924	237	1,68	2,8224	337
0,19	0,0361	39	0,69	0,4761	139	1,19	1,4161	239	1,69	2,8561	339
0,20	0,0400	41	0,70	0,4900	141	1,20	1,4400	241	1,70	2,8900	341
0,21	0,0441	43	0,71	0,5041	143	1,21	1,4641	243	1,71	2,9241	343
0,22	0,0484	45	0,72	0,5184	145	1,22	1,4884	245	1,72	2,9584	345
0,23	0,0529	47	0,73	0,5329	147	1,23	1,5129	247	1,73	2,9929	347
0,24	0,0576	49	0,74	0,5476	149	1,24	1,5376	249	1,74	3,0276	349
0,25	0,0625	51	0,75	0,5625	151	1,25	1,5625	251	1,75	3,0625	351
0,26	0,0676	53	0,76	0,5776	153	1,26	1,5876	253	1,76	3,0976	353
0,27	0,0729	55	0,77	0,5929	155	1,27	1,6129	255	1,77	3,1329	355
0,28	0,0784	57	0,78	0,6084	157	1,28	1,6384	257	1,78	3,1684	357
0,29	0,0841	59	0,79	0,6241	159	1,29	1,6641	259	1,79	3,2041	359
0,30	0,0900	61	0,80	0,6400	161	1,30	1,6900	261	1,80	3,2400	361
0,31	0,0961	63	0,81	0,6561	163	1,31	1,7161	263	1,81	3,2761	363
0,32	0,1024	65	0,82	0,6724	165	1,32	1,7424	265	1,82	3,3124	365
0,33	0,1089	67	0,83	0,6889	167	1,33	1,7689	267	1,83	3,3489	367
0,34	0,1156	69	0,84	0,7056	169	1,34	1,7956	269	1,84	3,3856	369
0,35	0,1225	71	0,85	0,7225	171	1,35	1,8225	271	1,85	3,4225	371
0,36	0,1296	73	0,86	0,7396	173	1,36	1,8496	273	1,86	3,4596	373
0,37	0,1369	75	0,87	0,7569	175	1,37	1,8769	275	1,87	3,4969	375
0,38	0,1444	77	0,88	0,7744	177	1,38	1,9044	277	1,88	3,5344	377
0,39	0,1521	79	0,89	0,7921	179	1,39	1,9321	279	1,89	3,5721	379
0,40	0,1600	81	0,90	0,8100	181	1,40	1,9600	281	1,90	3,6100	381
0,41	0,1681	83	0,91	0,8281	183	1,41	1,9881	283	1,91	3,6481	383
0,42	0,1764	85	0,92	0,8464	185	1,42	2,0164	285	1,92	3,6864	385
0,43	0,1849	87	0,93	0,8649	187	1,43	2,0449	287	1,93	3,7249	387
0,44	0,1936	89	0,94	0,8836	189	1,44	2,0736	289	1,94	3,7636	389
0,45	0,2025	91	0,95	0,9025	191	1,45	2,1025	291	1,95	3,8025	391
0,46	0,2116	93	0,96	0,9216	193	1,46	2,1316	293	1,96	3,8416	393
0,47	0,2209	95	0,97	0,9409	195	1,47	2,1609	295	1,97	3,8809	395
0,48	0,2304	97	0,98	0,9604	197	1,48	2,1904	297	1,98	3,9204	397
0,49	0,2401	99	0,99	0,9801	199	1,49	2,2201	299	1,99	3,9601	399
0,50	0,2500		1,00	1,0000		1,50	2,2500		2,00	4,0000	

Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
2,00	4,0000	401	2,50	6,2500	501	3,00	9,0000	601	3,50	12,2500	701
2,01	4,0401	403	2,51	6,3001	503	3,01	9,0601	603	3,51	12,3201	703
2,02	4,0804	405	2,52	6,3504	505	3,02	9,1204	605	3,52	12,3904	705
2,03	4,1209	407	2,53	6,4009	507	3,03	9,1809	607	3,53	12,4609	707
2,04	4,1616	409	2,54	6,4516	509	3,04	9,2416	609	3,54	12,5316	709
2,05	4,2025	411	2,55	6,5025	511	3,05	9,3025	611	3,55	12,6025	711
2,06	4,2436	413	2,56	6,5536	513	3,06	9,3636	613	3,56	12,6736	713
2,07	4,2849	415	2,57	6,6049	515	3,07	9,4249	615	3,57	12,7449	715
2,08	4,3264	417	2,58	6,6564	517	3,08	9,4864	617	3,58	12,8164	717
2,09	4,3681	419	2,59	6,7081	519	3,09	9,5481	619	3,59	12,8881	719
2,10	4,4100	421	2,60	6,7600	521	3,10	9,6100	621	3,60	12,9600	721
2,11	4,4521	423	2,61	6,8121	523	3,11	9,6721	623	3,61	13,0321	723
2,12	4,4944	425	2,62	6,8644	525	3,12	9,7344	625	3,62	13,1044	725
2,13	4,5369	427	2,63	6,9169	527	3,13	9,7969	627	3,63	13,1769	727
2,14	4,5796	429	2,64	6,9696	529	3,14	9,8596	629	3,64	13,2496	729
2,15	4,6225	431	2,65	7,0225	531	3,15	9,9225	631	3,65	13,3225	731
2,16	4,6656	433	2,66	7,0756	533	3,16	9,9856	633	3,66	13,3956	733
2,17	4,7089	435	2,67	7,1289	535	3,17	10,0489	635	3,67	13,4689	735
2,18	4,7524	437	2,68	7,1824	537	3,18	10,1124	637	3,68	13,5424	737
2,19	4,7961	439	2,69	7,2361	539	3,19	10,1761	639	3,69	13,6161	739
2,20	4,8400	441	2,70	7,2900	541	3,20	10,2400	641	3,70	13,6900	741
2,21	4,8841	443	2,71	7,3441	543	3,21	10,3041	643	3,71	13,7641	743
2,22	4,9284	445	2,72	7,3984	545	3,22	10,3684	645	3,72	13,8384	745
2,23	4,9729	447	2,73	7,4529	547	3,23	10,4329	647	3,73	13,9129	747
2,24	5,0176	449	2,74	7,5076	549	3,24	10,4976	649	3,74	13,9876	749
2,25	5,0625	451	2,75	7,5625	551	3,25	10,5625	651	3,75	14,0625	751
2,26	5,1076	453	2,76	7,6176	553	3,26	10,6276	653	3,76	14,1376	753
2,27	5,1529	455	2,77	7,6729	555	3,27	10,6929	655	3,77	14,2129	755
2,28	5,1984	457	2,78	7,7284	557	3,28	10,7584	657	3,78	14,2884	757
2,29	5,2441	459	2,79	7,7841	559	3,29	10,8241	659	3,79	14,3641	759
2,30	5,2900	461	2,80	7,8400	561	3,30	10,8900	661	3,80	14,4400	761
2,31	5,3361	463	2,81	7,8961	563	3,31	10,9561	663	3,81	14,5161	763
2,32	5,3824	465	2,82	7,9524	565	3,32	11,0224	665	3,82	14,5924	765
2,33	5,4289	467	2,83	8,0089	567	3,33	11,0889	667	3,83	14,6689	767
2,34	5,4756	469	2,84	8,0656	569	3,34	11,1556	669	3,84	14,7456	769
2,35	5,5225	471	2,85	8,1225	571	3,35	11,2225	671	3,85	14,8225	771
2,36	5,5696	473	2,86	8,1796	573	3,36	11,2896	673	3,86	14,8996	773
2,37	5,6169	475	2,87	8,2369	575	3,37	11,3569	675	3,87	14,9769	775
2,38	5,6644	477	2,88	8,2944	577	3,38	11,4244	677	3,88	15,0544	777
2,39	5,7121	479	2,89	8,3521	579	3,39	11,4921	679	3,89	15,1321	779
2,40	5,7600	481	2,90	8,4100	581	3,40	11,5600	681	3,90	15,2100	781
2,41	5,8081	483	2,91	8,4681	583	3,41	11,6281	683	3,91	15,2881	783
2,42	5,8564	485	2,92	8,5264	585	3,42	11,6964	685	3,92	15,3664	785
2 43	5,9049	487	2,93	8,5849	587	3,43	11,7649	687	3,93	15,4449	787
2,44	5,9536	489	2,94	8,6436	589	3,44	11,8336	689	3,94	15,5236	789
2,45	6,0025	491	2,95	8,7025	591	3,45	11,9025	691	3,95	15,6025	791
2,46	6,0516	493	2,96	8,7616	593	3,46	11,9716	693	3,96	15,6816	793
2,47	6,1009	495	2,97	8,8209	595	3,47	12,0409	695	3,97	15,7609	795
2,48	6,1504	497	2,98	8,8804	597	3,48	12,1104	697	3,98	15,8404	797
2,49	6,2001	499	2,99	8,9401	599	3,49	12,1801	699	3,99	15,9201	799
2,50	6,2500		3,00	9,0000		3,50	12,2500		4,00	16,0000	

Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
4,00	16,0000	801	4,50	20,2500	901	5,00	25,0000	1001	5,50	30,2500	1101
4,01	16,0801	803	4,51	20,3401	903	5,01	25,1001	1003	5,51	30,3601	1103
4,02	16,1604	805	4,52	20,4304	905	5,02	25,2004	1005	5,52	30,4704	1105
4,03	16,2409	807	4,53	20,5209	907	5,03	25,3009	1007	5,53	30,5809	1107
4,04	16,3216	809	4,54	20,6116	909	5,04	25,4016	1009	5,54	30,6916	1109
4,05	16,4025	811	4,55	20,7025	911	5,05	25,5025	1011	5,55	30,8025	1111
4,06	16,4836	813	4,56	20,7936	913	5,06	25,6036	1013	5,56	30,9136	1113
4,07	16,5649	815	4,57	20,8849	915	5,07	25,7049	1015	5,57	31,0249	1115
4,08	16,6464	817	4,58	20,9764	917	5,08	25,8064	1017	5,58	31,1364	1117
4,09	16,7281	819	4,59	21,0681	919	5,09	25,9081	1019	5,59	31,2481	1119
4,10	16,8100	821	4,60	21,1600	921	5,10	26,0100	1021	5,60	31,3600	1121
4,11	16,8921	823	4,61	21,2521	923	5,11	26,1121	1023	5,61	31,4721	1123
4,12	16,9744	825	4,62	21,3444	925	5,12	26,2144	1025	5,62	31,5844	1125
4,13	17,0569	827	4,63	21,4369	927	5,13	26,3169	1027	5,63	31,6969	1127
4,14	17,1396	829	4,64	21,5296	929	5,14	26,4196	1029	5,64	31,8096	1129
4,15	17,2225	831	4,65	21,6225	931	5,15	26,5225	1031	5,65	31,9225	1131
4,16	17,3056	833	4,66	21,7156	933	5,16	26,6256	1033	5,66	32,0356	1133
4,17	17,3889	835	4,67	21,8089	935	5,17	26,7289	1035	5,67	32,1489	1135
4,18	17,4724	837	4,68	21,9024	937	5,18	26,8324	1037	5,68	32,2624	1137
4,19	17,5561	839	4,69	21,9961	939	5,19	26,9361	1039	5,69	32,3761	1139
4,20	17,6400	841	4,70	22,0900	941	5,20	27,0400	1041	5,70	32,4900	1141
4,21	17,7241	843	4,71	22,1841	943	5,21	27,1441	1043	5,71	32,6041	1143
4,22	17,8084	845	4,72	22,2784	945	5,22	27,2484	1045	5,72	32,7184	1145
4,23	17,8929	847	4,73	22,3729	947	5,23	27,3529	1047	5,73	32,8329	1147
4,24	17,9776	849	4,74	22,4676	949	5,24	27,4576	1049	5,74	32,9476	1149
4,25	18,0625	851	4,75	22,5625	951	5,25	27,5625	1051	5,75	33,0625	1151
4,26	18,1476	853	4,76	22,6576	953	5,26	27,6676	1053	5,76	33,1776	1153
4,27	18,2329	855	4,77	22,7529	955	5,27	27,7729	1055	5,77	33,2929	1155
4,28	18,3184	857	4,78	22,8484	957	5,28	27,8784	1057	5,78	33,4084	1157
4,29	18,4041	859	4,79	22,9441	959	5,29	27,9841	1059	5,79	33,5241	1159
4,30	18,4900	861	4,80	23,0400	961	5,30	28,0900	1061	5,80	33,6400	1161
4,31	18,5761	863	4,81	23,1361	963	5,31	28,1961	1063	5,81	33,7561	1163
4,32	18,6624	865	4,82	23,2324	965	5,32	28,3024	1065	5,82	33,8724	1165
4,33	18,7489	867	4,83	23,3289	967	5,33	28,4089	1067	5,83	33,9889	1167
4,34	18,8356	869	4,84	23,4256	969	5,34	28,5156	1069	5,84	34,1056	1169
4,35	18,9225	871	4,85	23,5225	971	5,35	28,6225	1071	5,85	34,2225	1171
4,36	19,0096	873	4,86	23,6196	973	5,36	28,7296	1073	5,86	34,3396	1173
4,37	19,0969	875	4,87	23,7169	975	5,37	28,8369	1075	5,87	34,4569	1175
4,38	19,1844	877	4,88	23,8144	977	5,38	28,9444	1077	5,88	34,5744	1177
4,39	19,2721	879	4,89	23,9121	979	5,39	29,0521	1079	5,89	34,6921	1179
4,40	19,3600	881	4,90	24,0100	981	5,40	29,1600	1081	5,90	34,8100	1181
4,41	19,4481	883	4,91	24,1081	983	5,41	29,2681	1083	5,91	34,9281	1183
4,42	19,5364	885	4,92	24,2064	985	5,42	29,3764	1085	5,92	35,0464	1185
4,43	19,6249	887	4,93	24,3049	987	5,43	29,4849	1087	5,93	35,1649	1187
4,44	19,7136	889	4,94	24,4036	989	5,44	29,5936	1089	5,94	35,2836	1189
4,45	19,8025	891	4,95	24,5025	991	5,45	29,7025	1091	5,95	35,4025	1191
4,46	19,8916	893	4,96	24,6016	993	5,46	29,8116	1093	5,96	35,5216	1193
4,47	19,9809	895	4,97	24,7009	995	5,47	29,9209	1095	5,97	35,6409	1195
4,48	20,0704	897	4,98	24,8004	997	5,48	30,0304	1097	5,98	35,7604	1197
4,49	20,1601	899	4,99	24,9001	999	5,49	30,1401	1099	5,99	35,8801	1199
4,50	20,2500		5,00	25,0000		5,50	30,2500		6,00	36,0000	

Quadrat-Zahlen.

a	a²	d	a	a²	d	a	a²	d	a	a²	d
6,00	36,0000	1201	6,50	42,2500	1301	7,00	49,0000	1401	7,50	56,2500	1501
6,01	36,1201	1203	6,51	42,3801	1303	7,01	49,1401	1403	7,51	56,4001	1503
6,02	36,2404	1205	6,52	42,5104	1305	7,02	49,2804	1405	7,52	56,5504	1505
6,03	36,3609	1207	6,53	42,6409	1307	7,03	49,4209	1407	7,53	56,7009	1507
6,04	36,4816	1209	6,54	42,7716	1309	7,04	49,5616	1409	7,54	56,8516	1509
6,05	36,6025	1211	6,55	42,9025	1311	7,05	49,7025	1411	7,55	57,0025	1511
6,06	36,7236	1213	6,56	43,0336	1313	7,06	49,8436	1413	7,56	57,1536	1513
6,07	36,8449	1215	6,57	43,1649	1315	7,07	49,9849	1415	7,57	57,3049	1515
6,08	36,9664	1217	6,58	43,2964	1317	7,08	50,1264	1417	7,58	57,4564	1517
6,09	37,0881	1219	6,59	43,4281	1319	7,09	50,2681	1419	7,59	57,6081	1519
6,10	37,2100	1221	6,60	43,5600	1321	7,10	50,4100	1421	7,60	57,7600	1521
6,11	37,3321	1223	6,61	43,6921	1323	7,11	50,5521	1423	7,61	57,9121	1523
6,12	37,4544	1225	6,62	43,8244	1325	7,12	50,6944	1425	7,62	58,0644	1525
6,13	37,5769	1227	6,63	43,9569	1327	7,13	50,8369	1427	7,63	58,2169	1527
6,14	37,6996	1229	6,64	44,0896	1329	7,14	50,9796	1429	7,64	58,3696	1529
6,15	37,8225	1231	6,65	44,2225	1331	7,15	51,1225	1431	7,65	58,5225	1531
6,16	37,9456	1233	6,66	44,3556	1333	7,16	51,2656	1433	7,66	58,6756	1533
6,17	38,0689	1235	6,67	44,4889	1335	7,17	51,4089	1435	7,67	58,8289	1535
6,18	38,1924	1237	6,68	44,6224	1337	7,18	51,5524	1437	7,68	58,9824	1537
6,19	38,3161	1239	6,69	44,7561	1339	7,19	51,6961	1439	7,69	59,1361	1539
6,20	38,4400	1241	6,70	44,8900	1341	7,20	51,8400	1441	7,70	59,2900	1541
6,21	38,5641	1243	6,71	45,0241	1343	7,21	51,9841	1443	7,71	59,4441	1543
6,22	38,6884	1245	6,72	45,1584	1345	7,22	52,1284	1445	7,72	59,5984	1545
6,23	38,8129	1247	6,73	45,2929	1347	7,23	52,2729	1447	7,73	59,7529	1547
6,24	38,9376	1249	6,74	45,4276	1349	7,24	52,4176	1449	7,74	59,9076	1549
6,25	39,0625	1251	6,75	45,5625	1351	7,25	52,5625	1451	7,75	60,0625	1551
6,26	39,1876	1253	6,76	45,6976	1353	7,26	52,7076	1453	7,76	60,2176	1553
6,27	39,3129	1255	6,77	45,8329	1355	7,27	52,8529	1455	7,77	60,3729	1555
6,28	39,4384	1257	6,78	45,9684	1357	7,28	53,9984	1457	7,78	60,5284	1557
6,29	39,5641	1259	6,79	46,1041	1359	7,29	53,1441	1459	7,79	60,6841	1559
6,30	39,6900	1261	6,80	46,2400	1361	7,30	53,2900	1461	7,80	60,8400	1561
6,31	39,8161	1263	6,81	46,3761	1363	7,31	53,4361	1463	7,81	60,9961	1563
6,32	39,9424	1265	6,82	46,5124	1365	7,32	53,5824	1465	7,82	61,1524	1565
6,33	40,0689	1267	6,83	46,6489	1367	7,33	53,7289	1467	7,83	61,3089	1567
6,34	40,1956	1269	6,84	46,7856	1369	7,34	53,8756	1469	7,84	61,4656	1569
6,35	40,3225	1271	6,85	46,9225	1371	7,35	54,0225	1471	7,85	61,6225	1571
6,36	40,4496	1273	6,86	47,0596	1373	7,36	54,1696	1473	7,86	61,7796	1573
6,37	40,5769	1275	6,87	47,1969	1375	7,37	54,3169	1475	7,87	61,9369	1575
6,38	40,7044	1277	6,88	47,3344	1377	7,38	54,4644	1477	7,88	62,0944	1577
6,39	40,8321	1279	6,89	47,4721	1379	7,39	54,6121	1479	7,89	62,2521	1579
6,40	40,9600	1281	6,90	47,6100	1381	7,40	54,7600	1481	7,90	62,4100	1581
6,41	41,0881	1283	6,91	47,7481	1383	7,41	54,9081	1483	7,91	62,5681	1583
6,42	41,2164	1285	6,92	47,8864	1385	7,42	55,0564	1485	7,92	62,7264	1585
6,43	41,3449	1287	6,93	48,0249	1387	7,43	55,2049	1487	7,93	62,8849	1587
6,44	41,4736	1289	6,94	48,1636	1389	7,44	55,3536	1489	7,94	63,0436	1589
6,45	41,6025	1291	6,95	48,3025	1391	7,45	55,5025	1491	7,95	63,2025	1591
6,46	41,7316	1293	6,96	48,4416	1393	7,46	55,6516	1493	7,96	63,3616	1593
6,47	41,8609	1295	6,97	48,5809	1395	7,47	55,8009	1495	7,97	63,5209	1595
6,48	41,9904	1297	6,98	48,7204	1397	7,48	55,9504	1497	7,98	63,6804	1597
6,49	42,1201	1299	6,99	48,8601	1399	7,49	56,1001	1499	7,99	63,8401	1599
6,50	42,2500		7,00	49,0000		7,50	56,2500		8,00	64,0000	

Quadrat-Zahlen.

a	a²	d	a	a²	d	a	a²	d	a	a²	d
8,00	64,0000	1601	8,50	72,2500	1701	9,00	81,0000	1801	9,50	90.2500	1901
8,01	64,1601	1603	8,51	72,4201	1703	9,01	81,1801	1803	9,51	90,4401	1903
8,02	64,3204	1605	8,52	72,5904	1705	9,02	81,3604	1805	9,52	90,6304	1905
8,03	64,4809	1607	8,53	72,7609	1707	9,03	81,5409	1807	9,53	90,8209	1907
8,04	64,6416	1609	8.54	72,9316	1709	9,04	81,7216	1809	9,54	91,0116	1909
8,05	64,8025	1611	8,55	73,1025	1711	9,05	81,9025	1811	9,55	91,2025	1911
8,06	64,9636	1613	8,56	73,2736	1713	9,06	82,0836	1813	9,56	91,3936	1913
8,07	65,1249	1615	8,57	73,4449	1715	9,07	82,2649	1815	9,57	91,5849	1915
8,08	65,2864	1617	8,58	73,6164	1717	9,08	82,4464	1817	9,58	91,7764	1917
8,09	65,4481	1619	8,59	73,7881	1719	9,09	82,6281	1819	9,59	91,9681	1919
8,10	65,6100	1621	8,60	73,9600	1721	9,10	82,8100	1821	9,60	92,1600	1921
8,11	65,7721	1623	8,61	74,1321	1723	9,11	82,9921	1823	9,61	92,3521	1923
8,12	65,9344	1625	8,62	74,3044	1725	9,12	83,1744	1825	9,62	92,5444	1225
8,13	66,0969	1627	8,63	74,4769	1727	9,13	83,3569	1827	9,63	92,7369	1927
8,14	66,2596	1629	8,64	74,6496	1729	9,14	83,5396	1829	9,64	92,9296	1929
8,15	66,4225	1631	8,65	74,8225	1731	9,15	83,7225	1831	9,65	93,1225	1931
8,16	66,5856	1633	8,66	74,9956	1733	9,16	83,9056	1833	9,66	93,3156	1933
8,17	66,7489	1635	8,67	75,1689	1735	9,17	84,0889	1835	9,67	93,5089	1935
8,18	66,9124	1637	8,68	75,3424	1737	9,18	84,2724	1837	9,68	93,7024	1937
8,19	67,0761	1639	8,69	75,5161	1739	9,19	84,4561	1839	9,69	93,8961	1939
8,20	67,2400	1641	8,70	75,6900	1741	9,20	84,6400	1841	9,70	94,0900	1941
8,21	67,4041	1643	8,71	75,8641	1743	9,21	84,8241	1843	9,71	94,2841	1943
8,22	67,5684	1645	8,72	76,0384	1745	9,22	85,0084	1845	9,72	94,4784	1945
8,23	67,7329	1647	8,73	76,2129	1747	9,23	85,1929	1847	9,73	94,6729	1947
8,24	67,8976	1649	8,74	76,3876	1749	9,24	85,3776	1849	9,74	94,8676	1949
8,25	68,0625	1651	8,75	76,5625	1751	9,25	85,5625	1851	9,75	95,0625	1951
8,26	68,2276	1653	8,76	76,7376	1753	9,26	85,7476	1853	9,76	95,2576	1953
8,27	68,3929	1655	8,77	76,9129	1755	9,27	85,9329	1855	9,77	95,4529	1955
8,28	68,5584	1657	8,78	77,0884	1757	9,28	86,1184	1857	9,78	95,6484	1957
8,29	68,7241	1659	8,79	77,2641	1759	9,29	86,3041	1859	9,79	95,8441	1959
8,30	68,8900	1661	8,80	77,4400	1761	9,30	86,4900	1861	9,80	96,0400	1961
8,31	69,0561	1663	8,81	77,6161	1763	9,31	86,6761	1863	9,81	96,2361	1963
8,32	69,2224	1665	8,82	77,7924	1765	9,32	86,8624	1865	9,82	96,4324	1965
8,33	69,3889	1667	8,83	77,6989	1767	9,33	87,0489	1867	9,83	96,6289	1967
8,34	69,5556	1669	8,84	78,1456	1769	9,34	87,2356	1869	9,84	96,8256	1969
8,35	69,7225	1671	8,85	78,3225	1771	9,35	87,4225	1871	9,85	97,0225	1971
8,36	69,8896	1673	8,86	78,4996	1773	9,36	87,6096	1873	9,86	97,2196	1973
8,37	70,0569	1675	8,87	78,6769	1775	9,37	87,7969	1875	9,87	97,4169	1975
8,38	70,2244	1677	8,88	78,8544	1777	9,38	87,9844	1877	9,88	97,6144	1977
8,39	70,3921	1679	8,89	79,0321	1779	9,39	88,1721	1879	9,89	97,8121	1979
8,40	70,5600	1681	8,90	79,2100	1781	9,40	88,3600	1881	9,90	98,0100	1981
8,41	70,7281	1683	8,91	79,3881	1783	9,41	88,5481	1883	9,91	98,2081	1983
8,42	70,8964	1685	8,92	79,5664	1785	9,42	88,7364	1885	9,92	98,4064	1985
8,43	71,0649	1687	8,93	79,7449	1787	9,43	88,9249	1887	9,93	98,6049	1987
8,44	71,2336	1689	8,94	79,9236	1789	9,44	89,1136	1889	9,94	98,8036	1989
8,45	71,4025	1691	8,95	80,1025	1791	9,45	89,3025	1891	9,95	99,0025	1991
8,46	71,5716	1693	8,96	80,2816	1793	9,46	89,4916	1893	9,96	99,2016	1993
8,47	71,7409	1695	8,97	80,4609	1795	9,47	89,6809	1895	9,97	99,4009	1995
8,48	71,9104	1697	8,98	80,6404	1797	9,48	89,8704	1897	9,98	99,6004	1997
8,49	72,0801	1699	8,99	80,8201	1799	9,49	90,0601	1899	9,99	99,8001	1999
8,50	72,2500		9,00	81,0000		9,50	90,2500		10,00	100,0000	

II. Reciprok-Zahlen der Quadrate.

Gewichte $p = \frac{1}{m^2}$

m	p	m	p	m	p	m	p	m	p
0,0	∞	2,0	0,250	4,0	0,062	6,0	0,028	8,0	0,016
0,1	100,000	2,1	0,227	4,1	0,059	6,1	0,027	8,1	0,015
0,2	25,000	2,2	0,207	4,2	0,057	6,2	0,026	8,2	0,015
0,3	11,111	2,3	0,189	4,3	0,054	6,3	0,025	8,3	0,015
0,4	6,250	2,4	0,174	4,4	0,052	6,4	0,024	8,4	0,014
0,5	4,000	2,5	0,160	4,5	0,049	6,5	0,024	8,5	0,014
0,6	2,778	2,6	0,148	4,6	0,047	6,6	0,023	8,6	0,014
0,7	2,041	2,7	0,137	4,7	0,045	6,7	0,022	8,7	0,013
0,8	1,562	2,8	0,128	4,8	0,043	6,8	0,022	8,8	0,013
0,9	1,235	2,9	0,119	4,9	0,042	6,9	0,021	8,9	0,013
1,0	1,000	3,0	0,111	5,0	0,040	7,0	0,020	9,0	0,012
1,1	0,826	3,1	0,104	5,1	0,038	7,1	0,020	9,1	0,012
1,2	0,694	3,2	0,098	5,2	0,037	7,2	0,019	9,2	0,012
1,3	0,592	3,3	0,092	5,3	0,036	7,3	0,019	9,3	0,012
1,4	0,510	3,4	0,087	5,4	0,034	7,4	0,018	9,4	0,011
1,5	0,444	3,5	0,082	5,5	0,033	7,5	0,018	9,5	0,011
1,6	0,391	3,6	0,077	5,6	0,032	7,6	0,017	9,6	0,011
1,7	0,346	3,7	0,073	5,7	0,031	7,7	0,017	9,7	0,011
1,8	0,309	3,8	0,069	5,8	0,030	7,8	0,016	9,8	0,010
1,9	0,277	3,9	0,066	5,9	0,029	7,9	0,016	9,9	0,010

m	p	m	p	m	p	m	p	m	p
0,10	100,00	0,30	11,11	0,50	4,00	0,70	2,04	0,90	1,23
0,11	82,64	0,31	10,41	0,51	3,84	0,71	1,98	0,91	1,21
0,12	69,44	0,32	9,77	0,52	3,70	0,72	1,93	0,92	1,18
0,13	59,17	0,33	9,18	0,53	3,56	0,73	1,88	0,93	1,16
0,14	51,02	0,34	8,65	0,54	3,43	0,74	1,83	0,94	1,13
0,15	44,44	0,35	8,16	0,55	3,31	0,75	1,78	0,95	1,11
0,16	39,06	0,36	7,72	0,56	3,19	0,76	1,73	0,96	1,09
0,17	34,60	0,37	7,30	0,57	3,08	0,77	1,69	0,97	1,06
0,18	30,86	0,38	6,93	0,58	2,97	0,78	1,64	0,98	1,04
0,19	27,70	0,39	6,57	0,59	2,87	0,79	1,60	0,99	1,02
0,20	25,00	0,40	6,25	0,60	2,78	0,80	1,56	1,00	1,00
0,21	22,68	0,41	5,95	0,61	2,69	0,81	1,52	1,01	0,98
0,22	20,66	0,42	5,67	0,62	2,60	0,82	1,49	1,02	0,96
0,23	18,90	0,43	5,41	0,63	2,52	0,83	1,45	1,03	0,94
0,24	17,36	0,44	5,17	0,64	2,44	0,84	1,42	1,04	0,92
0,25	16,00	0,45	4,94	0,65	2,37	0,85	1,38	1,05	0,91
0,26	14,79	0,46	4,73	0,66	2,30	0,86	1,35	1,06	0,89
0,27	13,72	0,47	4,53	0,67	2,23	0,87	1,32	1,07	0,87
0,28	12,76	0,48	4,34	0,68	2,16	0,88	1,29	1,08	0,86
0,29	11,89	0,49	4,16	0,69	2,10	0,89	1,26	1,09	0,84

(vgl. S. 20 und S. 23.)

III. Richtungs-Coëfficienten

φ	𝔵	Δ	𝔶	Δ	φ	𝔵	Δ	𝔶	Δ	φ	𝔵	Δ	𝔶	Δ	φ	𝔵	Δ	𝔶	Δ
0°	– 0,00	36	+20,63	01	45°	–14,59	25	+14,59	26	90°	–20,63	01	– 0,00	36	135°	–14,59	26	–14,59	25
1	0,36	36	20,62	01	46	14,84	25	14,33	26	91	20,62	01	0,36	36	136	14,33	26	14,84	25
2	0,72	36	20,61	01	47	15,09	24	14,07	27	92	20,61	01	0,72	36	137	14,07	27	15,09	24
3	1,08	36	20,60	02	48	15,33	24	13,80	27	93	20,60	02	1,08	36	138	13,80	27	15,33	24
4	1,44	36	20,58	03	49	15,57	23	13,53	27	94	20,58	03	1,44	36	139	13,53	27	15,57	23
5°	– 1,80	36	+20,55	04	50°	–15,80	23	+13,26	28	95°	–20,55	04	– 1,80	36	140°	–13,26	28	–15,80	23
6	2,16	35	20,51	04	51	16,03	22	12,98	28	96	20,51	04	2,16	35	141	12,98	28	16,03	22
7	2,51	36	20,47	04	52	16,25	22	12,70	29	97	20,47	04	2,51	36	142	12,70	29	16,25	22
8	2,87	36	20,43	06	53	16,47	22	12,41	29	98	20,43	06	2,87	36	143	12,41	29	16,47	22
9	3,23	35	20,37	06	54	16,69	21	12,12	29	99	20,37	06	3,23	35	144	12,12	29	16,69	21
10°	– 3,58	36	+20,31	06	55°	–16,90	20	+11,83	30	100°	–20,31	06	– 3,58	36	145°	–11,83	30	–16,90	20
11	3,94	35	20,25	07	56	17,10	20	11,53	30	101	20,25	07	3,94	35	146	11,53	30	17,10	20
12	4,29	35	20,18	08	57	17,30	19	11,23	30	102	20,18	08	4,29	35	147	11,23	30	17,30	19
13	4,64	35	20,10	09	58	17,49	19	10,93	31	103	20,10	09	4,64	35	148	10,93	31	17,49	19
14	4,99	35	20,01	09	59	17,68	18	10,62	31	104	20,01	09	4,99	35	149	10,62	31	17,68	18
15°	– 5,34	35	+19,92	09	60°	–17,86	18	+10,31	31	105	–19,92	09	– 5,34	35	150°	–10,31	31	–17,86	18
16	5,69	34	19,83	10	61	18,04	17	10,00	32	106	19,83	10	5,69	34	151	10,00	32	18,04	17
17	6,03	34	19,73	11	62	18,21	17	9,68	32	107	19,73	11	6,03	34	152	9,68	32	18,21	17
18	6,37	35	19,62	12	63	18,38	16	9,36	32	108	19,62	12	6,37	35	153	9,36	32	18,38	16
19	6,72	33	19,50	12	64	18,54	15	9,04	32	109	19,50	12	6,72	33	154	9,04	32	18,54	15
20°	– 7,05	34	+19,38	12	65°	–18,69	15	+ 8,72	33	110°	–19,38	12	– 7,05	34	155°	– 8,72	33	–18,69	15
21	7,39	34	19,26	14	66	18,84	15	8,39	33	111	19,26	14	7,39	34	156	8,39	33	18,84	15
22	7,73	33	19,12	13	67	18,99	13	8,06	33	112	19,12	13	7,73	33	157	8,06	33	18,99	13
23	8,06	33	18,99	15	68	19,12	14	7,73	34	113	18,99	15	8,06	33	158	7,73	34	19,12	14
24	8,39	33	18,84	15	69	19,26	12	7,39	34	114	18,84	15	8,39	33	159	7,39	34	19,26	12
25°	– 8,72	32	+18,69	15	70°	–19,38	12	+ 7,05	33	115°	–18,69	15	– 8,72	32	160°	– 7,05	33	–19,38	12
26	9,04	32	18,54	16	71	19,50	12	6,72	35	116	18,54	16	9,04	32	161	6,72	35	19,50	12
27	9,36	32	18,38	17	72	19,62	11	6,37	34	117	18,38	17	9,36	32	162	6,37	34	19,62	11
28	9,68	32	18,21	17	73	19,73	10	6,03	34	118	18,21	17	9,68	32	163	6,03	34	19,73	10
29	10,00	31	18,04	18	74	19,83	09	5,69	35	119	18,04	18	10,00	31	164	5,69	35	19,83	09
30°	–10,31	31	+17,86	18	75°	–19,92	09	+ 5,34	35	120	–17,86	18	–10,31	31	165°	– 5,34	35	–19,92	09
31	10,62	31	17,68	19	76	20,01	09	4,99	35	121	17,68	19	10,62	31	166	4,99	35	20,01	09
32	10,93	30	17,49	19	77	20,10	08	4,64	35	122	17,49	19	10,93	30	167	5,64	35	20,10	08
33	11,23	30	17,30	20	78	20,18	07	4,29	35	123	17,30	20	11,23	30	168	4,29	35	20,18	07
34	11,53	30	17,10	20	79	20,25	06	3,94	36	124	17,10	20	11,53	30	169	3,94	36	20,25	06
35°	–11,83	29	+16,90	21	80°	–20,31	06	+ 3,58	35	125°	–16,90	21	–11,83	29	170°	– 3,58	35	–20,31	06
36	12,12	29	16,69	22	81	20,37	06	3,23	36	126	16,69	22	12,12	29	171	3,23	36	20,37	06
37	12,41	29	16,47	22	82	20,43	04	2,87	36	127	16,47	22	12,41	29	172	2,87	36	20,43	04
38	12,70	28	16,25	22	83	20,47	04	2,51	35	128	16,25	22	12,70	28	173	2,51	35	20,47	04
39	12,98	28	16,03	23	84	20,51	04	2,16	36	129	16,03	23	12,98	28	174	2,16	36	20,51	04
40°	–13,26	27	+15,80	23	85°	–20,55	03	+ 1,80	36	130	–15,80	23	–13,26	27	175°	– 1,80	36	–20,55	03
41	13,53	27	15,57	24	86	20,58	02	1,44	36	131	15,57	24	13,53	27	176	1,44	36	20,58	02
42	13,80	27	15,33	24	87	20,60	01	1,08	36	132	15,33	24	13,80	27	177	1,08	36	20,60	01
43	14,07	26	15,09	25	88	20,61	01	0,72	36	133	15,09	25	14,07	26	178	0,72	36	20,61	01
44	14,33	26	14,84	25	89	20,62	01	0,36	36	134	14,84	25	14,33	26	179	0,36	36	20,62	01
45	14,59		14,59		90	20,63		0,00		135	14,59		14,59		180	0,00		20,63	

(vgl. S. 132.)

$\mathfrak{x} = -20,6265 \sin\varphi$, $\mathfrak{y} = +20,6265 \cos\varphi$

φ	$\mathfrak{x}$		$\mathfrak{y}$		φ	$\mathfrak{x}$		$\mathfrak{y}$		φ	$\mathfrak{x}$		$\mathfrak{y}$		φ	$\mathfrak{x}$		$\mathfrak{y}$	
180°	+ 0,00	36	−20,63	01	225°	+14,59	25	−14,59	26	270°	+20,63	01	+ 0,00	36	315°	+14,59	26	+14,59	25
181	0,36	36	20,62	01	226	14,84	25	14,33	26	271	20,62	01	0,36	36	316	14,33	26	14,84	25
182	0,72	36	20,61	01	227	15,09	24	14,07	27	272	20,61	01	0,72	36	317	14,07	27	14,09	24
183	1,08	36	20,60	02	228	15,33	24	13,80	27	273	20,60	02	1,08	36	318	13,80	27	15,33	24
184	1,44	36	20,58	03	229	15,57	23	13,53	27	274	20,58	03	1,44	36	319	13,53	27	15,57	23
185°	+ 1,80	36	−20,55	04	230°	+15,80	23	−13,26	28	275°	+20,55	04	+ 1,80	36	320°	+13,26	28	+15,80	23
186	2,16	35	20,51	04	231	16,03	22	12,98	28	276	20,51	04	2,16	35	321	12,98	28	16,03	22
187	2,51	36	20,47	04	232	16,25	22	12,70	29	277	20,47	04	2,51	36	322	12,70	29	16,25	22
188	2,87	36	20,43	06	233	16,47	22	12,41	29	278	20,43	06	2,87	36	323	12,41	29	16,47	22
189	3,23	35	20,37	06	234	16,69	21	12,12	29	279	20,37	06	3,23	35	324	12,12	29	16,69	21
190°	+ 3,58	36	−20,31	06	235°	+16,90	20	−11,83	30	280°	+20,31	06	+ 3,58	36	325°	+11,83	30	+16,90	20
191	3,94	35	20,25	07	236	17,10	20	11,53	30	281	20,25	07	3,94	35	326	11,53	30	17,10	20
192	4,29	35	20,18	08	237	17,30	19	11,23	30	282	20,18	08	4,29	35	327	11,23	30	17,30	19
193	4,64	35	20,10	09	238	17,49	19	10,93	31	283	20,10	09	4,64	35	328	10,93	31	17,49	19
194	4,99	35	20,01	09	239	17,68	18	10,62	31	284	20,01	09	4,99	35	329	10,62	31	17,68	18
195°	+ 5,34	35	−19,92	09	240°	+17,86	18	−10,31	31	285°	+19,92	09	+ 5,34	35	330°	+10,31	31	+17,86	18
196	5,69	34	19,83	10	241	18,04	17	10,00	32	286	19,83	10	5,69	34	331	10,00	32	18,04	17
197	6,03	34	19,73	11	242	18,21	17	9,68	32	287	19,73	11	6,03	34	332	9,68	32	18,21	17
198	6,37	35	19,62	12	243	18,38	16	9,36	32	288	19,62	12	6,37	35	333	9,36	32	18,38	16
199	6,72	33	19,50	12	244	18,54	15	9,04	32	289	19,50	12	6,72	33	334	9,04	32	18,54	15
200°	+ 7,05	34	−19,38	12	245°	+18,69	15	− 8,72	33	290°	+19,38	12	+ 7,05	34	335°	+ 8,72	33	+18,69	15
201	7,39	34	19,26	14	246	18,84	15	8,39	33	291	19,26	14	7,39	34	336	8,39	33	18,84	15
202	7,73	33	19,12	13	247	18,99	13	8,06	33	292	19,12	13	7,73	33	337	8,06	33	18,99	13
203	8,06	33	18,99	15	248	19,12	14	7,73	34	293	18,99	15	8,06	33	338	7,73	34	19,12	14
204	8,39	33	18,84	15	249	19,26	12	7,39	34	294	18,84	15	8,39	33	339	7,39	34	19,26	12
205°	+ 8,72	32	−18,69	15	250°	+19,38	12	− 7,05	33	295°	+18,69	15	+ 8,72	32	340	+ 7,05	33	+19,38	12
206	9,04	32	18,54	16	251	19,50	12	6,72	35	296	18,54	16	9,04	32	341	6,72	35	19,50	12
207	9,36	32	18,38	17	252	19,62	11	6,37	34	297	18,38	17	9,36	32	342	6,37	34	19,62	11
208	9,68	32	18,21	17	253	19,73	10	6,03	34	298	18,21	17	9,68	32	343	6,03	34	19,73	10
209	10,00	31	18,04	18	254	19,83	09	5,69	35	299	18,04	18	10,00	31	344	5,69	35	19,83	09
210°	+10,31	31	−17,86	18	255°	+19,92	09	− 5,34	35	300	+17,86	18	+10,31	31	345°	+ 5,34	35	+19,92	09
211	10,62	31	17,68	19	256	20,01	09	4,99	35	301	17,68	19	10,62	31	346	4,99	35	20,01	09
212	10,93	30	17,49	19	257	20,10	08	4,64	35	302	17,49	19	10,93	30	347	4,64	35	20,10	08
213	11,23	30	17,30	20	258	20,18	07	4,29	35	303	17,30	20	11,23	30	348	4,29	35	20,18	07
214	11,53	30	17,10	20	259	20,25	06	3,94	36	304	17,10	20	11,53	30	349	3,94	36	20,25	06
215	+11,83	29	−16,90	21	260°	+20,31	06	− 3,58	35	305°	+16,90	21	+11,83	29	350°	+ 3,58	35	+20,31	06
216	12,12	29	16,69	22	261	20,37	06	3,23	36	306	16,69	22	12,12	29	351	3,23	36	20,37	06
217	12,41	29	16,47	22	262	20,43	04	2,87	36	307	16,47	22	12,41	29	352	2,87	36	20,43	04
218	12,70	28	16,25	22	263	20,47	04	2,51	35	308	16,25	22	12,70	28	353	2,51	35	20,47	04
219	12,98	28	16,03	23	264	20,51	04	2,16	36	309	16,03	23	12,98	28	354	2,16	36	20,51	03
220°	+13,26	27	−15,80	23	265°	+20,55	03	− 1,80	36	310°	+15,80	23	+13,26	27	355°	+ 1,80	36	+20,55	03
221	13,53	27	15,57	24	266	20,58	02	1,44	36	311	15,57	24	13,53	27	356	1,44	36	20,58	02
222	13,80	27	15,33	24	267	20,60	01	1,08	36	312	15,33	24	13,80	27	357	1,08	36	20,60	01
223	14,07	26	15,09	25	268	20,61	01	0,72	36	313	15,09	25	14,07	26	358	0,72	36	20,61	01
224	14,33	26	14,84	25	269	20,62	01	0,36	36	314	14,84	25	14,33	26	359	0,36	36	20,62	01
225	14,59		14,59		270	20,63		0,00		315	14,59		14,59		360	0,00		20,63	

(vgl. S. 132.)

IV. Fehler-Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen die Grenzen Null und den n-fachen wahrscheinlichen Fehler fällt.

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	0,9	diff.
0,0	0,0000	0,0054	0,0108	0,0161	0,0215	0,0269	0,0323	0,0377	0,0430	0,0484	54
0,1	0538	0591	0645	0699	0752	0806	0859	0913	0966	1020	53
0,2	1073	1126	1180	1233	1286	1339	1392	1445	1498	1551	52
0,3	1603	1656	1709	1761	1814	1866	1918	1971	2023	2075	52
0,4	2127	2179	2230	2282	2334	2385	2436	2488	2539	2590	51
0,5	0,2641	0,2691	0,2742	0,2793	0,2843	0,2893	0,2944	0,2994	0,3043	0,3093	50
0,6	3143	3192	3242	3291	3340	3389	3438	3487	3535	3583	49
0,7	3632	3680	3728	3775	3823	3870	3918	3965	4012	4059	46
0,8	4105	4152	4198	4244	4290	4336	4381	4427	4472	4517	45
0,9	4562	4606	4651	4695	4739	4783	4827	4860	4914	4957	43
1,0	0,5000	0,5043	0,5085	0,5128	0,5170	0,5212	0,5254	0,5295	0,5337	0,5378	41
1,1	5419	5460	5500	5540	5581	5620	5660	5700	5739	5778	39
1,2	5817	5856	5894	5932	5970	6008	6046	6083	6120	6157	37
1,3	6194	6231	6267	6303	6339	6375	6410	6445	6480	6515	35
1,4	6550	6584	6618	6652	6686	6719	6753	6786	6818	6851	32
1,5	0,6883	0,6915	0,6947	0,6979	0,7011	0,7042	0,7073	0,7104	0,7134	0,7165	30
1,6	7195	7225	7255	7284	7313	7342	7371	7400	7428	7457	28
1,7	7485	7512	7540	7567	7594	7621	7648	7675	7701	7727	26
1,8	7753	7778	7804	7829	7854	7879	7904	7928	7952	7976	24
1,9	8000	8023	8047	8070	8093	8116	8138	8161	8183	8205	22
2,0	0,8227	0,8248	0,8270	0,8291	0,8312	0,8332	0,8353	0,8373	0,8394	0,8414	19
2,1	8433	8453	8473	8492	8511	8530	8549	8567	8585	8604	18
2,2	8622	8639	8657	8674	8692	8709	8726	8742	8759	8775	17
2,3	8792	8808	8824	8840	8855	8870	8886	8901	8916	8930	15
2,4	8945	8960	8974	8988	9002	9016	9029	9043	9056	9069	13
2,5	0,9082	0,9095	0,9108	0,9121	0,9133	0,9146	0,9158	0,9170	0,9182	0,9193	12
2,6	9205	9217	9228	9239	9250	9261	9272	9283	9293	9304	10
2,7	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9373	9383	9392	9401	9
2,8	9410	9419	9428	9437	9446	9454	9463	9471	9479	9487	8
2,9	9495	9503	9511	9519	9526	9534	9541	9548	9556	9563	7
3,0	0,9570	0,9577	0,9583	0,9590	0,9597	0,9603	0,9610	0,9616	0,9622	0,9629	6
3,1	9635	9641	9647	9652	9658	9664	9669	9675	9680	9686	5
3,2	9691	9696	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9735	5
3,3	9740	9744	9749	9753	9757	9761	9766	9770	9774	9778	4
3,4	9782	9786	9789	9793	9797	9800	9804	9807	9811	9814	4
3,5	0,9818	0,9821	0,9824	0,9827	0,9830	0,9833	0,9837	0,9840	0,9842	0,9845	3
3,6	9848	9851	9854	9856	9859	9862	9864	9867	9869	9872	2
3,7	9874	9877	9879	9881	9884	9886	9888	9890	9892	9894	2
3,8	9896	9898	9900	9902	9904	9906	9908	9909	9911	9913	2
3,9	9915	9916	9918	9920	9921	9923	9924	9926	9927	9929	1
4,0	9930	9932	9933	9934	9936	9937	9938	9939	9941	9942	1
4,1	9943	9944	9945	9947	9948	9949	9950	9951	9952	9953	1
$n =$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	
$W =$	0,9943	0,9954	0,9963	0,9970	0,9976	0,9981	0,9985	0,9988	0,9991	0,9993	

(vgl. S. 269.)

Berichtigungen.

Seite 19. § 8. fünfte Linie statt Beobachtung, lies: Betrachtung.
„ 60. Links oben statt S. 20, lies: § 20.
„ 111. Zu § 46. ist später in § 124. S. 355 eine Berichtigung gegeben.
„ 134. Fall III. Ein Vorzeichenfehler (— (..) + (..)) vgl. Band II. S. 222.
„ 159. Oben statt $n + z$, lies: $n + 2$.
„ 226. Im dritten Glied von $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$ statt $\frac{1}{7}$, lies: $\frac{1}{5}$.
„ 232. Rechts unten statt Geraden, lies: Gradmessung.
„ 251. Bei v_1 statt w_0, lies: wo.
„ 295. Rechts unten statt 1mal, lies: 3mal.
„ 333. Die Fig. 26. kommt mit einer Verbesserung wieder in Band II. S. 278.
„ 344. In (13) statt $(m_1^2 - m_2^2)$, lies: $(m_1^2 + m_2^2)$.

